Introdução

O trabalho irá discorrer sobre a razão áurea. Temos que a razão áurea trata-se de um objetivo de estudo desde os tempos mais remotos. Esta razão representa a mais agradável proporção entre dois segmentos ou duas medidas. Seu valor foi há muito identificada como equivalente a 1,618, convencionando-se identificá-la por Phi.

A proporção áurea é uma constante transcendente assim chamada por ser transcendente. Seu estudo é muito freqüente por estar relacionado diretamente com os fatos relacionados ao crescimento e isto se de em parte por ser um número relacionado com a série de Fibonacci.

A seguir, temos uma discussão sobre o número áureo e suas aplicações na natureza e às representações algébricas e geométricas.

Histórico

O histórico do número áureo confunde-se com o período da Antigüidade.

No Egito Antigo, temos que as pirâmides foram construídas levando em consideração a razão áurea.

É sabido que na Grécia antiga se acreditava que todo o mundo e todo o cosmo era composto de apenas quatro elementos: ar, água, terra e fogo. Os Pitagóricos (uma sociedade secreta cujos membros se dedicavam ao estudo da Matemática e da Filosofia) conheciam a existência de quatro sólidos geométricos perfeitos: tetraedro, hexaedro, octaedro e icosaedro, aos quais associavam, segundo eles, cada um dos elementos componentes da Natureza.

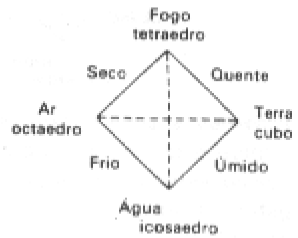


Figura 1

Sabemos também que o homem sempre teve necessidade de estar ligado a crenças divinas e de buscar as origens do Universo, tentando encontrar aí suas próprias raízes. Para tanto ele sempre procurou ordenar tudo que lhe rodeia. O homem sempre busca encontrar um ser supremo, que possa representar a perfeição na desordem em que vive.

Quando os Pitagóricos descobriram o quinto e último sólido geométrico perfeito deviam associá-lo a algum outro elemento do universo. Seguindo suas crenças, nada melhor do que associá-lo com os Deuses, já que não havia mais elementos tangíveis com os quais pudessem estabelecer as suas relações.

Este último sólido descoberto foi o Dodecaedro, a quem Platão chamou de *"o mais nobre corpo entre todos os outros"*.

Entre os cinco sólidos geométricos conhecidos o dodecaedro e o icosaedro são aqueles que apresentam mais relações com o número Phi. A escolha do dodecaedro para representar a ligação com os Deuses parece ter se dado por razões filosóficas (que transcendem o objetivo deste trabalho) e por uma razão matemática simples: enquanto este é constituído de pentágonos perfeitos, que se relacionam fortemente com Phi, aquele é composto de triângulos eqüiláteros, que não possuem relação direta com o número Phi.

O número áureo recebe o nome de Phi em homenagem ao arquiteto grego Phidias, construtor do Parthenon e que utilizou o número de ouro em muitas de suas obras.

Algumas correntes místicas acreditam que objetos cujas dimensões estão relacionadas a Phi harmonizam-se provocando a sensação de beleza e harmonia.

O homem sempre tentou alcançar a perfeição, seja nas pinturas, nos projetos arquitetônicos ou até nos mapas.

O número áureo voltaria a ser aplicado mais tarde, principalmente nas pinturas renascentistas, como se poderia observar em algumas obras de Leonardo da Vinci.

O segmento áureo

O número áureo pode ser obtido por meio de um segmento, seguindo a seguinte definição: se um ponto divide um segmento de reta em média e extrema razão, se o mais longo dos segmentos é uma média geométrica entre o menor e o segmento todo, então a razão do segmento menor com o segmento maior é a razão áurea.

Isto pode ser exemplificado a partir da figura abaixo:

Figura 2

Pelo estudo das proporções podemos estabelecer que:

$$\frac{u}{u+v} = \frac{v}{u}$$

que pode ser escrito como

$$\frac{u}{u} + \frac{v}{u} = \frac{u}{v}$$

substituindo

$$\frac{u}{v} = x$$

temos

$$\frac{u}{u} + \frac{v}{u} = \frac{u}{v}$$

$$1 + \frac{1}{x} = x$$

$$x + 1 = x^2$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Essa equação apresenta duas raízes reais, que são

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cong 0{,}618 \quad e$$

$$x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}618 = Phi$$

E portanto a relação u/v representa o segmento áureo.

A construção do segmento áureo por meio de régua e compasso, pode ser feita da seguinte maneira:

Seja dado um segmento AB qualquer,

Obtendo o ponto médio de AB, colocando a ponta seca do compasso em um extremo, abra-o até o outro extremo e trace um arco para cima e para baixo do segmento da reta AB. Repita este procedimento com o outro extremo da reta, sem alterar a abertura do compasso. Os pontos onde os arcos se cruzam devem ser unidos por um segmento de reta (visto em vermelho) e posto onde este segmento cruza o primeiro segmento AB, é o ponto médio de AB;

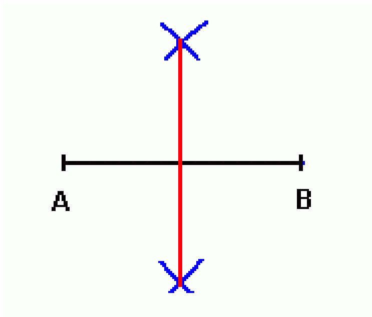


Figura 3

Traçando uma reta perpendicular a AB, passando por B com a metade do comprimento de AB;

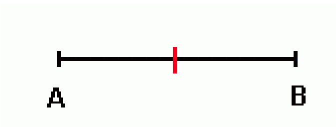


Figura 4

Traçando primeiramente a perpendicular a AB;

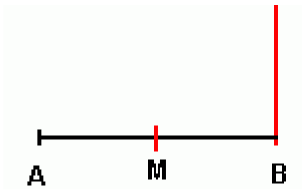


Figura 5

Com a ponta seca do compasso em B, abrir até o ponto médio M e traçar um arco até que este cruze a reta perpendicular a AB;

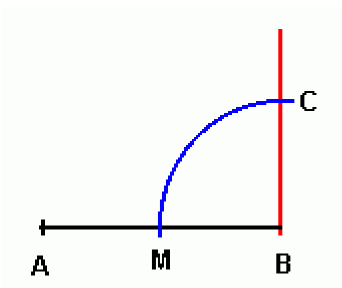


Figura 6

Tem-se assim um novo segmento BC perpendicular a AB com exatamente a metade do comprimento de AB.

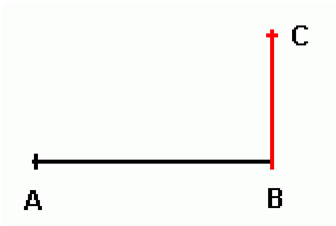


Figura 7
Unindo o ponto C encontrado, temos o triângulo ABC;

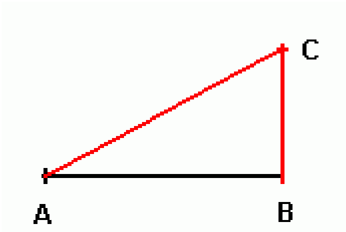


Figura 8

Colocando a ponta seca do compasso no vértice C do triângulo e abrindo até o ponto B. Usando este raio para marcar o ponto E na hipotenusa do triângulo;

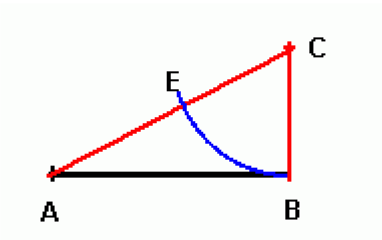


Figura 9
Daí, finalmente com a ponta seca do compasso no vértice A, abrindo-o até o ponto E marcado na hipotenusa e usando este raio para marcar o ponto D na primeira reta AB. Este ponto é o ponto que divide o segmento AB em duas partes, onde o maior segmento é 1,618... vezes o menor;

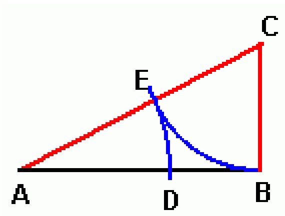


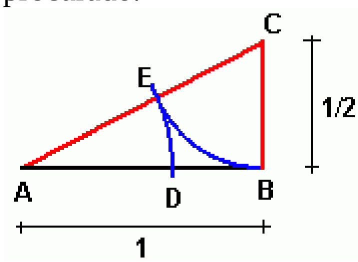
Figura 10
Com isto , é obtido o ponto D procurado.


Figura11

Este tipo de construção é validado a partir do seguinte argumento:

Se o lado AB do triângulo mede 1 unidade de comprimento, então o lado BC mede a metade e obtemos a medida da hipotenusa pelo teorema de Pitágoras:

$AC^2 = AB^2 + BC^2$, logo $AC^2 = 1 + ¼ = 5/4$

Daí, AC = $\sqrt{5}/2$.

E o ponto E na hipotenusa é marcado de forma que CE tenha o mesmo comprimento que CB, ou seja, ½, daí

AC = $(\sqrt{5} - 1)/2$

E o ponto D marcado a mesma distância de A, temos

AD = AE = $(\sqrt{5} - 1)/2$

Então temos que a proporção:

AB/AD = $(\sqrt{5} + 1)/2$, que é o número áureo.

Dado um outro segmento AB, temos que se C divide AB em média e extrema razão:

Figura 12

Com AC = a e CB = b.

Marcando sobre AB os pontos C1,C2,C3,C4 .... de tal forma que AC2 = C1B, AC3 = C2C1, AC4 = C3C2, resultando na figura abaixo:

Figura 13

Portanto temos que Cn divide ACn-1 em média vê extrema razão n = 2,3,4..., no qual temos que os segmentos AC1 e C1B da divisão áurea de AB são incomensuráveis, pois sendo os segmentos AC1, C1B e os outros segmentos números positivos, então temos que a seqüência resultaria numa seqüência positiva decrescente infinita, o que seria um absurdo considerando apenas números reais.

No segmento AB, e aplicando as regras de proporções, obtemos que:

$$b^2 = ab = a^2.$$

Escrevendo m = b/a e dividindo a equação por a^2, temos que:

$$m^2 + m = 1.$$

Adicionando ¼ ao primeiro membro, temos:

$$m^2 + m + \frac{1}{4} = \frac{5}{4},$$

$$\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}.$$

$$m + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$m = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \cong 0{,}618$$

Triângulo áureo

O triângulo áureo caracteriza-se como sendo um triângulo isósceles ABC com ângulos ABC com ângulos de base 72º e ângulo do ápice de 36º.

O triângulo áureo é encontrado no pentagrama mítico.

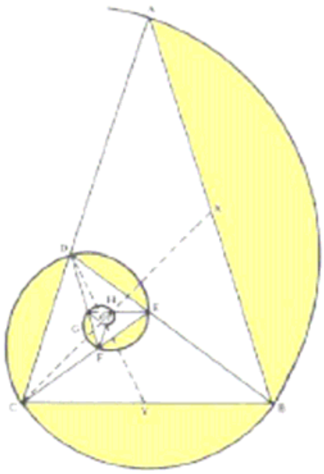


Figura 13

Construção: Considerando um triângulo isósceles ABD cujos ângulos de base valem o dobro do terceiro ângulo. Como a soma dos ângulos é 180º, esse triângulo possui ângulos de 36º, 72º e 72º.

Trace a bissetriz de um ângulo da base até o lado oposto, formando o triângulo DCB. Note que o novo triângulo possui os mesmos ângulos do triângulo anterior e, portanto, eles são semelhantes. Repare também que como os ângulos ADC e DAC são iguais, os lados AC e CD também são iguais. Chamemos a medida AD de r e a medida DB = DC = AC de x.

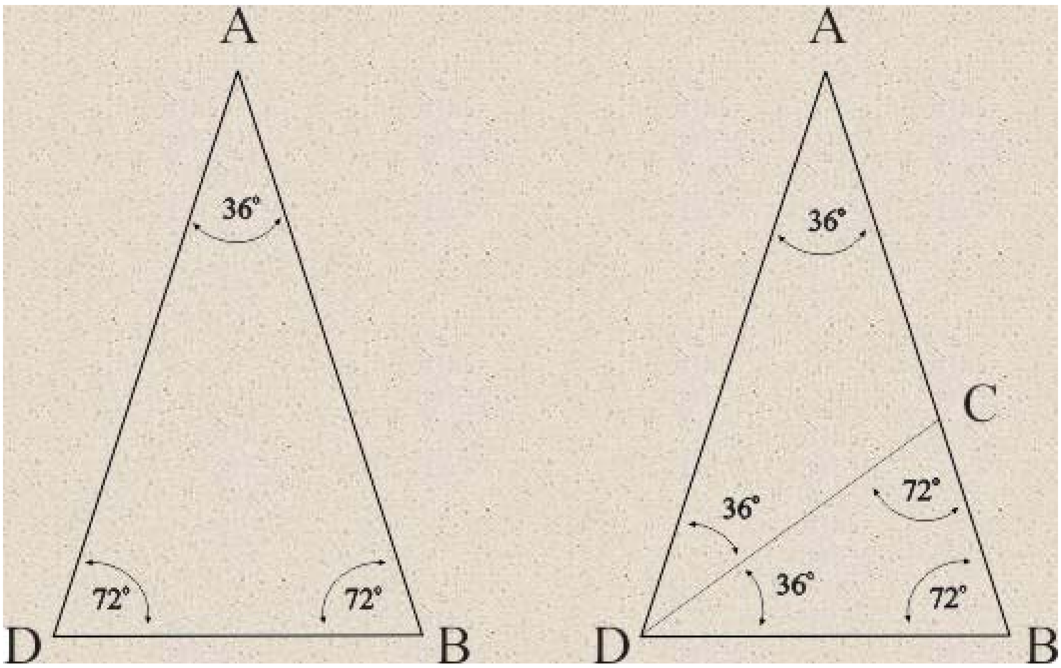


Figura 14

Por semelhança, temos que r/x = x/(r-x). Desenvolvendo, chegamos à equação:
$r \ -rx + x^2 \ = 0$

De onde obtemos que r = x($\sqrt{5}$ -1)/2, logo r/x = ($\sqrt{5}$ -1)/2 é a razão áurea e o triângulo é áureo, aparece em dois polígonos regulares: pentágono e decágono, como visto abaixo:

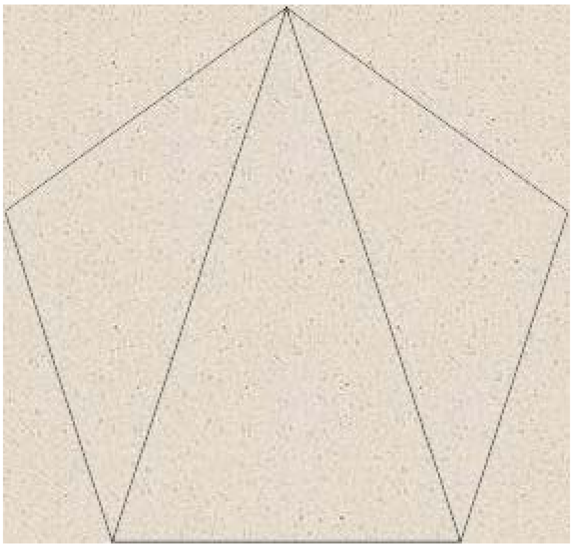


Figura 15

Retângulo áureo

Denominamos como qualquer retângulo áureo qualquer retângulo ABCD como o da figura abaixo que apresentem a seguinte propriedade: caso seja retirado deste um quadrado, por exemplo, o quadrado ABFE, o retângulo restante CDEF é semelhante ao original.

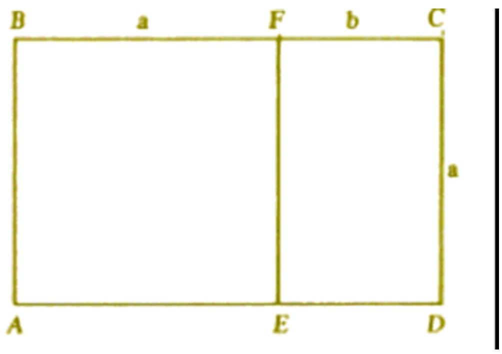


Figura 16

Tomemos a + b e a como os comprimentos dos lados do retângulo original e da propriedade descrita para este retângulo, teremos a seguinte relação:
a/(a+b) = b/a

e fazendo uso da teoria de proporções, teremos que:

$a/(a+b) = b/a = (a-b)/(a+b)-a$
ou seja
$b/a = (a-b)/b$

Em outras palavras, temos que o retângulo áureo de lados a+b e a é áureo, então o retângulo de lados a e b também o é.

Tal procedimento é o mesmo para que se venha a calcular e verificar que também são áureos os retângulos de lados b e a-b, a-b e b-a etc.

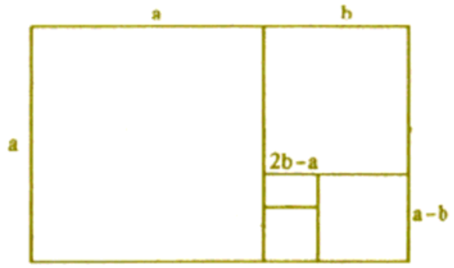
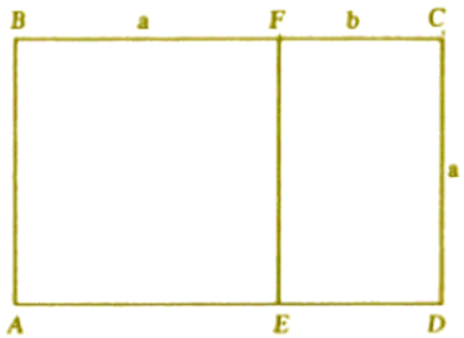


Figura 17

Simplificadamente, temos que se são dados os números a e b, então se eles satisfazem a relação inicial, temos que a seqüência a+b, a, b, a2, a3 ... no qual:
a2 = a-b, a3 = b-a2 = 2b-a e, de uma forma geral, an = an-2 – an-1 é a seqüência

Como do raciocínio anterior temos que quaisquer dois termos consecutivos desta seqüência são lados de um retângulo áureo, então podemos concluir que o processo de se retirar quadrados de retângulos áureos irá levar em uma seqüência infinita de retângulos áureos, cujas dimensões serão cada vez menores tendendo a zero.

Temos que os lados de um retângulo áureo são grandezas incomensuráveis. Supomos que seja o contrário, então teriam um submúltiplo y, e tomando como base a figura abaixo:



AD = (a+b)y e AB = ay

Com a e b números inteiros, portanto conseqüentemente os números da seqüência também seriam inteiros positivos, ou seja, teríamos um absurdo. Assim, temos que os lados de um retângulo áureo são incomensuráveis.

Construindo um retângulo áureo a partir de seu lado menor AE = a.

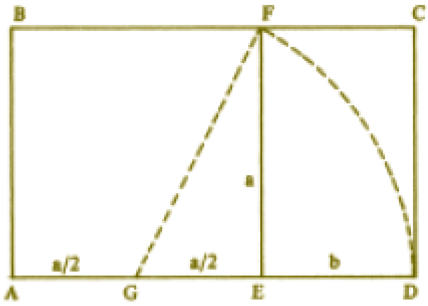


Figura 18

Constrói-se primeiramente EF = AE perpendicularmente a AE = a, com centro em G, ponto médio do segmento AE traçamos o arco FD onde D jaz na reta AE e E é interno ao segmento AD. Como GF = GD = b +a/2, o teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo retângulo GEF nos dá:

$$\left(b+\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Simplificando, obtemos a seguinte relação:

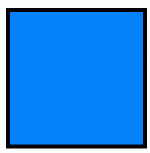
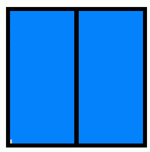
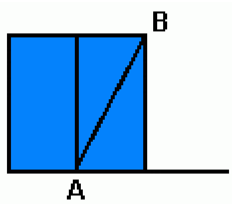
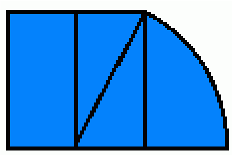
$$b^2 = ab = a^2.$$

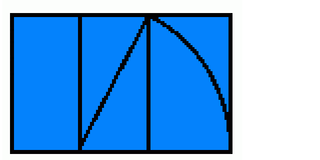
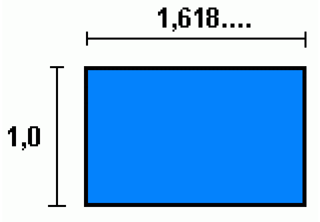
Equivalente a

$$\frac{a}{a+b} = \frac{b}{a}.$$

Logo, ABCD é um retângulo áureo.

E uma maneira mais simplificada de se construir o retângulo áureo é dada por:

Construa um quadrado de lado unitário;	
Divida um dos lados do quadrado ao meio;	
Trace uma diagonal do vértice A do último retângulo ao vértice oposto B e estenda a base do quadrado;	
Usando a diagonal como raio, trace um arco do vértice direito superior do retângulo à base que foi estendida;	

<table>
<tr>
<td>Pelo ponto de interseção do arco com o segmento da base trace um segmento perpendicular à base. Estenda o lado superior do quadrado até encontrar este último segmento para formar o retângulo;</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Este último é o retângulo Áureo!</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Seja um retângulo em que X é a medida do comprimento e Y é a medida da altura do mesmo. Vamos supor que existe uma relação "especial" entre X e Y tal que X:Y=Y:(X+Y). Numa proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos, logo:

$$X.(X+Y) = Y^2$$

e esta relação nos informa que Y é a média geométrica entre X e X+Y. Se calcularmos a razão entre Y e X obteremos Phi. O retângulo com estas dimensões é o retângulo áureo e os segmentos de medidas X e Y são os segmentos áureos. Tais medidas são usadas em testes para avaliar aspectos de beleza em gravuras ou objetos.

Agora, considerando um retângulo de lado a (menor) e b (maior). Traçando um segmento de reta que divida o retângulo formando um quadrado de lado a e um retângulo, de modo que obtenhamos que a razão b/a seja a razão áurea, ou seja, que o retângulo seja áureo. Continuando a fazer divisões com segmentos de reta no retângulo, que foi sendo obtido, estará sendo formada uma seqüência de quadrados disposta em espira logarítmica.

Espira logarítmica

A espira logarítmica é também chamada de eqüiangular, pois corta todos os raios vetores sob o mesmo ângulo é uma curva gerada por um ponto que caminha em torno de um pólo. O ponto se desloca no raio vetor em progressão geométrica, enquanto o raio polar gira em torno do pólo em progressão aritmética numa sucessão de ângulos iguais.

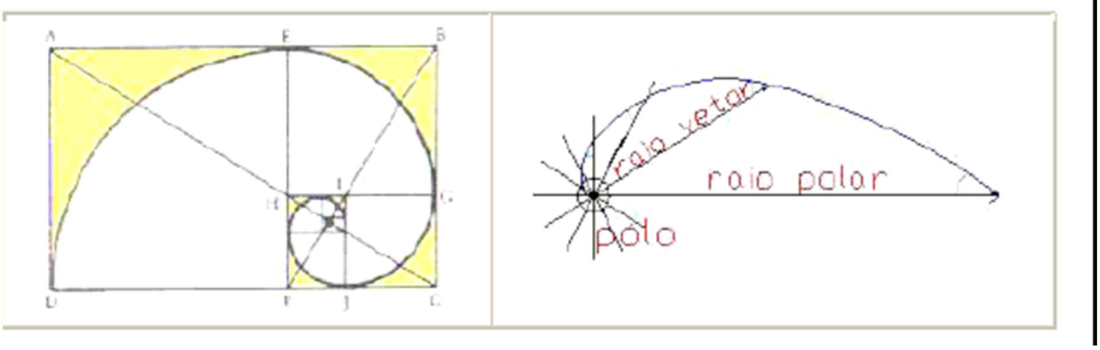


Figura 19

Da figura acima, notam-se as seguintes características:

O ponto limite O é chamado de pólo da espiral que passa pelas seções áureas D, E, G e T.

As diagonais AC e BF são mutuamente perpendiculares.

Os pontos E, O, J são colineares assim como G, O, D.

Os quatro ângulos retos do ponto O têm EJ e PG por bissetrizes.

AO/OB = OB/OC = CO/OF = ... Há um número infinito de triângulos similares, cada um igual à metade de um retângulo áureo.

Para se construir uma espira logarítmica podemos utilizar um retângulo dourado que, ao ser dividido por um segmento igual ao seu lado menor, nos fornece um retângulo áureo.

O processo é o seguinte:

1. Constrói-se um retângulo áureo ABCD;
2. Neste retângulo marcamos sobre BC um ponto F, de medida AB e traçamos uma perpendicular a BC, pelo ponto F;
3. o retângulo DCEF também é um retângulo áureo que dará origem ao retângulo EDGH;
4. repete-se o processo acima tantas vezes quanto for conveniente;
5. Com a ponta seca do compasso em E e abertura AE traça-se o arco AF e repete-se o processo para os demais quadrados obtidos;

A espiral conseguida é uma espiral logarítmica.

Pentagrama

Um pentagrama é também um caso no qual se percebe a utilização do número áureo.

No pentagrama, a insígnia que identificava os pitagóricos é um pentágono regular estrelado onde cada um dos cinco segmentos divide outras segundo esta razão, ou seja, o ponto de intersecção P de suas diagonais divide cada uma delas na proporção áurea. P divide AQ e AB internamente e QB externamente nessa proporção.

Para chegar a esta conclusão, no entanto, é necessário fazer uma análise parta o estudo do decágono regular.

Temos que a relação entre o lado do decágono regular, l_{10}, inscrito num círculo de raio R e a razão áurea ρ é dada por: $l_{10} = R\,\rho$.

Lema 1: Na figura abaixo seja

$\overline{AB}=\overline{OC}=m$, $\overline{OA}=\overline{OB}=a$, $\angle BAC=\alpha$ e $\angle AOB=\beta$.

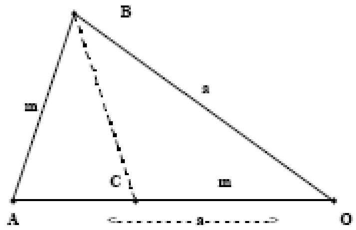


figura 2

Então as seguintes proposições são equivalentes:

(a) m é o valor áureo de a.

(b) Os triângulos ABC e AOB são semelhantes.

(c) O triângulo BCO é isósceles e $\alpha = 2\beta$.

Demonstração: De fato, mostremos que: (a) -> (b). Esta equivalência é trivial pois $\angle BAO = \angle CAB = \alpha$, => $m/a = (a - m)/m$ ou $\overline{AB}/\overline{AO} = \overline{CA}/\overline{AB}$

o que exprime a proporcionalidade dos lados adjacentes a α em ambos ABC e AOB e isto é equivalente a semelhança dos dois triângulos considerados.

(b) => (c)., De fato, como OAB é isósceles, ABC também o é, e consequentemente

$$\overline{BC} = m \ , \quad \overline{AB}=\overline{BC} = m \ ,$$

$$\angle ACB = \angle BAC = \angle ABO = \alpha \quad e \quad \angle AOC = \angle AOB = \beta.$$

Logo , BCO é isósceles e

$$\alpha = \angle ABO = \angle ABC + \angle CBO = 2\beta$$

(c) <=> (b)., De fato,

se BCO é isósceles, $\angle CBO = \beta$ e $\overline{BC}=\overline{CO}=m$.

Como

$$\alpha = 2\beta, \ \angle ABC = \angle ABO - \angle CBO = \alpha-\beta = \beta.$$

Então, pelo teorema do ângulo externo, aplicado a BCO temos que

$$\angle ACB = \angle CBO + \angle COB = 2\beta = \alpha.$$

Logo, os dois triângulos ABC e AOB têm ângulos correspondentes iguais, e consequentemente são semelhantes.

c.q.d.

Teorema 2: Seja m o valor áureo de R. Então m é o lado do decágono regular inscrito num círculo de raio R, i.e.,

$$\ell_{10} = R.((\sqrt{5} - 1)/2) = R.\rho.$$

Demonstração: De fato, Lema 1 (c) nos diz que na figura 1 a soma dos ângulos internos de ABC é 180 $=2\alpha+\beta = 5\beta$. Logo $\beta = 36$. Conseqüentemente m é o lado do decágono regular inscrito no círculo Γ (contendo A e B) de centro O e raio R.

RELAÇÃO ENTRE $\bullet_n$ e $\bullet_{2n}$

Seja agora ℓ_n o lado do polígono regular de n lados inscrito numa circunferência

Γ de raio R. Vamos a seguir, usando o teorema de Pitágoras, estabelecer uma relação entre ℓ_n e ℓ_{2n}.

Teorema 3: Seja $\ell = \ell_{2n}$ e $L = \ell_n$. Então

a) $\ell = (\sqrt{(2R - \sqrt{(4R^2 - L^2/R)}).R}$ e b) $L = (\ell/R).\sqrt{(4R^2 - \ell^2)}$

Demonstração: De fato, seja Γ a circunferência de diâmetro
$2R = \overline{BC}$ e seja

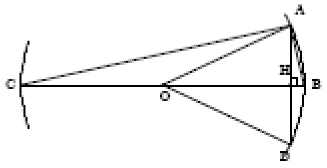


figura 3

$$\overline{AB} = \ell_{2n} = \ell \text{ e } \overline{AD} = \ell_n = 2.\overline{AH} = 2 L.$$

No triângulo retângulo ABC, temos as relações de Pitágoras

$$\overline{AH}^2 = \overline{BH}.\overline{CH} \text{ e } \overline{AB}^2 = \overline{BC}.\overline{BH}.$$

Assim

$$\overline{BH} = \overline{AB}^2 / \overline{BC}^2 = \ell^2/2R \text{ e}$$

$$\overline{CH} = \overline{BC} - \overline{BH} = 2R - \ell^2/2R = (4R^2 - \ell^2)/2R.$$

Logo

$$L^2 = 4\mathbf{AH}^2 = 4BH.CH = 4(\ell^2/2R).(4R^2-\ell^2)/2R = (\ell^2/R^2).(4R^2 - \ell^2).$$

Reciprocamente, seja dado L. A equação

$$L^2 = (\ell^2/R^2).(4R^2-\ell^2) \text{ implica que } R^2L^2 = 4R^2\ell^2 - \ell^4.$$

Logo

$$\ell^2 = 2R^2.\sqrt{(4R^4 - R^2L^2)} \text{ ou } \ell^2 T = R(2R - \sqrt{(4R^2 - L^2)}).$$

Estas raízes sempre existem pois como $L = \ell_n$ é uma corda, ele é sempre menor que o diâmetro 2R, ou seja $4R^2 > L^2$, e ,$4R^4 - R^2 L^2$, é sempre positivo. Nosso problema apresenta duas soluções; vamos eliminar uma delas. Comecemos observando que para ângulos entre 0°, e 180°, quanto maior o ângulo, maior o arco, como também maior é sua corda. Assim ℓ_n decresce a medida que n cresce pois o ângulo central do polígono é, $2\pi/n$. Como n é no mínimo 3, 2n é no mínimo 6, i.e., $\ell_{2n} < \ell_6 = R$. Por outro lado, para maior raiz da equação acima obtemos $\ell^2 = 2R^2 + R.\sqrt{(4R^2 - L^2)} > 2R^2$ o que é uma contradição. Daí segue-se que a escolha correta é a da raiz $\ell^2 = R(2R - \sqrt{(4R^2 - L^2)})$.

Observação 4: As fórmulas acima aplicam-se também aos polígonos estrelados $\ell_{n/2}$, i.e. , polígonos obtidos do polígono regular de n lados ligando-se seus vértices alternadamente .

Observação 5: Como,

$$\triangle AOD = 2\pi/n, \triangle AOB = \pi/n, \triangle AOK = \pi/2n,$$

temos, em virtude das relações trigonométricas nos triângulos retângulos OHA e OKA, que

$$L = 2.\overline{AH} = 2R.\text{sen}(\pi/n), \ell = 2./\overline{AH} = 2.R.\text{sen}(\pi/2n).$$

Nossas fórmulas traduzem a expressão de $\text{sen}(\pi/n)$ em função de $\text{sen}(\pi/2n)$ e vice versa:

$$\text{sen}(\pi/n) = 2.\sin(2\pi/2n).\cos(\pi/2n), \text{sen}^2(\pi/2n) = (1-\cos(\pi/n))/2$$

PENTÁGONO REGULAR

Agora temos resultados suficientes para calcularmos o lado de um pentágono regular inscrito num círculo . Apresentamos o seguinte teorema em [Eu] livro XIII, prop.10 :

Teorema 6: $\ell_5 = R(\sqrt{(10-2\sqrt{5})})/2 \approx 1.1755.R$ e $\ell_5^2 = \ell_6^2 + \ell_{10}^2$

Demonstração: De fato, sabemos que $\ell_6 = R$ e $\ell_{10} = R.\ \rho$, com $\rho^2 = 1-\rho$. Da demonstração acima (*) segue-se que:

$$R^2\ell_5^2 = 4R^2\ell_{10}^2 - \ell_{10}^4 = 4R^4\rho^2 - \rho^4R^4,$$

ou $$\ell_5^2 = (4\rho^2-\rho^4).R^2 = [4(1-\rho)-(2-3\rho)].R^2$$

ou $$\ell_5^2 = (2-\rho).R^2 \text{ ou ainda } \ell_5^2 = ((5-\sqrt{5})/2).R^2 = ((10-2\sqrt{5})/4).R^2$$

logo $$\ell_5 = (R/2)\sqrt{(10-2\sqrt{5})}\ .$$

Por outro lado

$$\ell_6^2 + \ell_{10}^2 = R^2(1+\rho^2) = (2-\rho)\ R^2 = \ell_5^2.$$

Logo

$$\ell_6^2 + \ell_{10}^2 = \ell_5^2$$

CONSTRUÇÃO DO PENTÁGONO REGULAR

Antes de apresentarmos o teorema que justifica a construção do pentágono regular atribuída a Ptolomeu, vamos demonstrar o seguinte lema auxiliar.

Lema 7: Na figura 5 seja $\overline{OC} = a = \overline{KM}$; $\overline{CH} = m$ e $\overline{KM} = \overline{MH} = \overline{OM} = a/2$. Então, as afirmações abaixo são equivalentes:

(a) Os triângulos OKC e OHC são semelhantes

(b) O triângulo MOC é retângulo

(c) $m = \rho\, a$

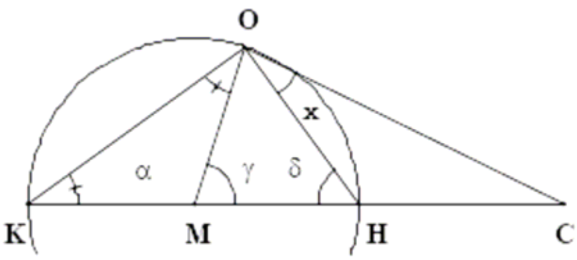


figura 5

Demonstração: De fato, mostremos primeiramente a equivalência

(b) => (c). De fato, o triângulo MOC é retângulo e

(c) $\overline{MC}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{OM}^2 \Rightarrow (m + a/2)^2 = a^2 + (a/2)^2 \Rightarrow m^2 + a\,m = a^2$ ou $m/a = (a-m)/m = \rho$.

Mostremos agora que (a)=> (b). De fato, como o triângulo KHO é retângulo, ele esta inscrito num semi-círculo e daí segue-se que o triângulo KMO é isosceles. Assim $\angle MKO = \angle KOM = \alpha$. Conseqüentemente MOC é retângulo implica que

$$\angle MOC = 90 = \angle MOH + x = \alpha + \angle MOH \quad \text{ou} \quad x = \alpha\ .$$

Daí OCK e HOC tem dois ângulos iguais ou OCK e HOC são semelhantes .

Teorema 8: Seja Γ uma circunferência de centro O e raio R e diâmetro $\overline{EA} = 2R$. Seja $C \in \Gamma$ eqüidistante de E e A, e M o ponto médio de OA. Seja $D \in EO$ tal que $\overline{DM} = 2.\overline{OM}$. Então $\ell_5 = \overline{CD}$ e $\ell_{10} = \overline{OD}$.

Demonstração: De fato, seja Γ' a circunferência de centro M e raio $\overline{OM}$ $=\overline{AM}=a/2$ e sejam H e K os pontos onde Γ' corta a reta $\ell(C,M)$. Ponhamos R=a e $\overline{OD}$ =m. Logo

$$\overline{MD} = \overline{OM} + \overline{OD} = \overline{CH} + \overline{HM} = R/2 + m\,.$$

Como

$$\overline{DC} = R = \overline{HK} \text{ e } \overline{OM} = \overline{MK} = \overline{MH}\,,$$

o triângulo HOK está inscrito em Γ'. Logo HOK é retângulo, assim como é também retângulo o triângulo COM; então estamos na situação do Lema 7 (b). Logo $m = \rho.a = \ell_{10}$. Agora do teorema 6 segue-se que

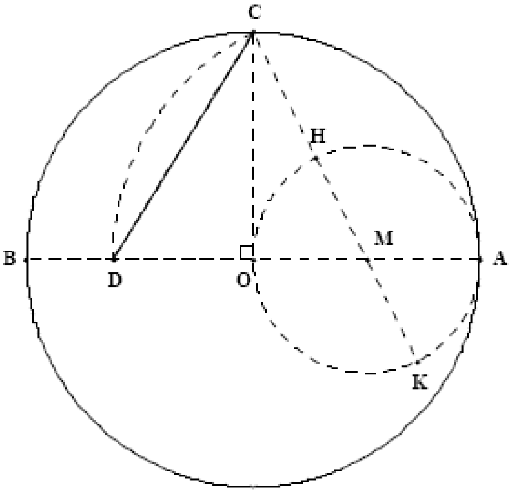


figura 6

$$\overline{CD}^2 = \overline{CO}^2 + \overline{OD}^2 = a^2 + m^2 = \ell_6^{\,2} + \ell_{10}^{\,2} = \ell_5^{\,2}.$$

Conseqüentemente $\overline{CD} = \ell_5$.

DIAGONAIS DO PENTÁGONO

Finalmente vamos estudar as diagonais do pentágono regular; elas são os lados dos polígonos estrelado $\ell_{5/2}$.

Teorema 9: Seja ABCDE um pentágono regular inscrito num círculo de raio R. (vide figura 7). Então:

1) O pentágono FGHIJ é regular e seu lado vale

$$\overline{FG} = \rho^2 \ \ell_5 = R.(5+\sqrt{5})/2$$

2) $\overline{AB} = \overline{AG} = \ell_5$ é o valor áureo de $\overline{AC} = \ell_{5/2}$; também os seguintes segmentos

GC, AF, KL, KM, BK, e ML

são os respectivos valores áureos dos segmentos

CF, AG, BL, KI, BM, e KL

3) $\ell_{5/2} = \overline{AC} = (R/2)\sqrt{(10+2\sqrt{5})}$

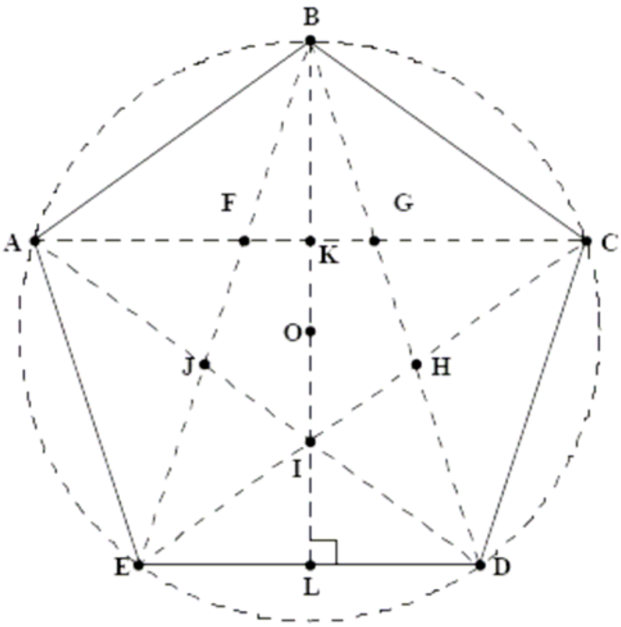


figura 7

Demonstração: De fato, como as retas

$\ell(A,O)$, $\ell(B,O)$, $\ell(C,O)$, $\ell(D,O)$ e $\ell(E,O)$

são eixos de simetria do pentágono ABCDE, elas são mediatrizes dos respectivos lados opostos, e assim elas contém

H, I, J, F e G respectivamente,

e são mediatrizes dos respectivos segmentos

JF, FG, GH, HI e IJ.

conseqüentemente o polígono FGHIJ é invariante por rotações de centro O e de ângulos múltiplos de 72°. Logo, o polígono FGHIJ é regular.

Vamos verificar

(2). Seja

$$\alpha = 72^\circ \ , \ \beta = 108^\circ \ \text{e} \ \gamma = 36^\circ.$$

Temos que

$$\angle ABC = \angle AFB = \angle JFG = \angle FGH = \beta \ \text{e} \ \angle BFG = \angle BGF = \alpha.$$

Logo,

$$\angle FBG = 180^\circ - 2\alpha = \Gamma$$

e por simetria $\overline{GB} = \overline{CG}$, ou seja GBC e FAB são isósceles. Como

$$\angle KBC = ½ .\angle BCA = ½.\beta = 54^\circ$$

temos que seu ângulo complementar em BKC é

$\angle ACB = 36^\circ$ e $\angle BCA = \angle BAC = 36^\circ = \angle GBC = \angle ABF = \gamma$.

Logo o triângulo FBC é isósceles pois $\angle FBC = \angle BFC = \alpha$ e daí segue-se que

$$\overline{AB} = \overline{AG} = \overline{CF} = \overline{BC} = \ell_5$$ e

também

$$\overline{AF} = \overline{BF} = \overline{GB} = \overline{CG} .$$

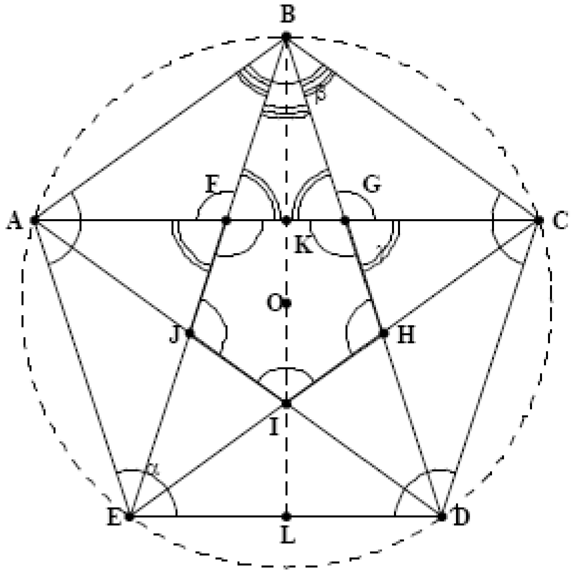


figura 8

Se pusermos $\overline{FC} = a$ e $\overline{BG} = m$, estamos na situação do lema 1 (c). Logo m é o valor áureo de a e

$$\overline{FG} = a - m = m\,\rho = \rho(\rho\, a) = \rho^2 a = \rho^2\, \ell_5.$$

Como

$$\overline{AC} = \overline{AG} + \overline{GC} = a + m, \ \overline{AG} = a \ \text{é o valor áureo de } a+m = \overline{AC} \ ,$$

ou seja

$$\rho\, \ell_{5/2} = \ell_5 \ \text{e} \ \ell_5 \ \text{é o valor áureo de} \ \ell_{5/2}.$$

As outras afirmações seguem-se do fato de que K, M e L são as respectivas projeções ortogonais sobre a reta ℓ(I,B) dos pontos G , H e D, e de que a razão áurea se mantém por projeção.

$\tau=(\sqrt{5}\ +1)/2\ \approx 1.618...$ então: $\tau^2 = 1 + \tau$, $\tau.\rho = 1$, $\tau\text{-}\rho=1$.

Se $d = \ell_{5/2}$ e $\ell = \ell_5$, teremos: $d = \tau\ \ell$, $\ell = \rho\ d$.

e também

$\overline{BK}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AK}^2 = \ell^2 - d^2/4 = (4-\tau^2/4)$.

$\ell^2=((2-\rho)/4).\ell^2$, $\overline{BK} = (2-\rho).R/2$

.

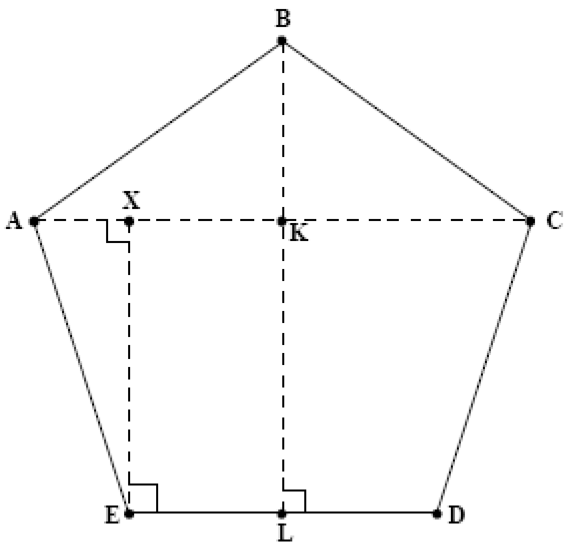


figura 9

Vamos calcular

$\overline{LK} = \overline{EX}$ (figura 9) temos $\overline{LK}^2 = \overline{EX}^2 = \overline{AE}^2 - \overline{AX}^2$

como

$\overline{AX} = \overline{AK} - \overline{XK} = \overline{AK} - \overline{EL} = 1/2\ (\overline{AC} - \overline{ED})$,

temos

$\overline{LK}^2 = \overline{AE}^2 - ((/\ \overline{AC} - \overline{ED})/2)^2 = \ell^2 - ((d-\ell)/2)^2$

$= (\ell^2/4).[4 - (1 - \tau)^2] = \ell^2(2 + \tau)/4 =$

$= r^2(2 + \tau)(2 - \rho)/4 = 5.R^2/4$

$\overline{LK} = R.(\sqrt{5})/2 = (2\rho + 1/2).R$

Assim

$\overline{BL} = \overline{BK} + \overline{KL} = [(2 - \rho)/2 + (2\rho+1)/2].R = ((\rho+3)/2).R$ ou $\overline{EL}$

$\overline{BL} = ((\tau\sqrt{5})/2).R$

Deixamos para o leitor a verificação que através do Teorema 3 (b) que

$\ell_{5/2} = (R/2).\ \sqrt{(10+2\sqrt{5})}$,

como também que

ℓ_5 e $\ell_{5/2}$ são as raízes positivas de $x^4 - 5a^2x^2 + 5a^4 = 0$.

Finalmente, aplicando as fórmulas da observação 6, no caso onde R = 1, teremos:

1. No caso do decágono regular $\ell_{10} = \rho$ e daí segue-se que

$$\text{sen}18° = \rho/2 = \cos 72° = (\sqrt{5}-1)/4 \approx 0.31$$

2. No caso do pentágono regular

$$\text{sen}36° = \cos 54° = ½\ .\sqrt{((5-\sqrt{5})/\ 2)} = \sqrt{((10-2\sqrt{5})/\ 4)} \approx 0.6$$

e um cálculo direto nos fornece:

$$\cos 18° = \text{sen}72° = \sqrt{((10+2\sqrt{5})/4)} \approx 0.95 \quad \text{e} \quad \cos 36° = \text{sen}54° = \delta/2 = (\sqrt{5}+1)/4 \approx 0.8$$

A série de Fibonacci e o número áureo

A seqüência de Fibonacci é dada por:
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...
e os termos desta seqüência são denominados números de Fibonacci. Pode-se tomar a definição desta seqüência para todo n natural, como:

$$u(1)=1, \quad u(2)=1$$
$$u(n+1) = u(n-1) + u(n)$$

Esta seqüência não é limitada superiormente, mas existe um fato interessante: Tomando as razões (divisões) de cada termo pelo seu antecessor, obtemos uma outra seqüência numérica cujo termo geral é dado por:

$$f(n)=\frac{u(n+1)}{u(n)}$$

que é uma seqüência limitada. Se considerarmos a seqüência de Fibonacci como um conjunto da forma {1,1,2,3,5,8,13,...) e a divisão de cada número pelo seu antecessor, obteremos outra seqüência:
1/1=1, 2/1=2, 3/2=1.5, 5/3=1.666..., 8/5=1.6, ...

É fácil perceber o que ocorre quando colocamos estas razões sucessivas (alturas) em um gráfico em que o eixo horizontal indica os elementos da seqüência de Fibonacci:

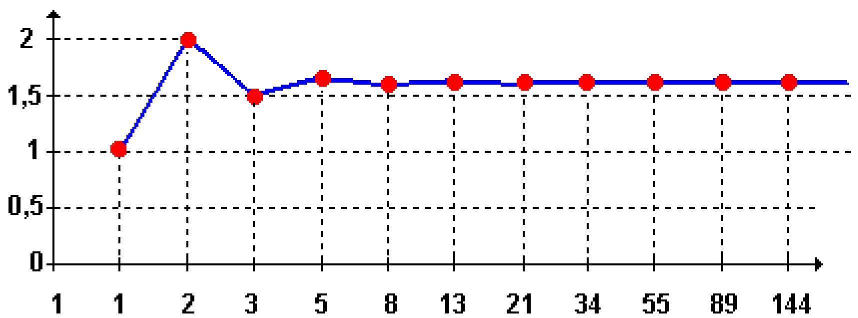


Figura 20

As razões vão se aproximando de um valor particular, conhecido como Número de Ouro (Número Áureo), que é frequentemente representado pela letra grega *Phi*
Quando n tende a infinito, o limite é exatamente Phi, o número de ouro.

$$\text{Phi} = \phi = \text{Lim} \frac{u(n+1)}{u(n)} =1.618033988749895$$

Aplicações

Vemos aplicações do número áureo desde a Antigüidade.
No Egito Antigo, em várias partes podia ser visto essa sua aplicação.
Muitos hieroglíficos têm proporções baseadas na razão áurea.

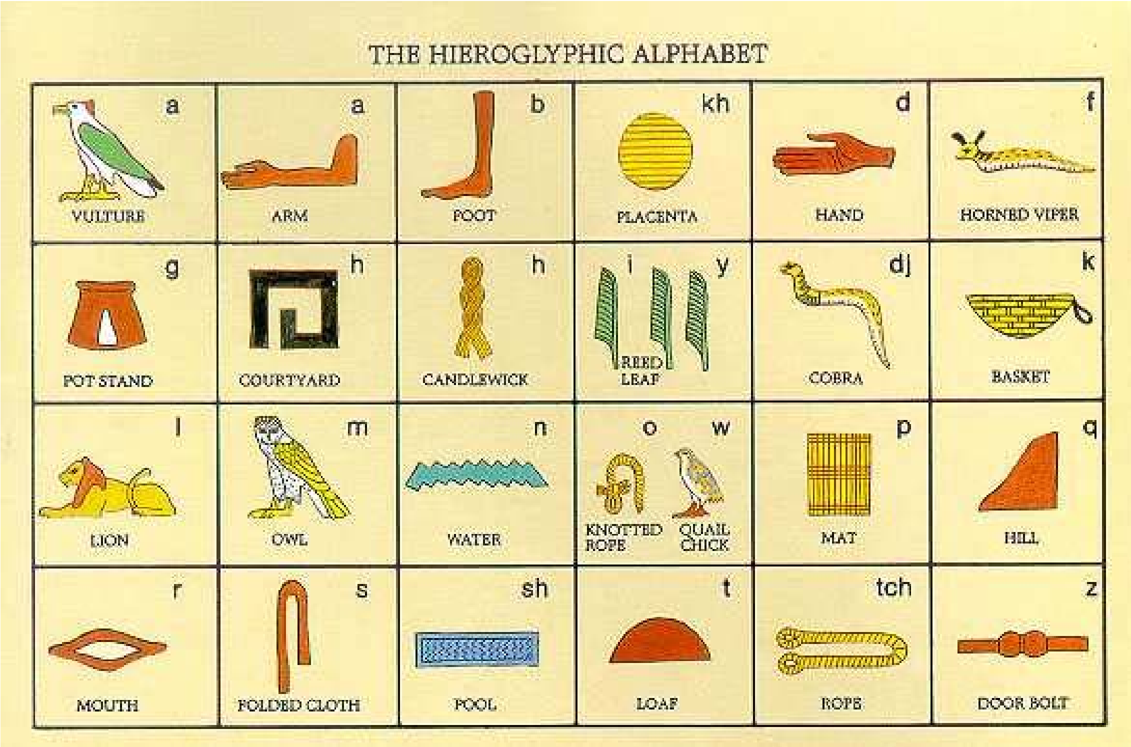


Figura 20

Na figura acima, vemos que a letra h é na verdade uma espira dourada. O uso da mão e pé como hieroglíficos mostra que os egípcios eram cuidadosos com o corpo como proporcional à razão áurea. Outros símbolos, como o p, e sh, são retângulos áureos. Os egípcios usavam a razão áurea em sua escrita para tornar mais fácil para aqueles que escrevessem o fazer com a mesma proporção.

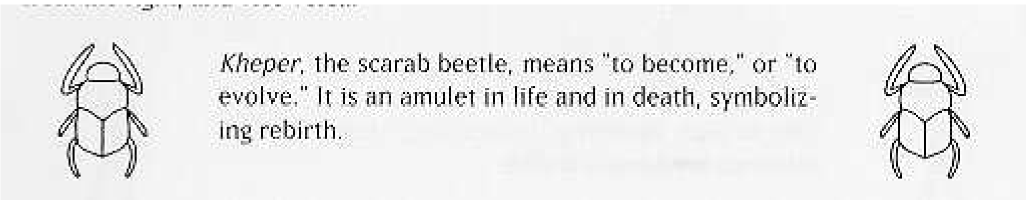


Figura 21

O escaravelho é um importante símbolo no Egito. Ele pode ser redesenhado em um retângulo áureo. Se as linhas são desenhadas a partir do centro do inseto, o retângulo pode ser dividido.

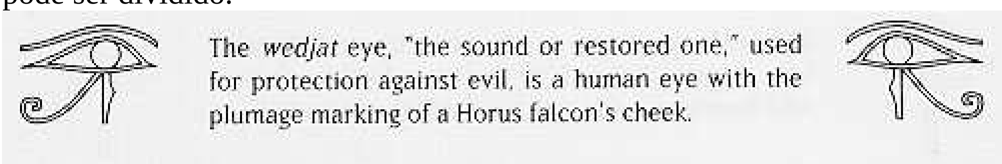


Figura22

O olho de Rá é um importante símbolo dos egípcios antigos. Ele simboliza o rei sol Rá, o mais importante de seus deuses. Ele pode ser visto nos sarcófagos dos mortos. O olho pode ser redesenhado como um retângulo áureo.

Durante grande parte da história egípcia, as proporções do desenho humano foram relacionadas com as linhas da palma da mão. essas medidas eram baseadas em uma razão divina, mais tarde denominada de razão áurea.

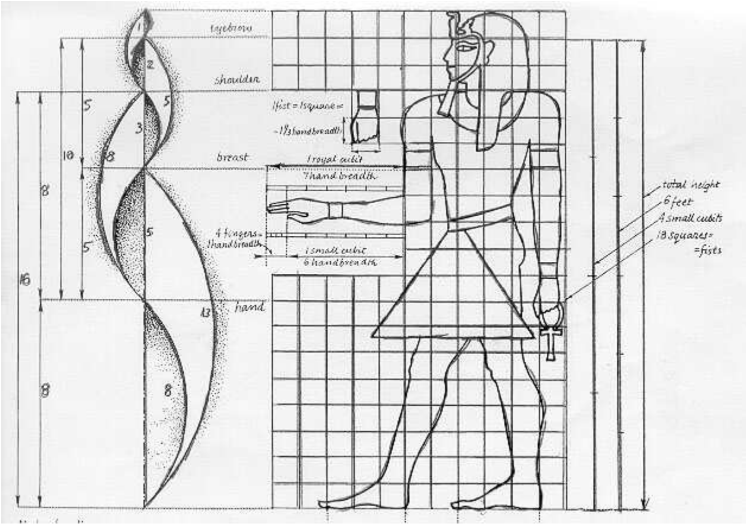


Figura 23

No desenho acima, vemos que usavam medidas baseadas no comprimento do corpo por serem proporcionais à razão áurea. Isto fazia suas obras de arte ficarem mais bonitas olhadas rapidamente.

O trabalho a mão era muito importante na arte egípcia. A seguir, tem-se alguns exemplos de diferentes posições na arte egípcia e o posicionamento está baseado na razão áurea.

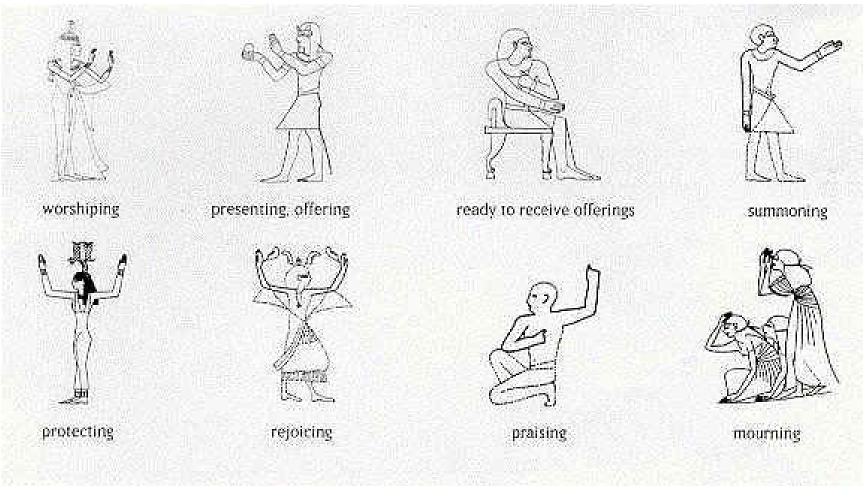


Figura 24

Na figura acima, temos que do pé até a cabeça, está uma altura de 18 palmos, a face mede 2 palmos. Os ombros estão alinhados em 16 palmos da base da figura.

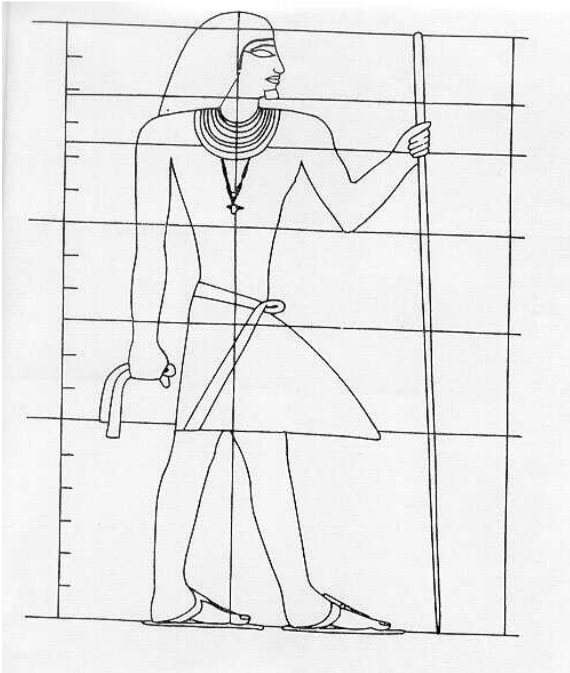


Figura 25

Vemos que muitos dos retângulos desenhados são proporcionais aos retângulos áureos.

A razão áurea também se mostra presente nos templos egípcios.

Figura 26

No templo de Dendur acima, vemos que os arcos do tempo estão alinhados para formar retângulos decrescentes que são proporcionais à razão áurea.

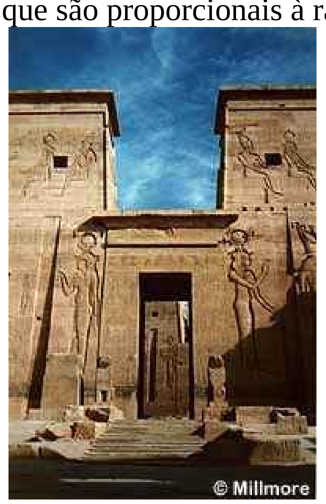


Figura 26

Philae no Egito Antigo definia o limite sudoeste do Egito. O templo era dedicado à deusa Isis. O templo também mostra retângulos áureos em sua entrada, como no templo de Dendur.

No entanto, o maior exemplo da aplicação se encontra nas pirâmides egípcias, e obedecem à razão áurea. Isto será demonstrado abaixo.

Temos que um triângulo é áureo, se e somente se, um triângulo retângulo de catetos b e c, com b>c, satisfaz:

$$\frac{b}{c} = \sqrt{\lambda} = 1{,}272\ldots.$$

Seja dada a pirâmide abaixo:

Figura 27

Considerando uma pirâmide reta de altura h com base quadrada de lado a e seja H a altura de suas faces. Dizemos que a pirâmide é áurea quando o triângulo de lados H, h e a/2 for um triângulo áureo.

O historiador grego Heródoto afirma que as pirâmides obedecem a seguinte propriedade: a área de cada face triangular é igual à área de um quadrado cujo lado é altura da pirâmide.

Então temos que esta pirâmide satisfaz a condição se

$$\frac{aH}{2} = h^2.$$

Temos que uma pirâmide satisfaz a condição da propriedade se, e somente se, for uma pirâmide áurea.

A demonstração é dada por:

Supondo em primeiro lugar que a pirâmide é áurea, isto é, que o triângulo retângulo com hipotenusa H e catetos h e a/2 é áureo.

Temos:

$$h = \frac{a}{2}\sqrt{\lambda}, \quad H = \frac{a}{2}\lambda$$

$$h = \frac{a}{2}H = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \lambda = \left(\frac{a}{2}\sqrt{\lambda}\right)^2,$$

E a pirâmide satisfaz a propriedade.

De forma recíproca, supondo que a pirâmide satisfaça as propriedades, temos que

$$H^2 = h^2 + \frac{a^2}{4} \quad \text{e} \quad aH = 2h^2$$

$$H^2 = h^2 + \frac{a^2}{4} = h^2 + \frac{4h^4}{4H^2},$$

$$\left(\frac{H}{h}\right)^4 = \left(\frac{H}{h}\right)^2 + 1.$$

$$\left(\frac{H}{h}\right)^2 = \lambda \quad \text{ou} \quad \left(\frac{H}{h}\right) = \sqrt{\lambda}.$$

$$h\frac{2}{a} = \frac{H}{h} = \sqrt{\lambda}$$

E o triângulo é áureo.

As dimensões das pirâmides de Quéops, Quéfren (ambas de bases quadradas) e Miuerinos (base retangular), são dadas por:

	Quéops	*Quéfren*	*Miquerinos*
Altura da pirâmide	146,59	143,50	65,00
Dimensões da base	230,33 × 230,33	215,20 × 215,20	102,20 × 104,60

Para Quéops, temos:

$$\frac{2h}{a} = \frac{2 \times 146{,}59}{230{,}33} = 1{,}272.$$

Que resulta que Quéops é áurea.

Para Quéfren, vem que:

$$\frac{2h}{a} = \frac{2 \times 146{,}50}{215{,}20} = 1{,}333,$$

Então Quéfren não é áurea e o mesmo vale para Miquerinos por ser uma pirâmide de base retangular.

Na Grécia Antiga, também foi muito utilizado.

Construído muitas centenas de anos depois(entre 447 e 433 a. C.) , o Partenon Grego , templo representativo do século de Péricles contém a razão de Ouro no retângulo que contêm a fachada (Largura / Altura), o que revela a preocupação de realizar uma obra bela e harmoniosa. O escultor e arquiteto encarregado da construção deste templo foi Fídias. A designação adotada para o número de ouro é a inicial do nome deste arquiteto - a letra grega Phi

Figura 28

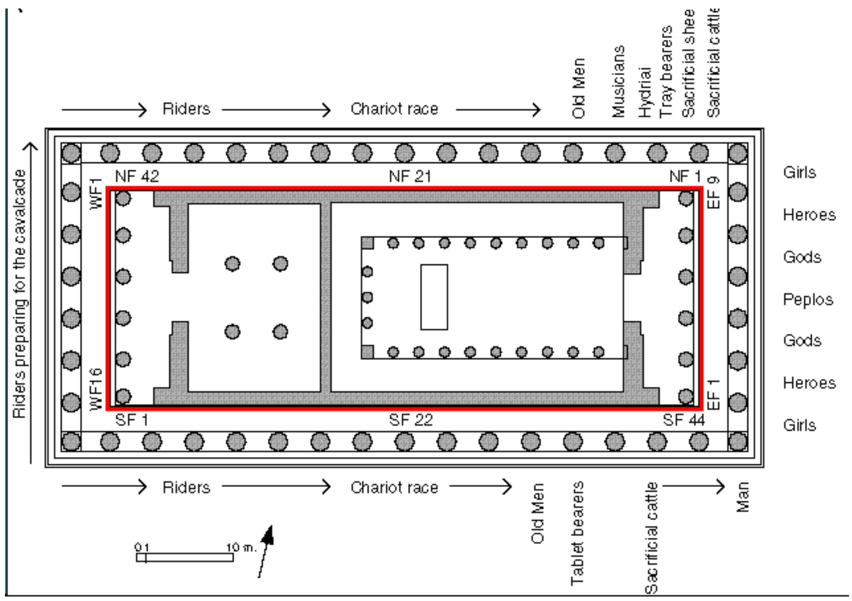


Figura 30

Os Pitagóricos usaram também a secção de ouro na construção da estrela pentagonal.

Não conseguiram exprimir como quociente entre dois números inteiros, a razão existente entre o lado do pentágono regular estrelado (pentáculo) e o lado do pentágono regular inscritos numa circunferência. Quando chegaram a esta conclusão ficaram muito espantados, pois tudo isto era muito contrário a toda a lógica que conheciam e defendiam que lhe chamaram irracional.

Foi o primeiro número irracional de que se teve consciência que o era. Este número era o número ou secção de ouro apesar deste nome só lhe ser atribuído uns dois mil anos depois.

Posteriormente, ainda os gregos consideraram que o retângulo cujos lados apresentavam esta relação apresentava uma especial harmonia estética que lhe chamaram retângulo áureo ou retângulo de ouro, considerando esta harmonia como uma virtude excepcional.
Endoxus foi um matemático grego que se tornou conhecido devido à sua teoria das proporções e ao método da exaustão, criou uma série de teoremas gerais de geometria e aplicou o método de análise para estudar a secção que se acredita ser a secção de ouro.

Tem destaque também a época do Renascimento, em especial com DaVinci. A excelência dos seus desenhos revela os seus conhecimentos matemáticos bem como a utilização da razão áurea como garante de uma perfeição, beleza e harmonia únicas.
É lembrado como matemático apesar da sua mente irrequieta não se concentrar na aritmética, álgebra ou geometria o tempo suficiente para fazer uma contribuição significativa. Representa bem o homem tipo da renascença que fazia de tudo um pouco sem se fixar em nada. Leonardo era um génio de pensamento original que usou exaustivamente os seus conhecimentos de matemática, nomeadamente o número de ouro, nas suas obras de arte. Um exemplo é a tradicional representação do homem em forma de estrela de cinco pontas de Leonardo, que foi baseada nos pentágonos, estrelado e regular, inscritos na circunferência.

Da Vinci a chamava: *Divina Proporção* e a usou em muitos de seus trabalhos. Na Monaisa observa-se a proporção Áurea em várias situações. Por exemplo, ao construir um retângulo em torno de seu rosto, veremos que este possui a proporção do retângulo Áureo. Podemos também subdividir este retângulo usando a linha dos olhos para traçar uma reta horizontal e ter de novo a proporção Áurea. Podemos continuar a explorar tal proporção em várias outras partes do corpo. Artistas têm usado a razão de ouro (medida de Ouro) em trabalhos de pintura e arte. Os trabalhos de Seurat e Mondrian mostram estas relações matemáticas.

Figura 29

Na biologia podemos ver aplicações do número áureo.

O modelo de procriação dos coelhos proposto por Fibonacci é muito distante da realidade e não podemos considerá-lo um bom exemplo de como podemos achar a razão áurea na natureza. A botânica, sim, está cheia de exemplos. Vamos dar uma olhada em alguns.

As folhas ao longo de um ramo de uma planta ou os galhos em torno do caule tendem a crescer em uma posição que otimize sua exposição ao sol, à chuva e ao ar. As folhas não crescem uma acima da outra, pois isso prejudicaria as folhas de baixo. É por isso que é mais comum vermos uma distribuição espiralada.

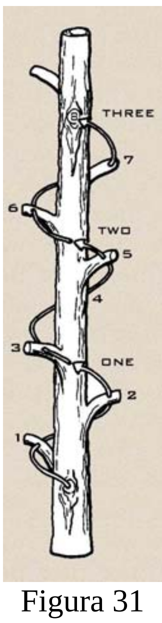


Figura 31

Por exemplo, em uma tília as folhas ocorrem, geralmente, em lados opostos (correspondendo a uma meia volta em torno do caule) e, portanto, sua razão filotáctica é 1/2 (filotaxia é o nome dado à disposição das folhas e dos galhos de uma planta). Em outras plantas, como a avelã, cassis e faia, a passagem de uma folha para outra corresponde a um terço de volta, ou seja, razão filotáctica de 1/3. Já a macieira, o carvalho e o damasco possuem 2/5 de razão filotáctica, ao passo que a pereira e o salgueiro-chorão possuem uma razão de 3/8 como a da figura. Note que as frações são todas razões entre os termos alternados da sequência de Fibonacci

Le modulor

Desenvolvido pelo arquiteto francês Le Corbusier, é a relação de medidas baseadas na divisibilidade do corpo humano em proporção harmônica.

A partir da altura máxima de ocupação de espaço pelo corpo humano (deste até o chão às pontas dos dedos com o braço levantado), e da metade dessa altura (até o plexo solar) criou duas séries de valores em relação áurea. Essas séries foram obtidas a partir da divisão harmônica desses comprimentos, que constituem uma gama de medidas humanas.

Nas séries estabelecidas a partir do plexo solar (a que chamou série vermelha) o termo que lhe sucede imediatamente coincide com a altura do homem (175 ou 183). O termo principal da séries azul, altura do homem com o braço levantado (216 ou 226), coincide com a adição dos três termos principais da série vermelha. Pela combinação dos termos principais das duas séries obtêm-se os valores de ocupação do corpo humano.

A princípio, Le Corbusier partiu da estatura média do homem da Europa (175) para determinar os valores numéricos dos vários comprimentos. Os valores inferiores assim encontrados foram para a série vermelha. Os valore exatos pela divisão harmônica foram depois arredondados tendo-se assim obtidos os chamados valores de aplicação.

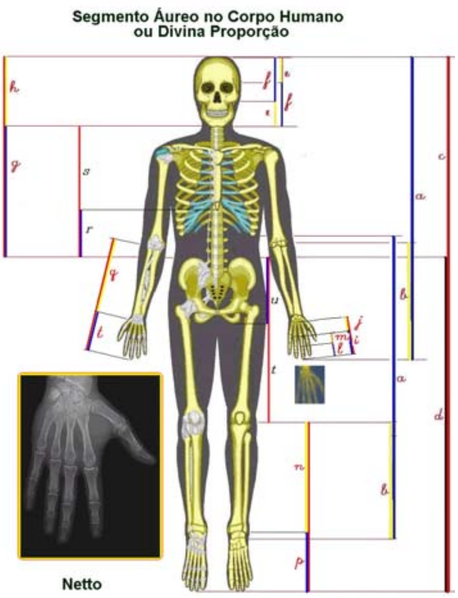


Figura 32

E, de uma forma geral as seções áureas no corpo humanas estão representadas a seguir:

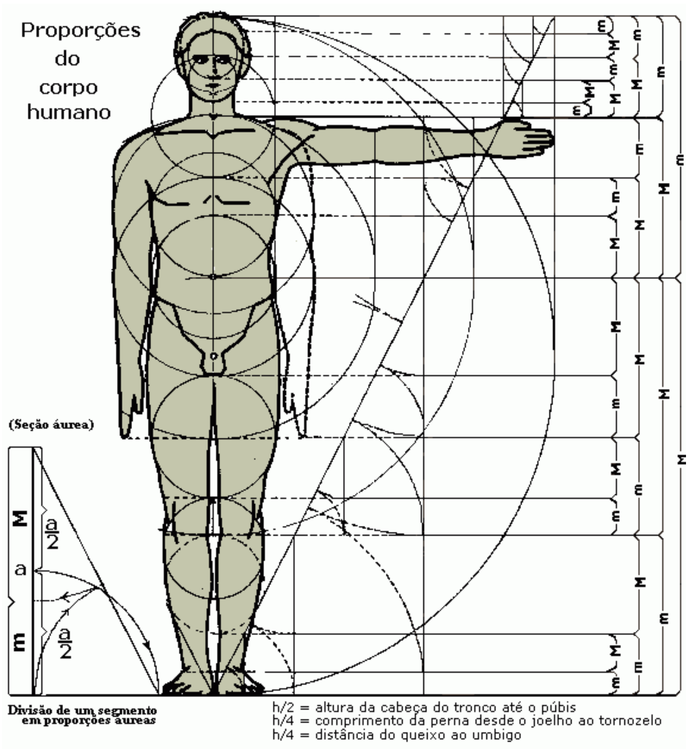


Figura 33

Conclusão

Vemos a importância da razão áurea no desenvolvimento da humanidade, seja nas construções, nas observações da natureza ou na procura pela perfeição e pelo belo, o número phi está sempre presente.

Ainda hoje ele se faz presente nos estudos e desenvolvimentos de novos produtos que comumente seguem a razão áurea para que sejam visualmente atrativos.

Torna-se, no entanto, difícil separar a eterna procura por relações com as divindades, iniciada pelos gregos, com relações matemáticas concretas. Em muitas situações, resultam em respostas não muito claras.

No entanto, é necessário analisar e considerar o phi com muita profundidade, pois um valor que nos acompanha com tanta constância tem sua importância e relevância. Também é certo que se precisa ter um cuidado redobrado para que não se encontre relações onde não haja.

A incontestável presença da razão áurea na vida cotidiana já a coloca em motivo de pesquisa. Quando se liga a tais questionamentos ela se torna ainda mais importância, enigmática e fascinante.