Euclides e Seus Elementos

Docente: Profª Dra. Eliane Quelho Frota Rezende
Discentes: Rodrigo Roxo R.A. 025081
Vinicius Fernando P. Silva R.A. 025378

Introdução

No século IV A.C. a Grécia passou por um período de diversas guerras implicando no desmantelamento de seu império. Paralelamente, Alexandre o Grande da Macedônia, que vinha expandindo seu reinado, conquistou algumas cidades gregas, entre elas estava Atenas – berço do desenvolvimento filosófico, histórico, matemático e de ciências naturais.

Sendo assim, a fusão entre a cultura grega e macedônica engendrou a Era Helenística – conhecida pelo imensurável progresso científico. Nesse período, Alexandre o Grande funda a capital de seu império (Alexandria) e, após sua morte, seu sucessor Ptolomeu constrói a primeira universidade do mundo.

Para montar uma equipe de intelectuais de alto gabarito, Ptolomeu recorreu a Atenas, convidando o ilustre Demérito Faleiros para dirigir a biblioteca. Homens de talento e competência foram escolhidos para desenvolver os diversos campos de estudos. Euclides, possivelmente oriundo de Atenas, foi escolhido para chefiar o departamento de matemática.

Euclides e seus elementos

A Academia de Platão tinha uma coleção admirável e muito elogiada escrita por Teúdio de Magnésia. Ao que parece, a geometria de Teúdio foi a precursora imediata do trabalho de Euclides – que sem duvida alguma teve acesso a ela, especialmente se de fato ele estudou na Escola de Platão. Assim, é provável que os Elementos de Euclides sejam, na sua maior parte, uma compilação altamente bem sucedida e um arranjo sistemático de trabalhos anteriores.

Não há duvida de que Euclides teve de dar muitas demonstrações e aperfeiçoar outras, mas o grande mérito de seu trabalho reside na seleção feliz de proposições e no seu arranjo numa seqüência lógica, presumivelmente a partir de umas poucas suposições iniciais.

Sendo assim, vamos aos elementos. Primeiramente, eles são compostos de 13 livros compreendendo assuntos como geometria plana e espacial (Livros I, III, IV, VI, XI e XII), teoria dos números e álgebra elementar (geométrica). Nesse trabalho abordaremos, apenas, o que se refere à geometria plana.

O Livro I começa com um conjunto de 5 axiomas e 5 postulados podendo ser divididos em:

A – Axiomas: i – Coisas iguais à mesma coisa são iguais entre si; ii – Adicionando-se iguais a iguais, as somas são iguais.; iii – Subtraindo-se iguais a iguais, as diferenças são iguais; iv – Coisas que coincidem uma com a outra são iguais entre si; v – o todo é a maior do que a parte.

B – Postulados: i – É possível traçar uma linha reta de um ponto qualquer a outro ponto qualquer; ii – É possível prolongar uma reta finita indefinidamente em linha reta; iii – É possível descrever um círculo com qualquer centro e qualquer raio; iv – todos os ângulos retos são iguais entre si; v - Se uma reta intercepta duas retas formando ângulos interiores de um mesmo lado menores do que dois retos, prolongando-se essas duas retas indefinidamente elas se encontrarão no lado em que os dois ângulos são menores do que dois ângulos retos.

Sendo assim, Euclides deduz suas 465 proposições a partir das 10 afirmações supracitadas.

Ainda no primeiro livro, podemos dividir as quarenta e oito proposições em três grupos. As primeiras vinte e seis tratam das propriedades do triângulo, bem como três casos de congruência. As proposições 27 a 32 estabelecem a teoria das paralelas e provam que soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois ângulos retos. A proposição 47 é a demonstração do teorema de Pitágoras atribuída ao próprio Euclides, enquanto a 48 compreende a recíproca do teorema precedente. As demais tratam de triângulos, paralelogramos e quadrados no que tange as relações entre as áreas.

Vale frisar, ainda, algumas proposições do Livro 1 que julgamos de suma importância. As três primeiras dizem respeito a problemas de construção envolvendo régua e compasso onde se pode transferir um segmento de reta de uma dada posição a uma outra desejada. Em seguida, Euclides estabelece a congruência de 2 triângulos quando se conhece dois de seus lados e o ângulo formado entre eles. A demonstração se fez por superposição. A Proposição 5 prova a igualdade dos ângulos da base de um triângulo isósceles. E, por fim, as proposições 9 a 12 mostram problemas de construção.

O Livro III, compreendendo 39 proposições, contém teoremas sobre círculos, secantes e tangentes. No livro seguinte discute-se construções com régua e compasso de polígonos regulares de 3, 4, 5, 6 e 15 lados, bem como a inscrição a circunscrição desses polígonos num circulo dado.

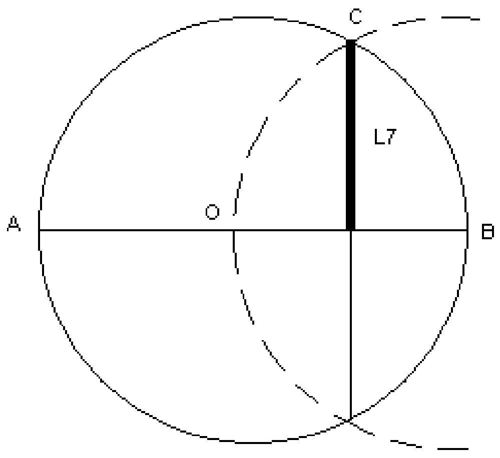
No livro VI, Euclides aplica a teoria das proporções de Eudoxo à geometria plana. Encontramos nele os teoremas fundamentais da semelhança de triângulos; a proposição que assegura que a bissetriz de um ângulo de um triângulo divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos outros dois lados; há ainda a generalização do teorema de Pitágoras.

Por fim, no livro IX há proposições de suma importância como o teorema fundamental da aritmética que estabelece a seguinte tese: todo inteiro *n* maior do que 1 pode ser expresso como um produto de primos.

Construção de polígonos regulares inscritos em uma circunferência qualquer (Processo Aproximado)

Heptágono Regular

O lado do heptágono regular pode ser obtido construindo o lado aproximado L7=L3/2.



Eneágono Regular

O lado do eneágono regular (L9) pode ser obtido através da seguinte construção:

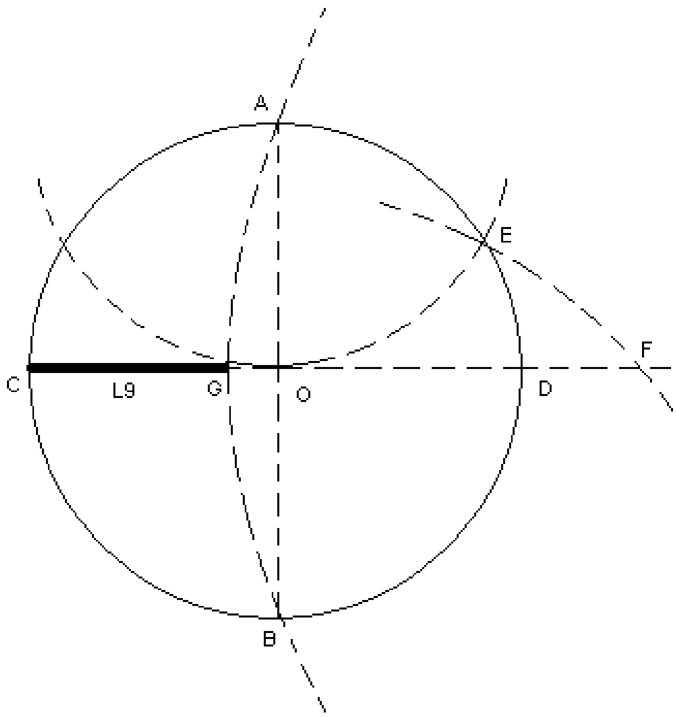
1 – Traçamos dois diâmetros AB e CD, perpendiculares entre si.

2 – Construímos a circunferência C (A , AO) e obtemos o ponto E em C (O , OA).

3 – Construímos a circunferência C (B , BE) e obtemos F em CD.

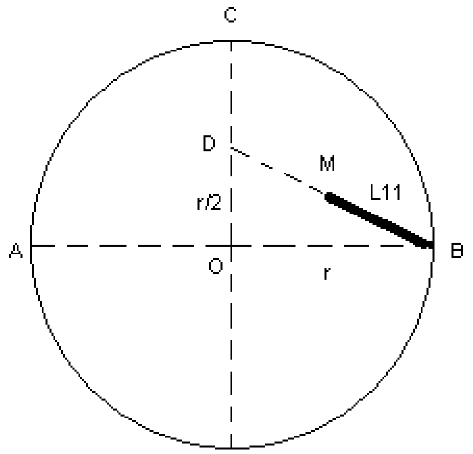
4 – Construímos a circunferência C (F , FB) e obtemos G em CO.

5 – Tomamos L9 = CG



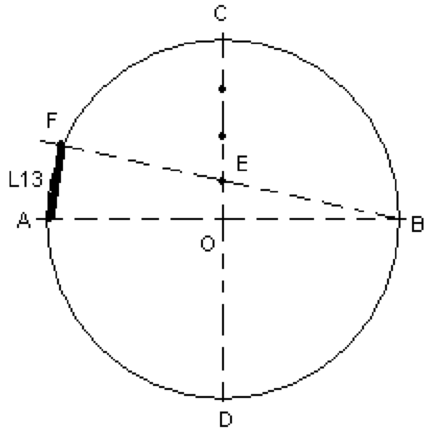
Polígono Regular de 11 lados

Para efetuar tal construção, basta tomarmos L11 igual à metade da hipotenusa do triângulo retângulo de catetos r e r/2 (sendo r o raio da circunferência).



Polígono Regular de 13 lados

Traçamos primeiramente dois diâmetros AB e CD perpendiculares entre si. Marcamos então OE = r / 4 em OC. Depois ligamos B com E obtendo o ponto F na circunferência. Basta então tomarmos L13 = AF.


C
F
E
L13
A
B
O
D