

# **Apostila de Cálculo II**

**Notas de Aula**

**Diego Sebastián Ledesma**

**Atualizado: 03/08/2025**

Em elaboração

The structure of the book is a modification of the "Legrange Orange Book" which is a Latex template model obtained at [LaTeXTemplates.com](http://LaTeXTemplates.com) as and licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License ( <http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0> ).

# Conteúdo

1	Apresentação .....	5
---	--------------------	---

## I

## Derivação

2	Funções de várias variáveis .....	9
3	Limites e continuidade .....	21
3.1	Limites ao longo de curvas .....	30
4	Derivação e Derivadas parciais .....	37
5	Regra da cadeia .....	45
6	Derivadas direcionais e vetor gradiente .....	53
7	Planos tangentes e aproximações lineares .....	59
8	Valores máximos e mínimos .....	67
9	Multiplicadores de Lagrange .....	75

## II

## Integração

10	Integrais sobre regiões do plano .....	81
11	Integrais sobre regiões do espaço .....	99

12	Mudança de variáveis em integrais .....	111
13	Integrais duplas em coordenadas polares .....	121
14	Integrais triplas em coordenadas cilíndricas .....	127
15	Integrais triplas em coordenadas esféricas .....	131
16	Integral ao longo de curvas .....	135
17	Superfícies parametrizadas .....	145
18	Integrais de superfície .....	151

### III

## Cálculo Vetorial

19	Campos vetoriais .....	159
20	Integrais de linha de campos vetoriais .....	167
21	Integrais de superfície de campos vetoriais .....	175
22	Rotacional e Divergente .....	183
23	Operadores em coord. cilíndricas e esféricas .....	195
23.1	Coordenadas Cilíndricas .....	195
23.2	Coordenadas Esféricas .....	202
24	Teorema de Green .....	209
25	Teorema de Stokes .....	223
26	Teorema da divergência .....	231

### IV

## Aplicações

27	Aplicações .....	241
27.1	Aplicação 1: Método do gradiente descendente .....	241
27.2	Aplicação 2: Teoria de probabilidade .....	244
27.3	Aplicação 3: Fluxo de um campo através de uma superfície .....	246
27.4	Aplicação 4: Lei de Gauss de campo elétrico. ....	248
27.5	Aplicação 5: Identidades de Green. ....	250
27.6	Aplicação 6: Lei de conservação de massa e de momento .....	253

# 1. Apresentação

Este material é um rascunho inicial de uma apostila de Cálculo II, feito a partir das anotações que usei nas aulas quando ministrei a disciplina. A ideia é, no futuro, reunir teoria e exercícios resolvidos de forma clara e acessível para quem está começando. Por enquanto, consegui preparar apenas uma parte da parte teórica.

As principais referências utilizadas foram: seguintes livros:

- GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de cálculo*, vol. 1 e 2. 5.ed. Rio de Janeiro, LTC, 2001.
- LEITHOLD, L. *O cálculo com geometria analítica*, vol. 1 e 2. 3.ed. São Paulo, Harbra, 1994.
- MARSDEN, J. E e TROMBA, A. J. *Cálculo vetorial* 3a edição. Addison-Wesley Iberoamericana, 1991.
- PISKUNOV, N. *Cálculo diferencial e integral*, vol. 2. 10.ed. Moscou: Mir, 1983.
- SPIVAK, M. *Calculus* 4th ed, 2008.
- STEWART, J. *Cálculo*, vol.1 e 2. 5a. ed. São Paulo, Cengage Learning.

Além disso, em alguns tópicos e curiosidades históricas, busquei informações complementares na internet, principalmente em sites como o Mathematics Stack Exchange e a Wikipedia.

A revisão de ortografia e estilo foi feita com o auxílio do ChatGPT.

Em elaboração

# Derivação

2	Funções de várias variáveis .....	9
3	Limites e continuidade .....	21
3.1	Limites ao longo de curvas	
4	Derivação e Derivadas parciais .....	37
5	Regra da cadeia .....	45
6	Derivadas direcionais e vetor gradiente	53
7	Planos tangentes e aproximações lineares	59
8	Valores máximos e mínimos .....	67
9	Multiplicadores de Lagrange .....	75

Em elaboração

## 2. Funções de várias variáveis

Na modelagem de problemas, o observável que queremos quantificar pode depender de mais de uma medida ou variável.

- **Exemplo 2.1** • A posição de um objeto no planeta terra em função da "latitude" e "longitude". Neste caso, a posição do ponto estará determinada por um par  $(x, y)$ . Por exemplo, podemos pôr um termômetro em cada par  $(x, y)$  e medir a temperatura, então teremos, para cada  $(x, y)$  uma medição da temperatura  $T(x, y)$ . Obtemos assim uma função que a cada ponto sobre a terra nos retorna um valor. Por exemplo

$$T(x, y) = 30 - 0.02x^2 + 0.01y$$

por exemplo,

$$T(40, 60) = 30 - 0.02 \cdot 40^2 + 0.01 \cdot 60 = 30 - 0.02 \cdot 1600 + 0.6 = 30 - 32 + 0.6 = -1.4$$

- O lucro na venda de um produto. Se produzimos  $n$  unidades de um produto e os vendemos a um preço  $p$ , com um custo de produção dado por uma função  $C(n)$  então o lucro será uma função da forma

$$L(x, p) = p \cdot n - C(n).$$

- Podemos mensurar a eficácia  $E$  de um medicamento pode depender de duas variáveis, em função da dose  $d$  e do tempo  $t$ . Temos assim uma função de eficácia

$$E(t, d) = 50 \cdot \frac{d}{t+1} - 0.1t^2$$

Por exemplo

$$E(100\text{mg}, 5\text{hs}) = 50 \cdot \frac{100}{5+1} - 0.1 \cdot 5^2 = 50 \cdot \frac{100}{6} - 0.1 \cdot 25 = 833.33 - 2.5 = 830.83$$

- O crescimento de populações pode ser descrito como uma função do tempo  $t$  e dos recursos disponíveis  $r$ , portanto, teremos uma função

$$P(t, r).$$

- O custo da energia elétrica em alguns lugares pode depender da quantidade de energia consumida  $K$  e do tempo de uso  $t$ , como por exemplo

$$C(k, t) = k \cdot p(t),$$

onde  $p(t)$  é o preço variável por hora.

■

Para lidar com este tipo de situações e poder, de alguma forma "calcular" para ver resultados, precisamos estender os conceitos que aprendimos em Cálculo I, isto é, precisamos estender os conceitos de, limite, continuidade, derivada e integral para funções com mais de uma variável.

Começamos então definindo mais precisamente o nosso objeto de estudo, isto é as funções com varias variáveis.

**Definição 2.1** O conjunto  $\mathbb{R}^k$  é o conjunto obtido ao fazer  $k$  produtos cartesianos de  $\mathbb{R}$ , isto é,

$$\mathbb{R}^k = \{(x_1, \dots, x_k), x_i \in \mathbb{R} \text{ para todo } i = 1 \dots k\}.$$

Se  $x \in \mathbb{R}^k$  então  $x = (x_1, \dots, x_k)$  em que cada  $x_i \in \mathbb{R}$  para  $i = 1 \dots k$ . Cada  $x_i$  é chamado de  $i$ -ésima coordenada do ponto  $x$ .

**Obs.**

Em particular, se  $k + l = n$  identificamos

$$\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l = \mathbb{R}^n$$

**Definição 2.2** Seja  $k, n \in \mathbb{N}$ .

- Uma **relação**  $R$  de  $U \subset \mathbb{R}^k$  em  $\mathbb{R}^n$ , que denotamos por  $R : U \sim \mathbb{R}^n$ , é um subconjunto

$$R \subset U \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{k+n}$$

O **domínio da relação**  $R$  é o conjunto

$$\text{Dom}(R) = \{x \in U \subset \mathbb{R}^k, \exists y \in \mathbb{R}^n, (x, y) \in R\} \subset U$$

A **imagem da relação**  $R$  é o conjunto

$$\text{Img}(R) = \{y \in \mathbb{R}^n, \exists x \in \mathbb{R}^k, (x, y) \in R\} \subset \mathbb{R}^n$$

- Uma **função**  $f : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma relação  $f : U \sim \mathbb{R}^n$  tal que

- $\text{Dom}(f) = U$
- $(x, y), (z, y) \in f$  então  $x = z$ .

Em particular, se  $f$  é uma função e  $(x, y) \in f$  denotamos por  $f(x) = y$ . O **gráfico da função**  $f$  é o conjunto da relação, isto é

$$\text{Graf}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n, (x, y) \in f\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n, f(x) = y\}$$

Cada elemento  $x \in \mathbb{R}^k$  se escreve como

$$x = (x_1, \dots, x_k)$$

onde cada  $x_i \in \mathbb{R}$  para  $i = 1 \dots k$ . Se  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  temos que

$$(x, y) \in f \Leftrightarrow f(x) = y$$

Podemos então escrever

$$f(x_1, \dots, x_k) = (y_1, \dots, y_n).$$

Podemos então construir, a partir da função  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , a seguinte relação

$$f_i : U \sim \mathbb{R} \quad f_i = \{(x, a) \in U \times \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}^n, [(x, y) \in f] \wedge [a \text{ é a } i\text{-ésima coordenada de } y]\}$$

**Lema 2.1** A relação  $f_i$  definida acima é uma função.

*Demonstração.* Primeiramente observamos que  $\text{Dom}(f_i) = U$ , de fato, para cada  $x \in U$  existe um  $y \in \mathbb{R}^n$  tal que  $(x, y) \in f$  e, em particular, se  $y_i$  é a  $i$ -ésima coordenada de  $y$  temos que  $(x, y_i) \in f_i$

Agora, assuma que  $(x, a), (x, b) \in f_i$ . Como  $f$  é função, existe um único  $y \in \mathbb{R}^n$  tal que  $(x, y) \in f$ , portanto existe um único  $y_i$  tal que  $(x, y_i) \in f_i$  de onde  $a = y_i = b$ . ■

Utilizando o resultado acima, se  $f : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ , podemos escrever  $f$  como segue

$$f(x_1, \dots, x_k) = (f_1(x_1, \dots, x_k), \dots, f_n(x_1, \dots, x_k))$$

em que cada  $f_i : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função que será chamada de  **$i$ -ésima função coordenada de  $f$** .

■ **Exemplo 2.2** • **Função constante:** A função constante é uma função  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = C$  para um  $C \in \mathbb{R}$  fixo.

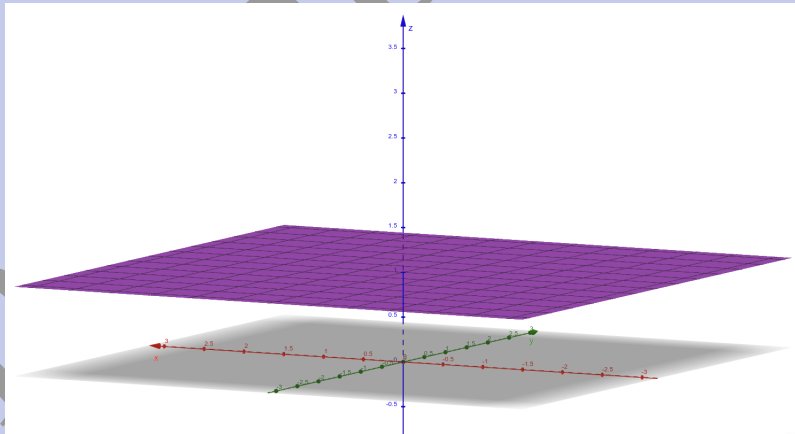
Por exemplo, para  $k = 2$  temos que

$$f(x, y) = 1 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

é uma função constante. Neste caso

- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^2$
- $\text{Img}(f) = \{1\}$ .

O gráfico da função é



• **A função linear:** Seja  $(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{R}^k$  fixo. Definimos a função linear  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  como sendo a função definida por

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 + \dots + a_k x_k.$$

Neste caso

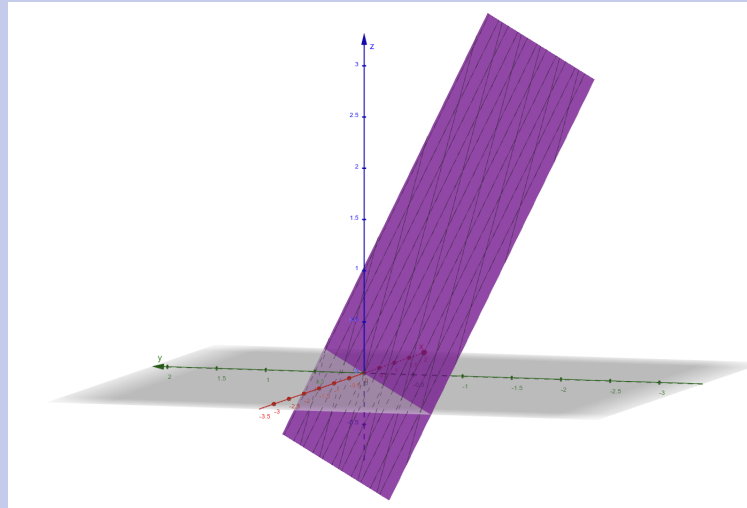
- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^n$
- $\text{Img}(f) = \mathbb{R}$ .

De fato, para todo  $k \in \mathbb{R}$  se, por exemplo,  $a_1 \neq 0$  temos que  $f(k/a_1, 0, \dots, 0) = k$ .

Por exemplo, para  $k = 2$  temos

$$f(x, y) = x - 2y,$$

é uma função linear cujo gráfico é um plano



- Considere  $f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

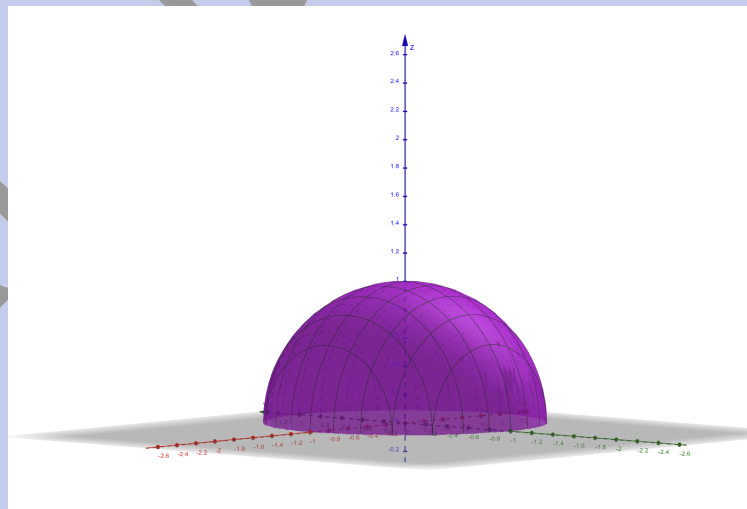
Neste caso temos que  $(x, y) \in \text{Dom}(f)$  se, e somente se,

$$1 - x^2 - y^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 \leq 1$$

Neste caso,

- $\text{Dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$
- $\text{Img}(f) = [0, 1]$ .

O gráfico da função é



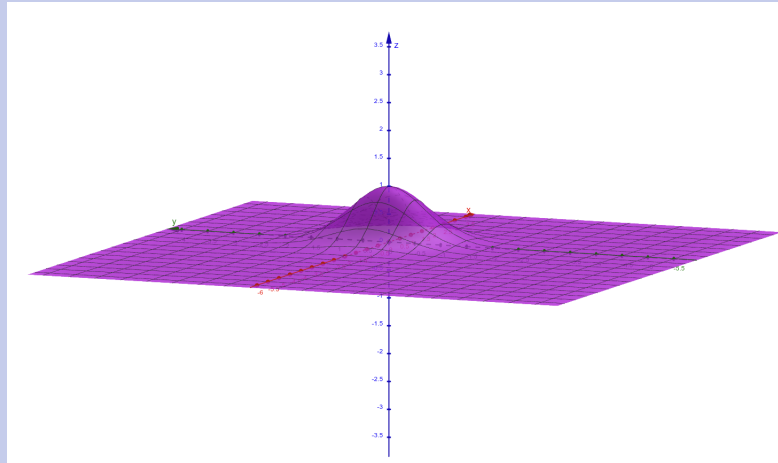
- Considere  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = \exp(-(x^2 + y^2)).$$

Neste caso,

- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^2$
- $\text{Img}(f) = (0, 1]$ .

O gráfico da função é



- Considere a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

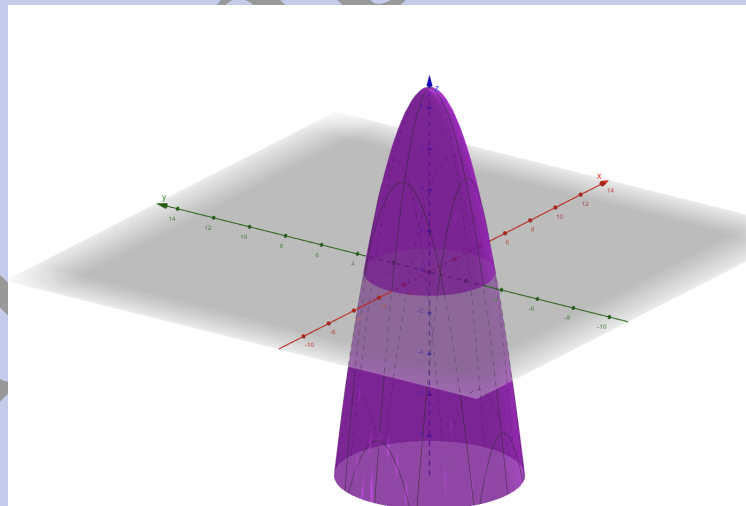
$$f(x_1, x_2) = 9 - x_1^2 - x_2^2$$

Neste caso,

- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^2$
- $\text{Img}(f) = (-\infty, 9]$ .

De fato, para cada  $a \in (-\infty, 9]$  temos que existe, por exemplo,  $(\sqrt{9-a}, 0) \in \text{Dom}(f)$  tal que  $f(\sqrt{9-a}, 0) = a$

O gráfico da função é



- Considere a função  $f : \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 < x_2^2\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

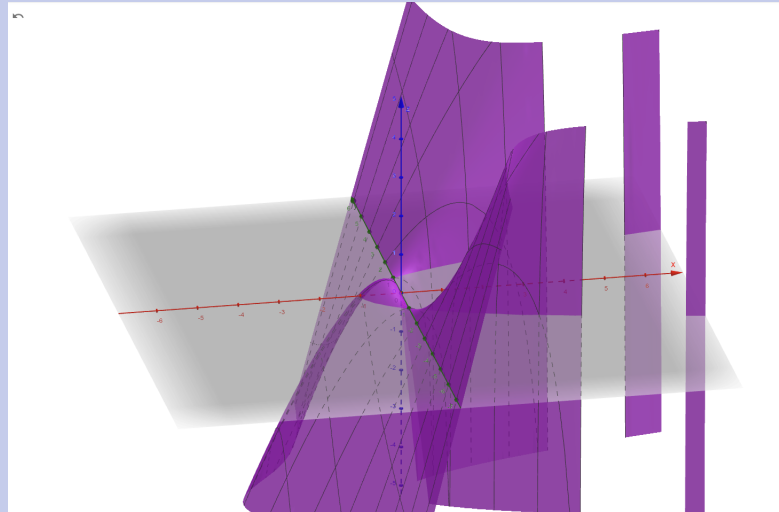
$$f(x_1, x_2) = x_1 \ln(x_2^2 - x_1)$$

Neste caso,

- $\text{Dom}(f) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 < x_2^2\}$
- $\text{Img}(f) = \mathbb{R}$ .

De fato, por exemplo, para  $a \geq 0$ , temos que existe, por exemplo,  $(a, \sqrt{e+a}) \in \text{Dom}(f)$  tal que  $f(a, \sqrt{e+a}) = a$

O gráfico da função é



- Considere a função  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 \cdot x_3.$$

Neste caso,

- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^3$
- $\text{Img}(f) = \mathbb{R}$ .

De fato, para cada  $a \in \mathbb{R}$  temos que existe, por exemplo,  $(3a, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$  tal que  $f(3a, 0, 0) = a$ . Para desenhar esta função precisamos de  $\mathbb{R}^4$ . Já não temos como visualizar este conjunto.

- Considere a função  $f : \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, x_2 < x_3\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \sin(x_3) + \ln(x_3 - x_2).$$

Neste caso,

- $\text{Dom}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, x_2 < x_3\}$
- $\text{Img}(f) = \mathbb{R}$ .

Para desenhar esta função precisamos de  $\mathbb{R}^4$ . Já não temos como visualizar este conjunto.

- Considere a função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_1 \cdot x_1 + \dots + a_n \cdot x_n.$$

onde  $a_1, \dots, a_n$  são constantes. Neste caso,

- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^n$
- $\text{Img}(f) = \mathbb{R}$ .

Para desenhar esta função precisamos de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Já não temos como visualizar este conjunto.

- Considere a função  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2, x_3 + x_1).$$

Neste caso,

- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^3$
- $\text{Img}(f) = \mathbb{R}^2$ .

Mais ainda, temos que

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2, \quad \text{e} \quad f_2(x_1, x_2, x_3) = x_3 + x_1.$$

Para desenhar esta função precisamos de  $\mathbb{R}^4$ . Já não temos como visualizar este conjunto.

**Obs.** Se  $f : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma função sabemos que  $f \subset U \times \mathbb{R}^n$  e que  $\text{Dom}(f) = U$ .

No entanto, daqui para frente faremos o seguinte abuso de notação: vamos indicar, indistintamente,  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  como sendo uma função e ficará subentendido que o domínio de  $f$  será um subconjunto  $U \subset \mathbb{R}^k$  que pode ser determinado.

Vimos, ou estudamos aqui, os casos de funções  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  e focamos, principalmente, no caso em que  $m = 1$  que são as chamadas **funções a valores reais**. Agora, destacamos agora um outro caso particular que é quando  $n = 1$ , isto é, das funções  $f : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

**Definição 2.3** Seja  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo. Uma **curva**  $C$  em  $\mathbb{R}^n$  parametrizada por uma função  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  é o conjunto imagem de  $\gamma$ , isto é

$$C = \{\gamma(x), x \in I\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Neste caso  $\gamma$  recebe o nome de parametrização da curva  $C$ .

Se  $\gamma : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , dizemos que a curva é

- **fechada** se  $\gamma(a) = \gamma(b)$
- **simples** se se não existem  $a < x_1 \neq x_2 < b$  tais que  $\gamma(x_1) = \gamma(x_2)$  isto é, não há autointerseções.

**Obs.**

- É comum identificar a curva  $C$  em  $\mathbb{R}^n$  com a função  $\gamma : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  cuja imagem é  $C$ , por isto, no texto as vezes chamaremos de curva a  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  por abuso de linguagem.
- Uma mesma curva  $C$  pode ter parametrizações  $\gamma$  diferentes e, dependendo da parametrizações, o objeto a ser calculado pode ter valores diferentes (veremos isto quando calculemos integrais de campos vetoriais ao longo de curvas). Alguns exemplos de parametrizações diferentes para uma mesma curva são:

$$C = \{(x, y), x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$$

é uma curva que pode ser parametrizada pelas seguintes funções

- $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\gamma(t) = (\cos(\pi t), \sin(\pi t))$
- $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\gamma(t) = (x, \sqrt{1-x^2})$

Portanto, sempre que possível,

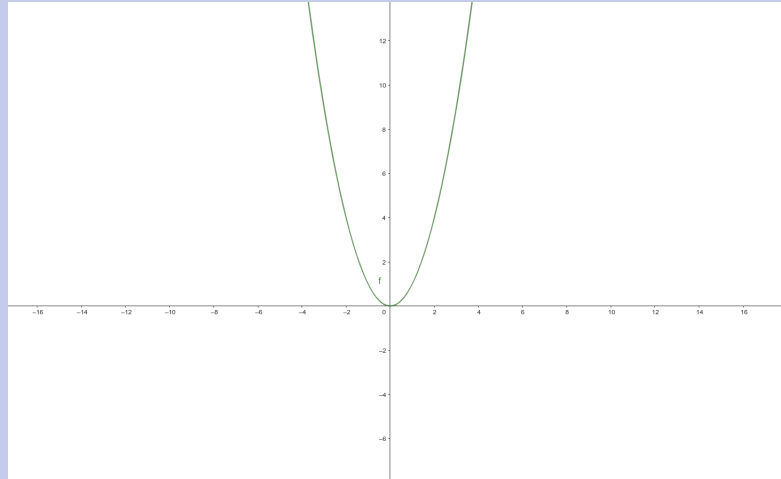
■ **Exemplo 2.3** • Sejam  $P = (a_1, \dots, a_n)$  e  $Q = (b_1, \dots, b_n)$  dois pontos em  $\mathbb{R}^n$  e considere a curva  $C$  que é dada pelo segmento de reta que une  $P$  com  $Q$ . Uma parametrização desta curva é

$$\gamma(t) = (1-t)P + tQ = (a_1 + t(b_1 - a_1), \dots, a_n + t(b_n - a_n)) \quad t \in [0, 1].$$

- Seja  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$\gamma(t) = (t, t^2)$$

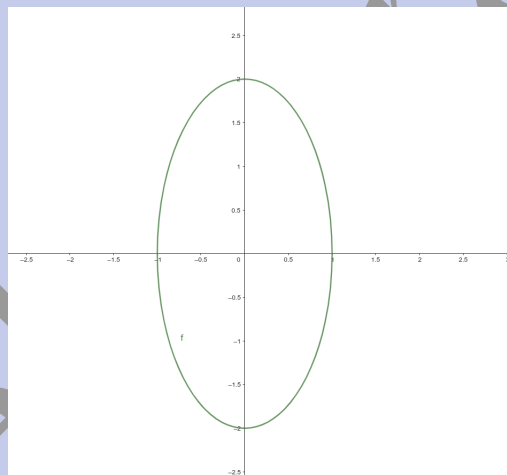
o seu traço é uma parábola e é uma curva simples mas não fechada.  
O gráfico da curva é



- Seja  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$\gamma(t) = (\cos(t), 2\sin(t))$$

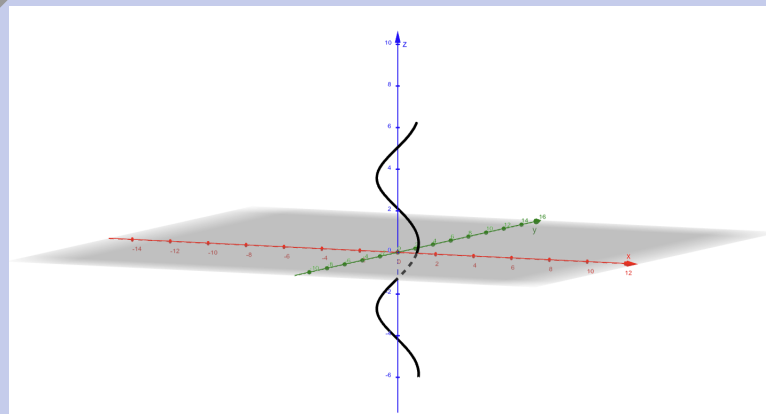
O seu traço é uma elipse e é uma curva fechada. O gráfico da curva é



- Seja  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$$

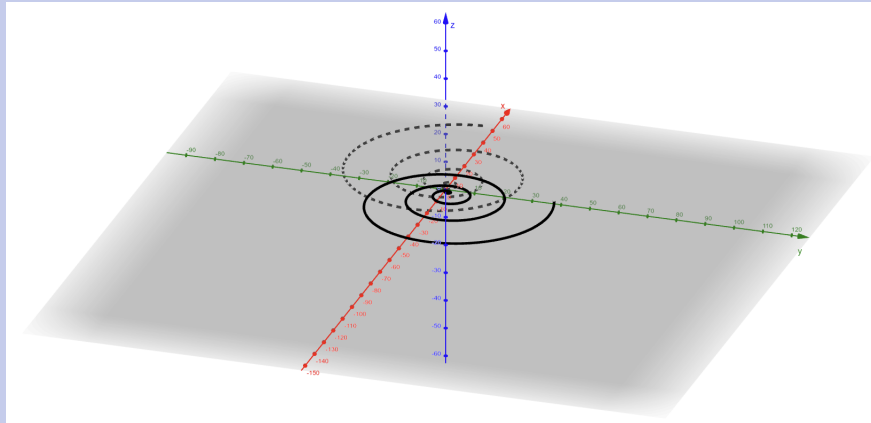
O seu traço é uma espiral e é uma curva simples e não fechada. O gráfico da curva é



- Seja  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$\gamma(t) = (t^2 \cos(4t), t^2 \sin(4t), t)$$

O seu traço é um redemoinho. É uma curva simples e não fechada  
O gráfico da curva é



Vamos a estudar agora as **curvas de nível** de uma função. Para motivar, começamos com um exemplo.

■ **Exemplo 2.4** • Considere  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = \exp(-(x^2 + y^2)).$$

E fazemos a interseção do gráfico da função com um plano  $z = k$ , ( $k \in \mathbb{R}$ ) paralelo ao plano  $z = 0$ . O conjunto interseção é da forma

$$I_k = \text{Graf}(f) \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = k\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = f(x, y) \text{ quad } \wedge z = k\}$$

Portanto  $(x, y, z) \in I_k$  se

$$k = z = f(x, y) = \exp(-(x^2 + y^2))$$

Decorre disto que, se  $k \leq 0$  então  $I = \emptyset$ , pois não pode estar na imagem de  $f$ . O mesmo acontece se  $k > 1$ . Vejamos o que acontece no caso  $k \in (0, 1]$ . Neste caso temos

$$\exp(-(x^2 + y^2)) = k \Rightarrow x^2 + y^2 = -\ln(k) > 0$$

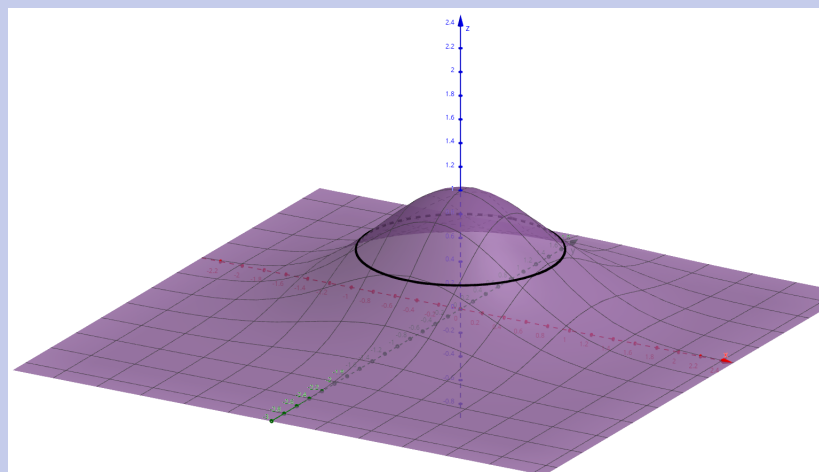
Portanto, temos os conjuntos

$$I_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 = -\ln(k), z = k\}$$

Se  $k = 1$  então

$$I_1 = \{(0, 0, 1)\}$$

Se  $k \in (0, 1)$  temos que  $I_k$  é uma circunferência no plano  $z = k$  de raio  $r = \sqrt{-\ln(k)}$ . Abaixo fazemos o desenho, na cor preta, da curva de nível para  $k = 0.5$ .



- Considere a função  $f : \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 < x_2^2\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = y^2 - x$$

Observamos que a imagem desta função é  $\mathbb{R}$ . Fazemos a interseção do gráfico da função com um plano  $z = k$ , ( $k \in \mathbb{R}$ ) paralelo ao plano  $z = 0$ . O conjunto interseção é da forma

$$I_k = \text{Graf}(f) \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = k\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = f(x, y) \quad \wedge \quad z = k\}$$

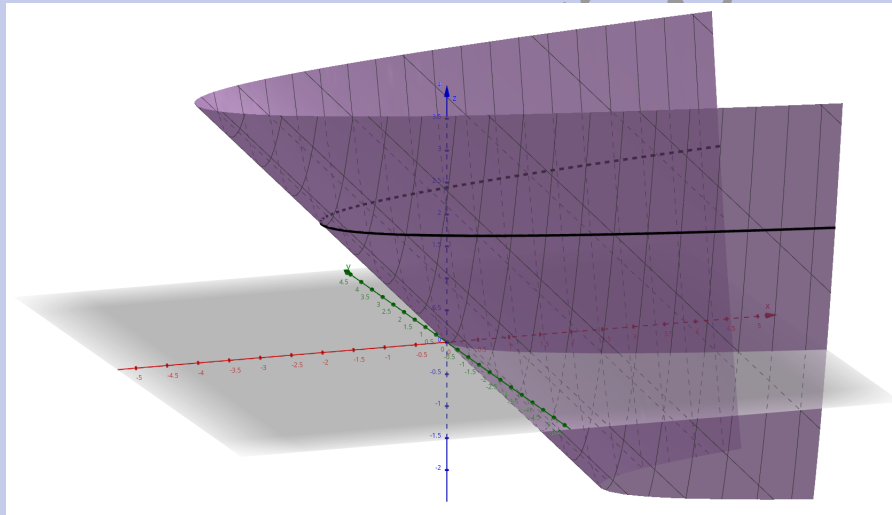
Portanto  $(x, y, z) \in I_k$  se

$$k = z = f(x, y) = y^2 - x \quad \Rightarrow \quad x = y^2 - k$$

Portanto, temos os conjuntos

$$I_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = y^2 - k, z = k\}$$

Assim vemos que  $I_k$  é uma parábola no plano  $z = k$  de raio  $r = \sqrt{-\ln(k)}$ . Abaixo fazemos o desenho, na cor preta, da curva de nível para  $k = 2$ .



**Definição 2.4** Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função,  $k \in \text{Img}(f)$  e considere so seu gráfico

$$\text{Graf}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y) = z\}$$

Uma **curva de nível**  $f$  é o conjunto definido por uma relação da forma

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = k, f(x, y) = k\}$$

Uma curva de nível pode ser vista como o conjunto interseção do plano  $\pi : z = k$  com o gráfico de  $f$  e ela pode ser uma curva ou um ponto.

**Obs.**

É uma curva de nível porque estamos intersectando um conjunto de dimensão 2 que é a gráfica da função com outro de dimensão 2 que é o plano. Tal tipo de interseção pode ser o conjunto todo (no caso não seria uma curva), um conjunto de dimensão 1 (que é uma curva) ou um conjunto vazio.

■ **Exemplo 2.5** • Considere a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = 4 - x^2 - y^2.$$

Observamos que a imagem desta função é  $\mathbb{R}$ . Fazemos a interseção do gráfico da função com um plano  $z = k$ , ( $k \in \mathbb{R}$ ) paralelo ao plano  $z = 0$ . O conjunto interseção é da forma

$$I_k = \text{Graf}(f) \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = k\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = f(x, y) \quad \wedge \quad z = k\}$$

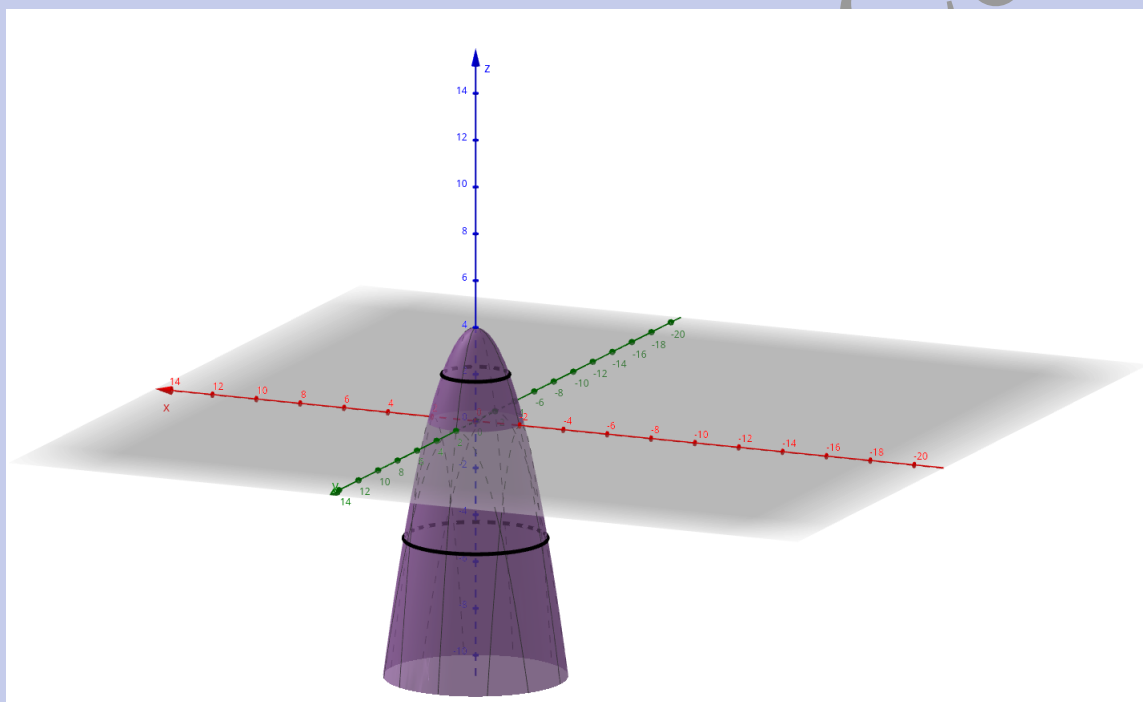
Portanto  $(x, y, z) \in I_k$  se

$$k = z = f(x, y) = 4 - x^2 - y^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 4 - k.$$

Portanto, temos os conjuntos

$$I_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 = 4 - k, z = k\}$$

Assim vemos que  $I_k$  é uma circunferência no plano  $z = k$  de raio  $r = \sqrt{4 - k}$ . Abaixo fazemos o desenho, na cor preta, de algumas curvas de nível.



■

Em elaboração

### 3. Limites e continuidade

Vamos a ver agora os conceitos de limite e continuidade. Estes estão entre os fundamentos mais importantes do Cálculo. A grosso modo, o limite descreve o comportamento de uma função quando a variável de entrada se aproxima de um certo valor, mesmo que a função não esteja definida exatamente nesse ponto. Já a continuidade expressa a ideia de que uma função não tem "saltos" ou "interrupções": intuitivamente, é possível traçar seu gráfico sem tirar o lápis do papel.

A importância de limites e continuidade vai além da matemática pura. Eles são ferramentas fundamentais na modelagem de fenômenos físicos, como o movimento de partículas, a propagação de calor, ou a variação de preços em economia. Também são essenciais na transição para o estudo de funções de várias variáveis onde questões de limite, continuidade e suavidade se tornam ainda mais sutis e ricas.

Para poder falar de limite e continuidade precisamos uma noção do que significa um ponto estar "perto" ou "longe" de outro, isto é, uma noção de distância.

A **função distância em  $\mathbb{R}^n$**  é a função  $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

Observamos que

$$\text{Dom}(d) = \mathbb{R}^{2n} \quad \text{Im}(d) = [0, +\infty).$$

■ **Exemplo 3.1** • em  $\mathbb{R}$  temos que

$$d((a), (b)) = \sqrt{(a - b)^2} = |a - b|.$$

• em  $\mathbb{R}^2$  temos que

$$d((a, b), (c, d)) = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}.$$

■  
**Lema 3.1** Sejam  $x, y, z$  três pontos em  $\mathbb{R}^n$  então

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

*Demonstração.* Lembramos primeiramente da desigualdade de Cauchy-Schwartz, isto é, que

$$(u_1 \cdot v_1 + \cdots + u_n \cdot v_n)^2 \leq (u_1^2 + \cdots + u_n^2) \cdot (v_1^2 + \cdots + v_n^2).$$

Sejam  $x = (a_1, a_2)$ ,  $y = (b_1, b_2)$  e  $z = (c_1, c_2)$ . Então

$$\begin{aligned} d(x, y)^2 &= (a_1 - b_1)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2 \\ &= [(a_1 - c_1) + (c_1 - b_1)]^2 + \cdots + [(a_n - c_n) + (c_n - b_n)]^2 \\ &= d(x, z)^2 + d(z, y)^2 + 2[(a_1 - c_1) \cdot (c_1 - b_1) + \cdots + (a_n - c_n) \cdot (c_n - b_n)] \\ &\leq d(x, z)^2 + d(z, y)^2 + 2[d(x, z) \cdot d(z, y)] \\ &= (d(x, z) + d(z, y))^2, \end{aligned}$$

o que mostra o resultado. ■

**Corolário 3.1** Se  $x, y \in \mathbb{R}^n$  e  $0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$  então

$$d(x, y) \leq d(x, 0) + d(y, 0)$$

*Demonstração.* Segue imediato do resultado anterior. ■

Por exemplo

Com a noção de distância podemos definir os seguintes conjuntos

- A **bola aberta** de raio  $r$

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n, d(x, y) < r\}.$$

- A **bola fechada** de raio  $r$

$$B[x, r] = \{y \in \mathbb{R}^n, d(x, y) \leq r\}.$$

- A **esfera** de raio  $r$

$$S(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n, d(x, y) = r\}.$$

**Definição 3.1** Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto.

- Dizemos que ele é **limitado** se existe um  $a \in \mathbb{R}^n$  e um  $r > 0$  tal que  $r < +\infty$  e

$$U \subset B(a, r).$$

- A fronteira de  $U$ , que denotamos por  $\partial U$  é o conjunto de pontos  $x \in \mathbb{R}^n$  tal que  $B(x, r) \cap U \neq \emptyset$  para todo  $r > 0$ .

**Corolário 3.2** Todo conjunto limitado está contido num conjunto da forma

$$[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

para  $-\infty < a_i, b_i < +\infty$

*Demonstração.* Como  $U$  é um conjunto limitado, existe um  $a \in \mathbb{R}^n$  e um  $r > 0$  tal que  $U \subset B(a, r)$ . Por outro lado, se  $a = (a_1, \dots, a_n)$  temos que

$$B(a, r) \subset [a_1 - r, a_1 + r] \times \cdots \times [a_n - r, a_n + r],$$

de onde segue o resultado. ■

**Definição 3.2** Uma função  $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é dita **uma função limitada** se  $\text{Img}(f)$  é um conjunto limitado.

**Lema 3.2** Seja  $x \in \mathbb{R}^n$  temos que

$$\bigcup_{r>0} B(x, r) = \mathbb{R}^n, \quad \bigcap_{r>0} B(x, r) = \{x\}.$$

*Demonstração.* Claramente, temos que

$$\bigcup_{r>0} B(x, r) \subset \mathbb{R}^n.$$

Seja  $y \in \mathbb{R}^n$  e  $r_0 = d(x, y)$ , então  $y \in B(x, r_0 + 1)$ , portanto  $y \in \bigcup_{r>0} B(x, r)$ . Da arbitrariedade na escolha do  $y$  temos que  $\mathbb{R}^n \subset \bigcup_{r>0} B(x, r)$

Também, como  $x \in B(x, r)$  para todo  $r > 0$  segue que

$$\{x\} \subset \bigcap_{r>0} B(x, r).$$

Assuma que  $y \in \bigcap_{r>0} B(x, r)$ ,  $y \neq x$ , e seja  $r_0 = d(x, y)$ . Portanto  $y \notin B(x, r_0/2)$ , de onde segue que  $y \notin \bigcap_{r>0} B(x, r)$  o que é uma contradição. Portanto  $\{x\} = \bigcap_{r>0} B(x, r)$ . ■

**Obs.**

Observamos que para  $n = 1$  temos

- $B(x, r) = (x - r, x + r)$
- $B[x, r] = [x - r, x + r]$

**Definição 3.3** Um conjunto  $U \subset \mathbb{R}^n$  será dito **aberto** se para todo ponto  $x \in U$  existe um  $r_x > 0$  tal que  $B(x, r_x) \subset U$ . Um conjunto  $V \subset \mathbb{R}^n$  será dito **fechado** se o seu complementar for aberto.

■ **Exemplo 3.2** • A bola  $B(x, r)$  é limitada. De fato existe  $R = 2r$  tal que  $B(x, r) \subset B(a, R)$ .

A bola  $B(x, r)$  é aberta, de fato, para todo  $y \in B(x, r)$  existe  $\varepsilon = r - d(y, x)$  tal que  $B(y, \varepsilon) \subset B(x, r)$ . De fato, se  $z \in B(y, \varepsilon)$  então

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \leq d(x, y) + \varepsilon = r.$$

A fronteira de  $B(x, r)$  é  $S(x, r)$ , de fato, para todo  $y \in S(x, r)$  e  $\varepsilon > 0$  temos que  $B(y, \varepsilon) \cap B(x, r) \neq \emptyset$ , de fato, seja

$$z = \frac{2r - \varepsilon}{2r} y + \frac{\varepsilon}{2r} x.$$

Observamos que

$$d(y, z) = \frac{\varepsilon}{2r} d(x, y) \Rightarrow z \in B(y, \varepsilon)$$

e que

$$d(x, z) = \frac{2r - \varepsilon}{2r} d(x, y) < d(x, y) \Rightarrow z \in B(x, r).$$

Por outro lado, se  $z \in B[x, r]^C$  então  $d(x, r) > r$  e, portanto existe um  $\varepsilon > 0$  tal que  $d(x, r) > r - \varepsilon > r$  de onde,  $B(z, \varepsilon/2) \cap B(x, r) = \emptyset$  de onde  $z \notin \partial B(x, r)$ .

- O conjunto  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x > 0\}$  é um conjunto aberto. De fato, para todo ponto  $p = (a, b, c) \in S$  observamos que a bola

$$B(p, c) \subset S.$$

De fato, se  $q = (u, v, w) \in B(p, c)$  temos que

$$|w - c| < d(p, q) < c \Rightarrow w > 0.$$

Também, temos que  $\partial S = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$  visto que toda bola centrada num ponto da forma  $(0, b, c)$  terá um ponto da forma  $(u, v, w)$  com  $u > 0$ . Por outro lado, todo ponto da forma  $p = (a, b, c)$  com  $a < 0$  admitirá uma bola  $B(p, -a/2)$  tal que  $B(p, -a/2) \cap S = \emptyset$ .

O conjunto  $S$  não é limitado, pois para todo  $r > 0$  a bola  $B((r, 0, 0), r) \subset S$ . ■

Em cálculo de uma variável também vimos uma definição de limite que era dada em função dos valores que assumia a função ao redor de um certo ponto  $a$ . Com a noção de distância, podemos generalizar essa definição como segue

**Definição 3.4** Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^n$  uma função em que  $U = \text{Dom}(f)$ . Seja  $a \in \mathbb{R}^n$  tal que para todo  $r > 0$  temos que  $B(a, r) \cap U \neq \emptyset$ .

Dizemos que  $L \in \mathbb{R}$  é o **limite de  $f(x)$  quando  $x$  tende a  $a$** , e o denotamos por

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L,$$

se para todo  $\varepsilon > 0$  existe um  $\delta > 0$  tal que

$$\text{se } x \in U \text{ e } 0 < d(x, a) < \delta \text{ então } |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

**Obs.** Esta ideia de limite, pode ser descrita da forma equivalente

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{d(x, a) \rightarrow 0} f(x) = L$$

**Teorema 3.1** Se existe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  então o valor é único.

*Demonstração.* Suponhamos que o limite existe e que pode assumir dois valores. Então

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } 0 < d(x, a) < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \varepsilon$$

e

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } 0 < d(x, a) < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L_2| < \varepsilon$$

Dado  $\varepsilon > 0$  considere  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ . Então sempre temos

$$|f(x) - L_1| < \varepsilon \text{ e } |f(x) - L_2| < \varepsilon$$

Escolha  $\varepsilon = |L_1 - L_2|/3$ . Observamos que  $\varepsilon > 0$  pois os limites são diferentes. Seja o  $\delta$  escolhido como acima, então para todo  $|x - a| < \delta$  temos

$$|L_1 - L_2| \leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| < \frac{|L_1 - L_2|}{3} + \frac{|L_1 - L_2|}{3} = \frac{2}{3}|L_1 - L_2|.$$

Chegamos então a uma contradição. Portanto o limite é único. ■

Para o seguinte resultado vamos precisar de algumas contas que colocamos no seguinte lema.

**Lema 3.3** 1. Se  $|x - x_0| < \varepsilon/2$  e  $|y - y_0| < \varepsilon/2$ , então

$$|(x + y) - (x_0 + y_0)| < \varepsilon.$$

2. Se

$$|x - x_0| < \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2(|y_0| + 1)}\right) \quad \text{e} \quad |y - y_0| < \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2(|x_0| + 1)}\right),$$

então

$$|xy - x_0y_0| < \varepsilon.$$

3. Se  $y_0 \neq 0$  e

$$|y - y_0| < \min\left(\frac{|y_0|}{2}, \frac{\varepsilon|y_0|^2}{2}\right),$$

então

$$\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right| < \varepsilon.$$

*Demonstração.* 1. Segue da desigualdade triangular  $|a + b| \leq |a| + |b|$ . De fato

$$\begin{aligned} |(x + y) - (x_0 + y_0)| &\leq |x - x_0| + |y - y_0| \\ &\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

2. Como  $|x - x_0| < 1$  temos que

$$|x| - |x_0| < |x - x_0| < 1 \quad \Rightarrow \quad |x| < 1 + |x_0|.$$

Agora, utilizando isto, temos

$$|xy - x_0y_0| < |x||y - y_0| + |y_0||x - x_0| < \varepsilon$$

3. Por hipótese,

$$|y_0| - |y| < |y - y_0| < \frac{|y_0|}{2}.$$

Então  $|y| > |y_0|/2$ .

Em particular, se  $y \neq 0$  e

$$\frac{1}{|y|} < \frac{2}{|y_0|},$$

temos

$$\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right| = \frac{|y_0 - y|}{|y||y_0|} < \frac{2}{|y_0|} \frac{1}{|y_0|} \frac{\varepsilon|y_0|^2}{2} = \varepsilon$$

■

**Teorema 3.2** Se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  existem, então

- (i)  $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
- (ii)  $\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = (\lim_{x \rightarrow a} f(x)) \cdot (\lim_{x \rightarrow a} g(x))$
- (iii) Se  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ , então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

*Demonstração.* Assuma que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$ .

- (i) Da definição de limite temos que para todo  $\tilde{\varepsilon} > 0$

$$\exists \delta_1 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ tal que } 0 < d(x, a) < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - l| < \tilde{\varepsilon}$$

e

$$\exists \delta_2 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ tal que } 0 < d(x, a) < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - m| < \tilde{\varepsilon}$$

Dado  $\varepsilon > 0$  defina  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon/2$ . Escolhermos  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$  associados a tal  $\tilde{\varepsilon}$ . Segue que,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , se  $0 < d(x, a) < \delta$  então

$$|f(x) - l| < \varepsilon/2 \quad \text{e} \quad |g(x) - m| < \varepsilon/2.$$

Agora o resultado decorre da parte 1 do lema anterior.

(ii) Seja  $\varepsilon > 0$ . Da definição de limite temos que para todo  $\tilde{\varepsilon} > 0$  e  $\bar{\varepsilon} > 0$ , e em particular para

$$\tilde{\varepsilon} = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2(|m|+1)}\right) \quad \text{e} \quad \bar{\varepsilon} = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2(|l|+1)}\right),$$

segue que

$$\exists \delta_1 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ tal que } 0 < d(x, a) < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - l| < \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2(|m|+1)}\right)$$

e

$$\exists \delta_2 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ tal que } 0 < d(x, a) < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - m| < \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2(|l|+1)}\right)$$

Dado  $\varepsilon > 0$  se escolhermos  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , segue que,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , se  $0 < d(x, a) < \delta$  então

$$|f(x) - l| < \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2(|m|+1)}\right) \quad \text{e} \quad |g(x) - m| < \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2(|l|+1)}\right)$$

e pela parte 2 do lema anterior vemos que

$$|(fg)(x) - lm| < \varepsilon$$

(iii) Seja  $\varepsilon > 0$ . Da definição de limite temos que para todo  $\tilde{\varepsilon} > 0$  e, em particular, para

$$\tilde{\varepsilon} = \min\left(\frac{|m|}{2}, \frac{\varepsilon|m|^2}{2}\right),$$

existe um  $\delta > 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , se  $0 < d(x, a) < \delta$  temos

$$|g(x) - m| < \min\left(\frac{|m|}{2}, \frac{\varepsilon|m|^2}{2}\right)$$

Pela parte 3 do lema anterior, isto garante que  $g(x) \neq 0$ , e portanto  $\frac{1}{g(x)}$  está definida. Agora, dado  $\varepsilon > 0$  existe um  $\delta > 0$  como acima tal que (novamente pela parte 3 do lema anterior)

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{m}\right| < \varepsilon.$$

■

Ate agora vimos a definição de limite para funções  $f : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ , no entanto, podemos generalizar essa noção para funções  $f : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  como segue: Se

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)) \quad \text{em que} \quad f_i : U \rightarrow \mathbb{R} \text{ são as funções coordenadas.}$$

Se

$$\lim_{x \rightarrow a} f_i(x)$$

existe para cada  $i = 1, \dots, n$  definimos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f_1(x), \dots, \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)\right).$$

Com esta definição temos o seguinte resultado.

**Teorema 3.3** Sejam  $f : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $g : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções tais que  $f \circ g$  está definida em uma bola  $B(a, r)$ . Então se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  e  $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = L$ , temos que

$$\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = L$$

*Demonstração.* Seja  $b = (b_1, \dots, b_n)$ . Sabemos que para cada  $i = 1 \dots n$  e

$$\text{para todo } \varepsilon_i > 0 \exists \delta_i > 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ tal que } 0 < d(x, a) < \delta_i \Rightarrow |f_i(x) - b_i| < \varepsilon_i$$

e que

$$\text{para todo } \tilde{\varepsilon} > 0 \exists \tilde{\delta} > 0, \forall y \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } 0 < d(y, b) < \tilde{\delta} \Rightarrow |g(y) - L| < \tilde{\varepsilon}$$

Dado  $\varepsilon > 0$ , existe um  $\tilde{\delta} > 0$  tal que

$$0 < d(y, b) < \tilde{\delta} \Rightarrow |g(y) - L| < \varepsilon$$

considere agora, para cada  $i = 1 \dots n$  o  $\delta_i$  que garante

$$0 < d(x, a) < \delta_i \Rightarrow |f_i(x) - b_i| < \frac{1}{n} \tilde{\delta}.$$

Escolhemos  $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ . Então dado  $\varepsilon > 0$ , existe um  $\delta > 0$  tal que

$$\begin{aligned} 0 < d(x, a) < \delta &\Rightarrow |f_i(x) - b_i| < \frac{\tilde{\delta}}{n} \forall i = 1 \dots n \Rightarrow 0 < d(f(x), b) < \tilde{\delta} \\ &\Rightarrow |g(f(x)) - L| < \varepsilon. \end{aligned}$$

■ **Exemplo 3.3** Vejamos como aplicar a propriedade anterior.

- Considere o limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy}.$$

Observamos que, se

$$f(x, y) = xy \quad \text{e} \quad g(u) = \frac{\sin(u)}{u}$$

pelo que vimos acima e em cálculo de uma variável

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{u \rightarrow 0} g(u) = 1.$$

Portanto

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} = 1.$$

- Considere o limite

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^2 + y^2 + 2z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2z^2 + 1} - 1}.$$

Observamos que, se

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 \quad \text{e} \quad g(u) = \frac{u}{\sqrt{u+1} - 1}$$

pelo que vimos acima e em cálculo de uma variável

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} f(x,y,z) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{u \rightarrow 0} g(u) = 2.$$

Portanto

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^2 + y^2 + 2z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2z^2 + 1} - 1} = 2.$$

Para funções  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  temos algumas propriedades a mais que podemos mostrar.

**Proposição 3.1** Sejam  $f, g$  duas funções que coincidam em todos os pontos de  $U$  ao redor do ponto  $a$ , mas que não necessariamente assumem o mesmo valor em  $a$ . Se  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  existe então  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe e

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

*Demonstração.* Assuma que

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2.$$

Seja  $\varepsilon > 0$  e  $\delta > 0$  tal que  $\forall x \in \mathbb{R}$  se  $0 < d(x, a) < \delta$  temos  $|g(x) - L_2| < \varepsilon$ . Então, para todo  $x$  tal que  $0 < d(x, a) < \delta$  temos que

$$|L_2 - f(x)| = |L_2 - g(x)| < \varepsilon,$$

de onde  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_2$ .

A seguir damos outro resultado técnico que é de grande utilidade no cálculo de limites: O teorema do confronto. Para isto, primeiramente provamos um resultado técnico.

**Teorema 3.4** Se  $f(x) \leq g(x)$  quando  $x$  está próximo de  $a$  e os limites de  $f$  e  $g$  existem quando  $x \rightarrow a$ , então

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

*Demonstração.* É suficiente provar que se  $f(x) \geq 0$  em uma vizinhança de  $a$  então  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \geq 0$ . Assuma que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L < 0$$

Seja  $\varepsilon = |L|/2 > 0$ , da definição de limite, temos que existe  $\delta > 0$  tal que se  $|x - a| < \delta$  então  $|f(x) - L| < \varepsilon$ . Assuma  $L < 0$ , então  $f(x) - L = f(x) + |L| > |L| > 0$ . Portanto,

$$\frac{|L|}{2} > |f(x) - L| > |L|,$$

o que é absurdo!

**Obs.**

Nem sempre podemos substituir na conclusão o  $\leq$  por  $<$ . De fato, considere  $f(x) = 0$  e  $g(x) = |x|$ , então  $f(x) < g(x)$  perto de  $a = 0$ , mas os limites são iguais quando  $x \rightarrow a = 0$ .

**Teorema 3.5 — Teorema do Confronto.** Se  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  quando  $x$  está próximo de  $a$  e

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L$$

então

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$$

*Demonstração.* Sabemos que  $\forall \varepsilon > 0$

- $\exists \delta_1 > 0$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $0 < d(x, a) < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \Leftrightarrow L - \varepsilon < f(x) < \varepsilon + L$
- $\exists \delta_2 > 0$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $0 < d(x, a) < \delta_2 \Rightarrow |h(x) - L| < \varepsilon \Leftrightarrow L - \varepsilon < h(x) < \varepsilon + L$

Então,  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$  tal que

$$|x - a| < \delta \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < \varepsilon + L.$$

De onde  $L - \varepsilon < f(x) < \varepsilon + L$ , que é equivalente a  $|f(x) - L| < \varepsilon$ . ■

■ **Exemplo 3.4** Vamos calcular alguns limites

•

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (x^2 y^3 - x^3 y^2 + 3x + 2y) = 1^2 \cdot 2^3 - 1^3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 11.$$

•

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} x \ln(2x - y) = 1 \cdot \ln(2 \cdot 1 - 1) = 0.$$

•

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \cos(xyz^2) - \sin(xy) = \cos(0) - \sin(0) = 1.$$

•

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} y e^x = 1 \cdot e^0 = 1.$$

•

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{xy}}{x+1} = \frac{e^0}{1} = 1.$$

- Pode haver casos em que o limite gera uma indeterminação, por exemplo

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} = \frac{0}{0}.$$

Podemos calcular este limite pelo teorema do confronto, de fato, observamos que como

$$0 \leq \frac{y^2}{x^2 + y^2} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{y^2 x}{x^2 + y^2} \leq x \quad \text{ou} \quad x \leq \frac{y^2 x}{x^2 + y^2} \leq 0,$$

e

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x = 0$$

temos, pelo teorema do confronto, que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

Isto pode ser provado também por definição. De fato, para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta = \varepsilon$  tal que  $d((x,y), (0,0)) < \delta$  então

$$\begin{aligned} d\left(\frac{xy^2}{x^2 + y^2} - 0\right) &= \left|\frac{xy^2}{x^2 + y^2}\right| \\ &\leq |x| \cdot \left|\frac{y^2}{x^2 + y^2}\right| < |x| < \delta = \varepsilon. \end{aligned}$$

■

Com a definição de limite agora podemos dizer o que significa uma função ser contínua em  $\mathbb{R}^n$ .

**Definição 3.5** Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^n$  uma função em que  $U = \text{Dom}(f)$  e  $a \in U$ . Dizemos que  $f$  é **contínua em  $a$**  se

- existe  $f(a)$ .
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

A função  $f$  é dita **contínua** se ela for contínua para todo  $a \in U$ .

■ **Exemplo 3.5** • Toda função **polinomial**, isto é, toda função que é soma de funções da forma

$$c \cdot x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}$$

é contínua.

- Qualquer função **Racional**, isto é, função da forma

$$f(x, y) = \frac{p(x, y)}{q(x, y)}$$

é contínua no seu domínio, isto é, em  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y), q(x, y) = 0\}$ .

- A função  $h(x, y) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$  está definida nos pontos  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  em que  $x \neq 0$ , pois a função racional não está definida nestes pontos. Como as funções  $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$  e

$$q(x, y) = \frac{y}{x} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = 0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

são contínuas temos que  $h(x, y)$  é contínua no domínio. ■

Claramente, segue da definição e das propriedades de limite que

- se  $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  são duas funções a valores em  $\mathbb{R}$  e contínuas em um ponto  $a$  temos que
  - $f + g, f \cdot g$  é contínua em  $a$ .
  - se  $g(a) \neq 0$ , então  $f/g$  é contínua em  $a$ .
- se  $f : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$  e  $g : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  são duas funções tais que  $f \circ g$  : está definida. Se  $g$  é contínua em um ponto  $a$  e  $f$  é contínua no ponto  $g(a)$  então  $f \circ g$  é contínua em  $a$ .

**Corolário 3.3** Sejam  $f : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$  e  $g : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  duas funções tais que  $f \circ g$  : está definida. Se  $f$  e  $g$  são contínuas então  $f \circ g$  é contínua.

### 3.1 Limites ao longo de curvas

Em Cálculo de uma variável, vimos também o conceito de limites laterais, isto é, se  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $a \in I$  definimos o que significava o limite a esquerda ou direita

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x).$$

Nesta definição estava implícita uma noção de ordem entre os elementos de  $\mathbb{R}$  ("maior que" ou "menor que"), que não pode ser generalizada para  $\mathbb{R}^n$ . Portanto, para poder definir o conceito de "limite lateral" vamos ter que olhar de outra forma a ideia de limite lateral.

Por exemplo, no caso de calcular o limite a direita, estudávamos quando o caso do limite quando nos aproximávamos de  $a$  por valores de  $x$  tais que  $a < x$ . Podemos então, escrever este limite como segue

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(a + t)$$

ou, se definirmos a curva  $\alpha : [0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  (para algum  $\varepsilon > 0$ ) como  $\alpha(t) = a + t$  temos que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} (f \circ \alpha)(t)$$

Da mesma forma

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} (f \circ \beta)(t)$$

em que  $\beta : [0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}, \beta(t) = a - t$ .

Assim, a noção de limite lateral se converte numa a um limite quando nos aproximamos por curvas.

**Definição 3.6** Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^n$  uma função em que  $U = \text{Dom}(f)$ . Seja  $a \in \mathbb{R}^n$  tal que para todo  $r > 0$  temos que  $B(a, r) \cap U \neq \emptyset$  e assumamos que  $\gamma : (0, r) \rightarrow U$  é uma curva definida no 0 e tal que  $\gamma(0) = a$ .

Dizemos que  $L \in \mathbb{R}$  é o **limite de  $f(x)$  quando nos aproximamos de  $a$  ao longo de  $\gamma$** , e o denotamos por

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma(t)) = L,$$

se para todo  $\varepsilon > 0$  existe um  $\delta > 0$  tal que

$$\text{se } x \in U \text{ e } 0 < t < \delta \text{ então } |f(\gamma(t)) - f(a)| < \varepsilon.$$

■ **Exemplo 3.6** • Seja  $\gamma(t) = (t, t^2)$  uma curva e considere a função  $f(x, y) = x^2 - \cos(xy)$ . Calculamos

$$\lim_{t \rightarrow 0} (f \circ \gamma)(t) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t, t^2) = \lim_{t \rightarrow 0} (t^2 - \cos(t^3)) = -1.$$

• Considere a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Observamos que  $f(0, 0) = 0$ , então, se

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$$

a função é contínua. No entanto se consideramos as curvas  $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definidas por

$$\gamma_1(t) = (t, 0) \text{ e } \gamma_2(t) = (0, t)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \gamma_1(t) = (0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \gamma_2(t)$$

No entanto

$$\lim_{t \rightarrow 0} (f \circ \gamma_1)(t) = \lim_{t \rightarrow 0} 1 = 1 \text{ e } \lim_{t \rightarrow 0} (f \circ \gamma_2)(t) = \lim_{t \rightarrow 0} -1 = -1$$

Como estes limites são distintos, não pode existir o limite

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y).$$

• Considere a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Observamos que  $f(0, 0) = 0$ , então, se

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0,$$

a função é contínua. No entanto se consideramos as curvas  $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definidas por

$$\gamma_1(t) = (t, 0) \text{ e } \gamma_2(t) = (t, t)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \gamma_1(t) = (0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \gamma_2(t)$$

No entanto

$$\lim_{t \rightarrow 0} (f \circ \gamma_1)(t) = \lim_{t \rightarrow 0} 0 = 0 \text{ e } \lim_{t \rightarrow 0} (f \circ \gamma_2)(t) = \lim_{t \rightarrow 0} 1 = 1$$

Como estes limites são distintos, não pode existir o limite

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y).$$

- Considere a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Observamos que  $f(0, 0) = 0$ , então, se

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0,$$

a função é contínua. De fato, já vimos acima que

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

Considere as curvas  $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definidas por

$$\gamma_1(t) = (t^2, t) \quad \text{e} \quad \gamma_2(t) = (t, t)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \gamma_1(t) = (0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \gamma_2(t)$$

Então

$$\lim_{t \rightarrow 0} (f \circ \gamma_1)(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{2} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow 0} (f \circ \gamma_2)(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{2} = 0$$

como era de esperar. ■

Agora vamos mostrar, na linguagem de cálculo em múltiplas variáveis, que se "existem os limites laterais e são iguais, então existe o limite"

**Teorema 3.6** Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^n$  uma função em que  $U = \text{Dom}(f)$ . Seja  $a \in \mathbb{R}^n$  tal que para todo  $r > 0$  temos que  $B(a, r) \cap U \neq \emptyset$ . O limite

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

existe se, e somente se, para toda curva  $\gamma : (0, r) \rightarrow U$  tal que  $\gamma(0) = a$  temos que os limites existem e são iguais, isto é,

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma(t)) = L.$$

*Demonstração.* Assuma que  $\gamma : (0, r) \rightarrow U$  uma curva. Seja  $\varepsilon > 0$  então, como o limite existe, existe um  $\delta > 0$  tal que se  $0 < d(x, a) < \delta$  temos que  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ . Seja então  $\delta'$  tal que  $[0, \delta') \subset \gamma^{-1}(B(a, \delta))$  (aqui utilizamos o fato de que  $B(a, r)$  é conexa por caminhos e  $\gamma$  contínua). portanto, se  $0 < t < \delta'$  temos que  $d(\gamma(t), a) < \delta$  de onde  $|f(\gamma(t)) - f(a)| < \varepsilon$ , mostrando que existe o limite ao longo da curva.

Por outro lado, assuma que existe o limite ao longo de qualquer curva e são todos iguais a  $L$  e assuma que não existe o limite na forma geral. Portanto, existe um  $\varepsilon > 0$  tal que para todo  $\delta > 0$  temos que  $d(x, a) < \delta$  e  $|f(x) - L| > \varepsilon$ . Seja então  $x \in B(a, \delta)$ ,  $x \neq a$  e considere uma curva  $\gamma : [0, 1) \rightarrow U$  definida por

$$\gamma(t) = t \cdot x + (1 - t)(a - x).$$

Claramente  $\gamma(t) \in U$  para todo  $t$  e  $\gamma(0) = a$ , no entanto

$$|f(\gamma(t)) - L| > \varepsilon.$$

o que é um absurdo. ■

Alguns limites para o caso  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  podem ser estudados mudando as variáveis do problema.

**Teorema 3.7** Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $(a, b) \in U \cup \partial U$ . Então

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$$

se, e somente se, existe uma função  $g : V \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$|f(r \cos(\theta), b + r \sin(\theta)) - L| \leq g(r) \quad \forall \theta$$

e

$$\lim_{r \rightarrow 0} g(r) = 0.$$

*Demonstração.* Segue do teorema do confronto. ■

Faremos aqui alguns exemplos de como utilizar isto.

■ **Exemplo 3.7** • Queremos calcular

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^4}{x^2 + y^2}$$

Sabemos que

$$\left| \frac{x^3 + y^4}{x^2 + y^2} \right| \leq \left| \frac{x^3}{x^2 + y^2} \right| + \left| \frac{\frac{x^3 + y^4}{x^2 + y^2} y^4}{x^2 + y^2} \right| \leq |x| + |y|^2$$

portanto, pelo teorema do confronto, temos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^4}{x^2 + y^2} = 0.$$

No entanto podemos fazer esta conta de outra forma, podemos mudar as coordenadas cartesianas para coordenadas polares

$$x \leftrightarrow r \cos(\theta) \quad y \leftrightarrow r \sin(\theta).$$

Como  $(x, y) \rightarrow 0$  é equivalente a estudar, em coordenadas polares, o caso  $r \rightarrow 0$  temos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^4}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 (\cos(\theta))^3 + r \sin(\theta)^4}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} r (\cos(\theta))^3 + r \sin(\theta)^4 = 0$$

Neste caso, a função  $g(r)$  é  $g(r) = r(1 + r)$ , visto que

$$r(\cos(\theta))^3 + r \sin(\theta)^4 \leq r + r^2 = g(r).$$

• Queremos calcular

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

Se mudamos para coordenadas polares

$$x \leftrightarrow r \cos(\theta) \quad y \leftrightarrow r \sin(\theta).$$

temos que

$$\frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \longrightarrow \frac{\sin(r^2)}{r^2}$$

e

$$\left| \frac{\sin(r^2)}{r^2} - 1 \right| \leq 1 - \cos(r^2)$$

Neste caso, a função  $g(r)$  é  $g(r) = 1 - \cos(r^2)$  e satisfaz as propriedades pedidas. Portanto

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 1.$$

- Nem sempre o argumento funciona, por exemplo, se

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

então

$$\lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \cos(\theta)^2 \sin(\theta)}{r^2 (r^2 \cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2)} = 0$$

o que faria pensar que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ , no entanto sabemos que este limite não existe, de fato, se consideramos as curvas  $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definidas por

$$\gamma_1(t) = (t, 0) \quad \text{e} \quad \gamma_2(t) = (t, t^2)$$

temos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} (f \circ \gamma_1)(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t^4} = 0.$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} (f \circ \gamma_2)(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^4}{2t^4} = \frac{1}{2}.$$

O que mostra que o limite não existe. De fato, o problema aqui é que, para  $r \neq 0$  temos que

$$f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = \frac{r \cos(\theta)^2 \sin(\theta)}{(r^2 \cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2)}$$

e não fica claro que, para  $r$  muito pequeno, a expressão seja controlada por uma  $g(r)$ , pois  $\theta$  pode ser função de  $r$ .

- Queremos calcular

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Sabemos que este limite não existe, de fato, se consideramos as curvas  $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definidas por

$$\gamma_1(t) = (t, 0) \quad \text{e} \quad \gamma_2(t) = (t, t)$$

temos que, se  $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2}$  então

$$\lim_{t \rightarrow 0} (f \circ \gamma_1)(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t^2} = 0.$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} (f \circ \gamma_2)(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^4}{2t^4} = \frac{1}{2}.$$

Podemos ver que o limite depende da forma como nos aproximamos. Se mudamos as coordenadas cartesianas para coordenadas polares

$$x \leftrightarrow r \cos(\theta) \quad y \leftrightarrow r \sin(\theta).$$

Como  $(x, y) \rightarrow 0$  é equivalente a estudar, em coordenadas polares, o caso  $r \rightarrow 0$ , temos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^4 (\cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2)}{r^4} = \lim_{r \rightarrow 0} (\cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2) = \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2$$

Então, o limite depende do valor de  $\theta$ , isto é, da direção ou forma como nos aproximamos do  $(0, 0)$ . ■

Os conceitos de limite e continuidade foram formalizados no século XIX por matemáticos como Cauchy e Weierstrass, que buscavam rigor lógico para as ideias introduzidas no século XVII por Newton e Leibniz. A noção de limite permitiu definir com precisão a derivada e a integral (como veremos depois), resolvendo paradoxos e imprecisões do cálculo inicial como, por exemplo,

- O uso de infinitésimos: Antes de Cauchy e Weierstrass, Newton e Leibniz usavam o conceito de "quantidades infinitamente pequenas" (infinitésimos) para definir a derivada e a integral. Mas não havia uma definição rigorosa de o que exatamente eram essas quantidades. Isso gerava paradoxos e incertezas, como: Como algo pode ser diferente de zero, mas ainda assim "infinitamente pequeno"? Pode-se cancelar infinitésimos como se fossem números reais comuns?  
Essa ambiguidade tornava os argumentos pouco confiáveis do ponto de vista lógico.
- O paradoxo da tangente: Antes da definição formal de derivada como limite, a tangente a uma curva era considerada apenas geometricamente. Mas para curvas com comportamento estranho (como cusps ou pontos angulosos), não era claro se a tangente existia ou como deveria ser definida.
- Paradoxo de Zeno: Os paradoxos de Zeno, como o de Aquiles e a tartaruga, envolvem a ideia de que um movimento contínuo exige completar infinitas tarefas em tempo finito, o que parecia impossível. O conceito moderno de limite resolve isso, mostrando como somas infinitas (séries) podem convergir a valores finitos.
- Problemas com séries infinitas: Sem o conceito rigoroso de limite, somar infinitas parcelas (como numa série de potências ou de Fourier) levava a resultados inconsistentes ou contraditórios. Por exemplo, dependendo da ordem da soma, era possível "provar" que  $1 + 2 + 3 + \dots = \frac{-1}{12}$  (ver função zeta de Riemann) algo que só faz sentido em contextos muito específicos e com definições precisas de convergência.
- Disfunções com continuidade: Antes da definição moderna de continuidade, assumia-se que qualquer função desenhável era contínua. A descoberta de funções contínuas em todo lugar mas não diferenciáveis em nenhum ponto (como a função de Weierstrass) foi chocante e só possível com uma base rigorosa.

Em elaboração

## 4. Derivação e Derivadas parciais

No Cálculo de uma variável, a derivada mede a taxa de variação de uma função em relação à sua única variável independente. No entanto, muitos fenômenos do mundo real dependem de várias variáveis simultaneamente. Por exemplo, a temperatura em uma sala varia conforme a posição  $(x, y, z)$ , e a pressão de um gás depende da temperatura e do volume. Para analisar como essas grandezas variam, precisamos ampliar a noção de derivada para funções de várias variáveis.

Essa generalização permite, entre outras coisas, estudar como uma função varia em relação a uma de suas variáveis enquanto mantemos as demais constantes — ideia que dá origem às chamadas *derivadas parciais*.

Vamos começar ampliando o conceito de derivada para funções vetoriais do tipo  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ , o que já nos permite lidar com trajetórias no espaço. Em seguida, passaremos ao caso mais geral de funções do tipo  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , onde poderemos investigar com mais profundidade o comportamento de  $f$  nas proximidades de um ponto  $a \in U$ , compreendendo como ela varia em diferentes direções e introduzindo conceitos fundamentais como gradiente e diferencial.

Em Cálculo de uma variável, isto é, no caso em que  $n = 1$ , isto era estudado pela derivada da função no ponto  $a$ . Lembramos que a derivada no ponto  $a$  era calculada por um limite da forma

$$f'(a) = \lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}.$$

Aqui,  $f'(a)$  estava relacionado a velocidade de variação. Disto seguiam aproximações da forma

$$f(x) \simeq f(a) + f'(a)(x - a)$$

e, mais ainda, em função de  $f'(a)$  podíamos determinar o comportamento da função ao redor do ponto  $a$ , por exemplo, se  $f'(a) > 0$  falávamos de função crescente.

Este tipo de argumentos pode ser generalizado para curvas, isto é, para funções  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Aqui, como

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)),$$

podemos calcular

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\gamma(t+s) - \gamma(s)}{t} = \left( \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\gamma_1(t+s) - \gamma_1(s)}{t}, \dots, \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\gamma_n(t+s) - \gamma_n(s)}{t} \right)$$

Com isto temos que

**Definição 4.1** Seja  $I$  um intervalo aberto e  $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma curva. A **derivada da função**  $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  **no ponto**  $s$ , que denotamos por  $\gamma'(s)$ , é dada pelo limite

$$\gamma'(s) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\gamma(t+s) - \gamma(s)}{t}$$

quando este existir. O vetor  $\gamma'(s)$  é chamado de **vetor tangente à curva**  $\gamma$  **no ponto**  $\gamma(s)$ .

**Obs.**

Observamos que caso cada uma das funções coordenadas  $\gamma_i: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sejam diferenciáveis temos que

$$\gamma'(s) = (\gamma'_1(s), \dots, \gamma'_n(s)).$$

■ **Exemplo 4.1** • Seja  $\gamma: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$\gamma(t) = (t, t^2)$$

Então

$$\gamma'(t) = (1, 2t)$$

• Seja  $\gamma: (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$$

Então

$$\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$$

• Seja  $\gamma: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$\gamma(t) = (t, 1-t, \sqrt{1-t^2})$$

Então

$$\gamma'(t) = \left(1, -1, \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\right).$$

• Seja  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por

$$\gamma(t) = (a_1, \dots, a_n) + t(v_1, \dots, v_n) = (a_1 + tv_1, \dots, a_n + tv_n),$$

para  $(a_1, \dots, a_n), (v_1, \dots, v_n)$  fixos. Então

$$\gamma'(t) = (v_1, \dots, v_n).$$

■

Temos visto então que para funções  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , quando  $n = 1$ , é possível generalizar o conceito de derivada facilmente. Mas, no caso em que  $n > 1$  generalizar o conceito de derivada como vimos acima não é possível de forma direta: não podemos escrever

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

visto que não podemos definir por  $x - a$  pois é um elemento de  $\mathbb{R}^n$ .

No entanto podemos fazer o seguinte. Considere, para cada  $i = 1 \dots n$  a curva

$$\gamma_i: (-\varepsilon_i, \varepsilon_i) \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \gamma_i(t) = a + te_i$$

onde

$$e_i = (0, \dots, 0, \overbrace{1}^i, 0, \dots, 0)$$

e  $\varepsilon_i > 0$  é um valor adequado de forma tal que o traço de  $\gamma_i$  esteja no domínio de  $f$ . Observamos que  $\gamma_i(0) = a$ .

Com isto, vemos que

$$f \circ \gamma_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$$

ou seja,  $f \circ \gamma_i$  é uma função como as que tratamos em cálculo de uma variável e cujo gráfico está em  $\mathbb{R}^2$ . Portanto, podemos calcular a derivada (caso exista)  $(f \circ \gamma_i)'(0)$  que, no caso, vai representar a inclinação da reta tangente ao gráfico de  $(f \circ \gamma_i)$  no ponto  $t = 0$ .

Com isto temos a seguinte definição

**Definição 4.2** Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto,  $a \in U$  e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função a valores reais. Seja, para cada  $i = 1 \dots n$  a curva

$$\gamma_i : (-\varepsilon_i, \varepsilon_i) \rightarrow \mathbb{R}^n, \gamma_i(t) = a + te_i$$

como acima

A  $i$ -ésima derivada parcial de  $f$  no ponto  $a$  é dada por

$$\partial_i f(a) = (f \circ \gamma_i)'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t},$$

caso o limite exista. Uma função é dita **diferenciável** se todas suas derivadas parciais existem.

Existem varias notações para as derivadas parciais. Deixamos aqui algumas que poderão ser utilizadas neste texto

$$\partial_i f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = D_i f(a).$$

**Obs.**

Fazendo as contas vai ficar claro depois que calcular a derivada parcial com respeito a variável  $x_i$  é derivar com respeito a  $x_i$  considerando as outras variáveis como constantes.

Historicamente, os conceitos de derivação parcial começaram a aparecer no século XVIII, com matemáticos como Euler, Clairaut e Lagrange. O avanço dessas ideias foi impulsionado principalmente pelas necessidades da física — como na formulação das equações do calor, do som e do eletromagnetismo no século XIX. As derivadas parciais tornaram-se essenciais para descrever como grandezas variam em sistemas com múltiplas dimensões.

■ **Exemplo 4.2** Calculamos algumas derivadas parciais.

- Seja  $f(x, y) = x^3 + 2x^2y^3 - 2y^2$  então temos que

$$\begin{aligned} \partial_x f(x, y) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(x+t, y) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (x+t)^3 + 2(x+t)^2 y^3 - 2y^2 \\ &= 3x^2 + 4xy^3. \\ \partial_y f(x, y) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(x, y+t) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} x^3 + 2x^2(y+t)^3 - 2(y+t)^2 \\ &= 6x^2y^2 - 4y. \end{aligned}$$

Por exemplo

$$\partial_x f(1, 1) = 7 \quad \text{e} \quad \partial_y f(0, 0) = 0$$

- Seja  $f(x, y) = x \cos(y) + \cos(xy)$  então temos que

$$\begin{aligned}\partial_x f(x, y) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(x+t, y) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (x+t) \cos(y) + \cos((x+t)y) \\ &= \cos(y) - y \sin(xy). \\ \partial_y f(x, y) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(x, y+t) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} x \cos(y+t) + \cos(x(y+t)) \\ &= -x \sin(y) - x \sin(xy).\end{aligned}$$

Por exemplo

$$\partial_x f(0, \pi) = -1 \quad \text{e} \quad \partial_y f(1, \pi) = 0$$

- Seja  $f(x, y, z) = x + yz + xz$  então temos que

$$\begin{aligned}\partial_x f(x, y, z) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(x+t, y, z) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (x+t) + yz + (x+t)z \\ &= 1 + z. \\ \partial_y f(x, y, z) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(x, y+t, z) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} x + (y+t)z + xz \\ &= z. \\ \partial_z f(x, y, z) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(x, y, z+t) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} x + y(z+t) + x(z+t) \\ &= y + x.\end{aligned}$$

Por exemplo

$$\partial_x f(1, 1, 1) = 2, \quad \partial_y f(1, 1, -1) = -1 \quad \text{e} \quad \partial_z f(0, 0, 1) = 0$$

**Obs.**

A  $i$ -ésima derivada parcial de  $f$  no ponto  $a$  pode ser calculada simplesmente derivando a função  $f$  respeito da variável  $x_i$  supondo as outras variáveis constantes.

Como, pelo visto acima, a derivada parcial é essencialmente um limite, temos que as seguintes propriedades são válidas

**Teorema 4.1** Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto,  $a \in U$  e  $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções a valores reais e assuma que suas derivadas parciais existem. Então

- $\partial_i(f+g)(a) = \partial_i f(a) + \partial_i g(a).$
- $\partial_i(f \cdot g)(a) = \partial_i f(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot \partial_i g(a).$

*Demonstração.* Primeiro observamos que, se  $\partial_i f(a)$  existe então a função

$$g(t) = f(a + te_i)$$

é contínua em 0. De fato, segue de que  $\partial_i f(a) = g'(0)$  existe.

Agora, a prova do teorema segue de observar que

$$\begin{aligned}
\partial_i(f+g)(a) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(f+g)(a+te_i) - (f+g)(a)}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+te_i) - f(a)}{t} + \frac{g(a+te_i) - g(a)}{t} \\
&= \partial_i f(a) + \partial_i g(a).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_i(f \cdot g)(a) &= \frac{(f \cdot g)(a+te_i) - (f \cdot g)(a)}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(f \cdot g)(a+te_i) - f(a+te_i)g(a)}{t} + \frac{f(a)g(a+te_i) - (f \cdot g)(a)}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} f(a+te_i) \frac{g(a+te_i) - g(a)}{t} + f(a) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(a+te_i) - g(a)}{t} \\
&= \partial_i f(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot \partial_i g(a).
\end{aligned}$$

Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto,  $a \in U$  e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função a valores reais. Se, por exemplo, a  $i$ -ésima derivada parcial de  $f$  pode ser definida para todo  $a \in U$  podemos considerar a função

$$\partial_i f : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{em que} \quad \partial_i f : a \rightarrow \partial_i f(a).$$

Podemos então calcular, por exemplo, a derivada parcial  $k$ -ésima desta função no ponto  $a$ , então obtemos

$$\partial_k(\partial_i f)(a)$$

que passaremos a denotar por

$$\partial_k \partial_i f(a).$$

Do mesmo modo, podemos considerar  $\partial_k \partial_i f : U \rightarrow \mathbb{R}$  como uma função e calcular derivadas parciais da mesma. Desta forma, podemos continuar iterando o argumento até a ordem de derivada  $n$  e teremos uma função da forma

$$\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_n} f : U \rightarrow \mathbb{R}.$$

**Definição 4.3** Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto,  $a \in U$  e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função a valores reais. Dizemos que  $f$  é um função é dita **diferenciável de classe  $C^k$**  se todas suas derivadas parciais até ordem  $k$

$$\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} f : U \rightarrow \mathbb{R}$$

existem e são contínuas.

■ **Exemplo 4.3** • Seja  $f(x, y) = x^3 + x^2 y^3 - 2y^2$ , então temos que

$$\partial_x f(x, y) = 3x^2 - 2xy^3$$

$$\partial_y f(x, y) = 3x^2 y^2 - 4y$$

$$\partial_x \partial_x f(x, y) = 6x - 2y^3$$

$$\partial_y \partial_x f(x, y) = 6x^2 y$$

$$\partial_x \partial_y f(x, y) = 6x^2 y$$

$$\partial_y \partial_y f(x, y) = 6x^2 - 4.$$

Observamos que  $\partial_x \partial_y f(x, y) = \partial_y \partial_x f(x, y)$ .

- Seja  $f(x, y) = x^2 + \cos(xy)$ , então temos que

$$\begin{aligned}\partial_x f(x, y) &= 2x - y \sin(xy) \\ \partial_y f(x, y) &= -x \sin(xy) \\ \partial_x \partial_x f(x, y) &= 2 - y^2 \cos(xy) \\ \partial_y \partial_x f(x, y) &= -\sin(xy) - yx \cos(xy) \\ \partial_x \partial_y f(x, y) &= -\sin(xy) - yx \cos(xy) \\ \partial_y \partial_y f(x, y) &= -x^2 \cos(xy).\end{aligned}$$

Observamos que  $\partial_x \partial_y f(x, y) = \partial_y \partial_x f(x, y)$ .

- Considere a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Observamos que  $f$  é contínua. Aqui,

$$\begin{aligned}\partial_x f(x, y) &= \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} \Rightarrow \partial_x f(0, 0) = 0 \\ \partial_y f(x, y) &= \frac{2x^4 y}{(x^2 + y^2)^2} \Rightarrow \partial_y f(0, 0) = 0 \\ \partial_x \partial_x f(x, y) &= \frac{2y^4(-3x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^3} \Rightarrow \partial_x \partial_x f(0, 0) = 0 \\ \partial_y \partial_y f(x, y) &= \frac{2x^4(x^2 - 3y^2)}{(x^2 + y^2)^3} \Rightarrow \partial_y \partial_y f(0, 0) = 0\end{aligned}$$

No entanto, para  $(x, y) \neq 0$  temos

$$\begin{aligned}\partial_y \partial_x f(x, y) &= \frac{8x^3 y^3}{(x^2 + y^2)^3} \\ \partial_x \partial_y f(x, y) &= \frac{8x^3 y^3}{(x^2 + y^2)^3}\end{aligned}$$

Mas

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \partial_y \partial_x f(x, y) = 8 \left( \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy}{(x^2 + y^2)} \right)^3$$

que é um limite que não existe. Portanto, as segundas derivadas não são contínuas na origem.

- Considere a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Observamos que  $f$  é contínua. Aqui,

$$\begin{aligned}\partial_x f(x, y) &= \frac{y(x^4 + 4x^2 y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2} \\ \partial_y f(x, y) &= \frac{x(-y^4 - 4x^2 y^2 + x^4)}{(x^2 + y^2)^2} \\ \partial_x f(0, y) &= -y \\ \partial_y f(x, 0) &= x\end{aligned}$$

Então, para  $(x, y) = 0$  temos

$$\begin{aligned}\partial_y \partial_x f(0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y - 0}{y} = -1 \\ \partial_x \partial_y f(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 0}{x} = 1\end{aligned}$$

Portanto

$$\partial_x \partial_y f(0,0) \neq \partial_y \partial_x f(0,0)$$

Cabe então perguntar quais condições deve satisfazer uma função  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  para que

$$\partial_k \partial_i f(a) = \partial_i \partial_k f(a).$$

Para responder isto temos o seguinte resultado

**Teorema 4.2 — de Clairaut.** Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto,  $a \in U$  e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função a valores reais. Assuma que as funções  $\partial_i \partial_k f$  e  $\partial_k \partial_i f$  são contínuas em  $U$ , então

$$\partial_i \partial_k f(a) = \partial_k \partial_i f(a) \quad \forall a \in U.$$

*Demonstração.* Primeiramente observamos o seguinte, pelo teorema do valor medio, se

$$h_r(t) = f(a + re_k + te_i) - f(a + re_k)$$

onde  $r$  é um número fixo, temos que existe um  $t^* \in [0, t]$  tal que

$$h_r(t) - h_r(0) = h'_r(t^*)t \Leftrightarrow f(a + te_i + re_k) - f(a + re_k) = t \partial_i f(a + re_k + t^* e_i).$$

Análogamente, pelo teorema do valor medio, existe um  $r^* \in [0, r]$

$$\partial_i f(a + t^* e_i + re_k) - \partial_i f(a + t^* e_i) = r \partial_k \partial_i f(a + t^* e_i + r^* e_k).$$

Agora considere a função  $g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$g(t) = [f(a + t(e_i + e_k)) - f(a + te_i)] - [f(a + te_k) - f(a)]$$

Pelo dito acima, e fazendo  $t = r$ , temos que existe um  $t^{**} \in [0, t]$  tal que

$$\begin{aligned} g(t) &= h_t(t) - h_t(0) \\ &= t \partial_i f(a + te_k + t^* e_i) \\ &= t^2 \partial_k \partial_i f(a + t^* e_i + t^{**} e_k). \end{aligned}$$

portanto, como  $0 \leq t^*, t^{**} \leq t$  e  $\partial_k \partial_i f$  é contínua, temos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t)}{t^2} = \partial_k \partial_i f(a).$$

Fazendo mesmo tipo de conta só que agora escrevendo  $g$  como

$$g(t) = [f(a + t(e_i + e_k)) - f(a + te_k)] - [f(a + te_i) - f(a)]$$

chegamos a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t)}{t^2} = \partial_i \partial_k f(a).$$

de onde segue que

$$\partial_k \partial_i f(a) = \partial_i \partial_k f(a) \quad \forall a \in U.$$

Ate agora temos visto como derivar funções da forma

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

ou da forma

$$f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}.$$

Só resta agora ver a derivada de funções da forma

$$f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto,  $a \in U$  e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma função. Observamos que, para cada  $x \in U$ , temos

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)) \in \mathbb{R}^n,$$

Portanto, se fazemos

$$\frac{f(x + te_i) - f(x)}{t} = \left( \frac{f_1(x + te_i) - f_1(x)}{t}, \dots, \frac{f_n(x + te_i) - f_n(x)}{t} \right)$$

Segue disto que, por exemplo, a  $i$ -ésima derivada parcial de  $f$  pode ser definida por

$$\partial_i f(x) = (\partial_i f_1(x), \dots, \partial_i f_n(x)) \in \mathbb{R}^n.$$

De forma similar, podem ser definidas as derivadas superiores

$$\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} f(x) = (\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} f_1(x), \dots, \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} f_n(x)).$$

Como notação, quando por exemplo a derivada com respeito à variável  $i$  se repete  $n$  vezes, escrevemos

$$\partial_i^n f(x)$$

então, podemos ter que a derivada com respeito à variável  $i_j$  se repete  $n_j$  vezes. Escrevemos então

$$\partial_{i_1}^{n_1} \cdots \partial_{i_k}^{n_k} f(x).$$

Formalizamos isto na seguinte definição.

**Definição 4.4** Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma função. Observamos que, para cada  $x \in U$ , temos

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)) \in \mathbb{R}^n,$$

a  $i$ -ésima derivada parcial de  $f$  é dada por

$$\partial_i f(x) = (\partial_i f_1(x), \dots, \partial_i f_n(x)) \in \mathbb{R}^n.$$

e as derivadas superiores são dadas por

$$\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} f(x) = (\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} f_1(x), \dots, \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} f_n(x)).$$

## 5. Regra da cadeia

Em muitos problemas aplicados, é comum compor funções que mapeiam entre espaços de diferentes dimensões, por exemplo, uma trajetória no espaço seguida por um campo de velocidades, ou um modelo físico que relaciona múltiplas grandezas. No cálculo de uma variável, a maneira sistemática de lidar com esse tipo de composição é por meio da **regra da cadeia**. Quando passamos para o contexto de funções vetoriais, torna-se natural buscar uma generalização desse conceito, capaz de descrever como variações nas variáveis de entrada afetam o comportamento da função composta.

Como veremos, essa versão vetorial da regra da cadeia envolve o uso de matrizes e expressa de forma precisa como pequenas mudanças nas variáveis de entrada se propagam através da composição.

Historicamente, a ideia de derivar composições tem raízes no trabalho de Gottfried Wilhelm Leibniz, no século XVII, com sua notação diferencial, e foi posteriormente consolidada nos fundamentos do cálculo multivariável por matemáticos como Cauchy e Jacobi no século XIX.

Vamos ver então, como obter a regra da cadeia neste contexto. Sejam

- $U \subset \mathbb{R}^n$ , um conjunto aberto,
- $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  que admite todas as derivadas parciais.
- $g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$  uma curva cujas funções coordenadas  $g_i : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  são diferenciáveis.

Considere a função  $h : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$h(t) = (f \circ g)(t).$$

Queremos calcular  $\partial_i h$ . Observamos que

$$\begin{aligned} h'(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{h(t+s) - h(t)}{s} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(f \circ g)(t+s) - (f \circ g)(t)}{s} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(f(g_1(t+s), \dots, g_n(t+s)) - f(g_1(t), \dots, g_n(t)))}{s}. \end{aligned}$$

Utilizando o teorema fundamental do cálculo, temos que existe um  $c_i \in [a_i, b_i]$  tal que

$$f(a_1, \dots, a_{i-1}, b_i, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n) = \partial_i f(a_1, \dots, a_{i-1}, c_i, a_{i+1}, \dots, a_n)(b_i - a_i)$$

Podemos inserir isso na expressão acima e obter para  $z_i \in [g(t), g(t+s)]$

$$\begin{aligned}
 h'(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(g_1(t+s), \dots, g_n(t+s)) - f(g_1(t), \dots, g_n(t))}{s} \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{f(g_1(t), \dots, g_{i-1}(t), g_i(t+s), g_{i+1}(t), \dots, g_n(t+s)) - f(g_1(t), \dots, g_{i-1}(t), g_i(t), g_{i+1}(t), \dots, g_n(t+s))}{s} \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (\partial_i f(g_1(t+s), \dots, g_{i-1}(t+s), z_i, g_{i+1}(t+s), \dots, g_n(t+s))) \frac{g_i(t+s) - g_i(t)}{s} \\
 &= \sum_{i=1}^n \partial_i f(g_1(t), \dots, g_n(t)) \lim_{s \rightarrow 0} \frac{g_i(t+s) - g_i(t)}{s} \\
 &= \sum_{i=1}^n \partial_i f(g_1(t), \dots, g_n(t)) g'_i(t).
 \end{aligned}$$

Podemos escrever isto na seguinte notação matricial

$$\frac{d}{dt}(f \circ g)(t) = (\partial_1 f(g(t)) \quad \dots \quad \partial_n f(g(t))) \cdot \begin{pmatrix} g'_1(t) \\ \vdots \\ g'_n(t) \end{pmatrix}$$

Temos provado então que

**Teorema 5.1** Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$ , um conjunto aberto,  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função que admite todas as derivadas parciais e  $g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$  uma curva diferenciável. Então

$$\frac{d}{dt}(f \circ g)(t) = (\partial_1 f(g(t)) \quad \dots \quad \partial_n f(g(t))) \cdot \begin{pmatrix} g'_1(t) \\ \vdots \\ g'_n(t) \end{pmatrix},$$

ou, equivalentemente

$$\frac{d}{dt}(f \circ g)(t) = (\partial_1 f)(g(t))g'_1(t) + (\partial_2 f)(g(t))g'_2(t) + \dots + (\partial_n f)(g(t))g'_n(t).$$

■ **Exemplo 5.1** • Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = x^2 + e^{x+y^2}.$$

e  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$\gamma(t) = (\cos(t), 2 \sin(t))$$

então

$$\begin{aligned}
 (f \circ \gamma)'(t) &= \partial_x f(\gamma(t)) \cdot \gamma'_1(t) + \partial_y f(\gamma(t)) \cdot \gamma'_2(t) \\
 &= (2x + e^{x+y^2})|_{\gamma(t)} (-\sin(t)) + (2ye^{x+y^2})|_{\gamma(t)} \cdot \cos(t) \\
 &= -(2 \cos(t) + e^{\cos(t) + \sin(t)^2}) \sin(t) + 2 \sin(t) \cos(t) e^{\cos(t) + \sin(t)^2}
 \end{aligned}$$

• Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y, z) = xy^3z^2$$

e  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$\gamma(t) = (t, 1+t, \cos(t))$$

então

$$\begin{aligned}
 (f \circ \gamma)'(t) &= \partial_x f(\gamma(t)) \cdot \gamma'_1(t) + \partial_y f(\gamma(t)) \cdot \gamma'_2(t) + \partial_z f(\gamma(t)) \cdot \gamma'_3(t) \\
 &= y^3 z^2|_{\gamma(t)} (1) + (3xy^2 z^2)|_{\gamma(t)} \cdot (1) + (2xy^3 z)|_{\gamma(t)} \cdot (-\sin(t)) \\
 &= (1+t)^3 \cos(t)^2 + 3t(1+t)^2 \cos(t)^2 - 2t(1+t)^3 \cos(t) \sin(t)
 \end{aligned}$$

- Seja  $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , sejam  $a < s < r < b$ , vamos mostrar que existe  $t^* \in (s, r)$

$$\|\gamma(r) - \gamma(s)\| \leq \|\gamma'(t^*)\|(r - s)$$

aplicamos teorema do valor medio em

$$f(t) = \|\gamma(t) - \gamma(t_1)\| = \sqrt{\gamma_1(t)^2 + \cdots + \gamma_n(t)^2}.$$

Utilizando que

$$f'(t) = \frac{[2((\gamma_1(t) - \gamma_1(s))\gamma'_1(t) + \cdots + 2(\gamma_n(t) - \gamma_n(s))\gamma'_n(t))]}{2\sqrt{(\gamma_1(t) - \gamma_1(s))^2 + \cdots + (\gamma_n(t) - \gamma_n(s))^2}}$$

Então

$$|f'(t)| \leq \frac{\|\gamma(t) - \gamma(s)\|}{\|\gamma(t) - \gamma(s)\|} \|\gamma'(t)\| = \|\gamma'(t)\|$$

utilizando isto, junto ao teorema do valor médio que garante a existência de um  $t^*$  tal que

$$|f(r) - f(s)| = f'(t^*)(r - s),$$

temos o resultado buscado. ■

Consideremos agora o caso em que

- $U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^m$  dois conjuntos abertos,
- $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  que admite todas as derivadas parciais.
- $g : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$  uma função cujas funções coordenadas  $g_i : V \rightarrow \mathbb{R}$  são diferenciáveis.
- $a \in U$ .

Observamos que

$$g(x_1, \dots, x_n) = (g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n))$$

Por exemplo, se  $a = (a_1, \dots, a_n)$  podemos calcular a derivada da função

$$h_i(x_j) = f \circ g(a_1, \dots, a_{j-1}, x_j, a_j, \dots, a_n)$$

e temos, utilizando o que foi feito acima, que

$$h'(a_j) = \sum_{k=1}^m \partial_k f(g(a_1, \dots, a_n)) \partial_j g_k(a_1, \dots, a_n) \quad \forall j = 1 \dots n.$$

Antes de continuar, vamos dar um nome e notação para o seguinte

**Definição 5.1** Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto, e  $h : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma função cujas funções coordenadas admitem todas as derivadas parciais. Definimos o **diferencial de  $h$**  como sendo a aplicação  $Dh : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{M}(m \times n, \mathbb{R})$  definida por

$$Dh(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 h_1(a) & \cdots & \partial_m h_1(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 h_n(a) & \cdots & \partial_m h_n(a) \end{pmatrix}.$$

Então, com a notação introduzida acima, se  $b \in \mathbb{R}^n$  temos

$$(Df)(b) = (\partial_1 f(b) \quad \cdots \quad \partial_n f(b)) \quad Dg(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 g_1(a) & \cdots & \partial_m g_1(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 g_n(a) & \cdots & \partial_m g_n(a) \end{pmatrix}$$

e

$$D(f \circ g)(a) = (\partial_1(f \circ g)(a), \dots, \partial_n(f \circ g)(a))$$

Assim, utilizando os cálculos vistos acima, chegamos na seguinte identidade

$$D(f \circ g)(a) = (Df)(g(a)) \cdot Dg(a).$$

Com isto, temos provado o seguinte teorema

**Teorema 5.2** Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $a \in U$ ,  $V \subset \mathbb{R}^m$  dois conjuntos abertos,  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  que admite todas as derivadas parciais e  $g : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$  uma função diferenciável. Então, em notação matricial,

$$D(f \circ g)(a) = (Df)(g(a)) \cdot Dg(a) \quad \text{onde} \quad a = (a_1, \dots, a_n).$$

Em particular, se denotamos por  $(x_1, \dots, x_m)$  as coordenadas em  $V$ , por  $(y_1, \dots, y_n)$  as coordenadas em  $U$  e

$$g(x_1, \dots, x_m) = (g_1(x_1, \dots, x_m), \dots, g_n(x_1, \dots, x_m)),$$

para todo  $i = 1 \dots m$  temos que a entrada  $i$ -ésima de  $D(f \circ g)(a)$  é dada por

$$\partial_{x_i}(f \circ g)(a) = (\partial_{y_1}f)(g(a))(\partial_{x_i}g_1)(a) + (\partial_{y_2}f)(g(a))(\partial_{x_i}g_2)(a) + \dots + (\partial_{y_n}f)(g(a))(\partial_{x_i}g_n)(a).$$

**Obs.**

- Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $a \in U$ ,  $V \subset \mathbb{R}^m$  dois conjuntos abertos,  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  que admite todas as derivadas parciais e  $g : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$  uma função diferenciável. Neste caso, se  $f = (f_1, \dots, f_k)$  então

$$(f \circ g) = (f_1 \circ g, \dots, f_k \circ g).$$

Como vimos antes, as derivadas parciais de  $(f \circ g)$  são

$$\partial_i(f \circ g) = (\partial_i(f_1 \circ g), \dots, \partial_i(f_k \circ g))$$

Como cada  $\partial_i(f_j \circ g)$  vai obedecer a regra da cadeia, podemos escrever então, de forma geral novamente mesma forma notação matricial,

$$D(f_j \circ g)(a) = (Df_j)(g(a)) \cdot Dg(a) \quad \text{onde} \quad a = (a_1, \dots, a_n).$$

e juntando todas estas linhas numa matriz teremos novamente

$$D(f \circ g)(a) = (Df)(g(a)) \cdot Dg(a) \quad \text{onde} \quad a = (a_1, \dots, a_n).$$

onde  $D(f \circ g)(a)$  é uma matriz de tamanho  $k \times m$ .

- Essa formulação matricial é fundamental para análise de sensibilidade, otimização em várias variáveis e teorias de controle, além de ser pedra angular para o desenvolvimento de métodos numéricos e teoria de sistemas dinâmicos.

■ **Exemplo 5.2** • Considere uma função diferenciável  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f = f(x, y, z)$  e  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $g(u, v) = (g_1(u, v), g_2(u, v), g_3(u, v))$ . Então

$$D(f \circ g)(u, v) = (\partial_u(f \circ g)(u, v) \quad \partial_v(f \circ g)(u, v))$$

$$Df(g(u, v)) = ((\partial_x f)(g(u, v)) \quad (\partial_y f)(g(u, v)) \quad (\partial_z f)(g(u, v)))$$

$$Dg(u, v) = \begin{pmatrix} \partial_u g_1(u, v) & \partial_v g_1(u, v) \\ \partial_u g_2(u, v) & \partial_v g_2(u, v) \\ \partial_u g_3(u, v) & \partial_v g_3(u, v) \end{pmatrix}$$

Então

$$(\partial_u(f \circ g)(u, v) \quad \partial_v(f \circ g)(u, v)) = ((\partial_x f)(g(u, v)) \quad (\partial_y f)(g(u, v)) \quad (\partial_z f)(g(u, v))) \cdot \begin{pmatrix} \partial_u g_1(u, v) & \partial_v g_1(u, v) \\ \partial_u g_2(u, v) & \partial_v g_2(u, v) \\ \partial_u g_3(u, v) & \partial_v g_3(u, v) \end{pmatrix},$$

ou, equivalentemente,

$$\partial_u(f \circ g)(u, v) = (\partial_x f)(g(u, v))\partial_u g_1(u, v) + (\partial_y f)(g(u, v))\partial_u g_2(u, v) + (\partial_z f)(g(u, v))\partial_u g_3(u, v)$$

$$\partial_v(f \circ g)(u, v) = (\partial_x f)(g(u, v))\partial_v g_1(u, v) + (\partial_y f)(g(u, v))\partial_v g_2(u, v) + (\partial_z f)(g(u, v))\partial_v g_3(u, v).$$

- Considere uma função diferenciável  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g(x, y, z) = x + yz$  e  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por  $f(s, t) = (s^2 - t^2, s, t - s)$ . Então

$$\begin{aligned} \partial_s(g \circ f)(s, t) &= \partial_x g(f(s, t)) \cdot \partial_s f_1(s, t) + \partial_y g(f(s, t)) \cdot \partial_s f_2(s, t) + \partial_z g(f(s, t)) \cdot \partial_s f_3(s, t) \\ &= 1 \cdot (2s) + (t - s) \cdot 1 + (s) \cdot (-1) = t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_t(g \circ f)(s, t) &= \partial_x g(f(s, t)) \cdot \partial_t f_1(s, t) + \partial_y g(f(s, t)) \cdot \partial_t f_2(s, t) + \partial_z g(f(s, t)) \cdot \partial_t f_3(s, t) \\ &= 1 \cdot (-2t) + (t - s) \cdot 0 + (s) \cdot (1) = -2t + 2s \end{aligned}$$

Observamos que

$$Dg(f(s, t)) = (\partial_x g(f(s, t)) \quad \partial_y g(f(s, t)) \quad \partial_z g(f(s, t))) = (1 \quad t - s \quad s)$$

$$Df(s, t) = \begin{pmatrix} \partial_s f_1(s, t) & \partial_t f_1(s, t) \\ \partial_s f_2(s, t) & \partial_t f_2(s, t) \\ \partial_s f_3(s, t) & \partial_t f_3(s, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2s & -2t \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$Dg(f(s, t)) \cdot Df(s, t) = (1 \quad t - s \quad s) \cdot \begin{pmatrix} 2s & -2t \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (t \quad -2t + s)$$

- Considere uma função diferenciável  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$g(x, y, z) = (x + y, e^z - x)$$

e  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$f(s, t) = (t^2, t + s, s^2 + t).$$

Então

$$\begin{aligned} \partial_s(g_1 \circ f)(s, t) &= \partial_x g_1(f(s, t)) \cdot \partial_s f_1(s, t) + \partial_y g_1(f(s, t)) \cdot \partial_s f_2(s, t) + \partial_z g_1(f(s, t)) \cdot \partial_s f_3(s, t) \\ &= 1 \cdot (0) + (1) \cdot 1 + (0) \cdot (-1) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_s(g_2 \circ f)(s, t) &= \partial_x g_2(f(s, t)) \cdot \partial_s f_1(s, t) + \partial_y g_2(f(s, t)) \cdot \partial_s f_2(s, t) + \partial_z g_2(f(s, t)) \cdot \partial_s f_3(s, t) \\ &= (-1) \cdot (0) + (0) \cdot 1 + (e^{s^2+t}) \cdot (2s) = 2se^{s^2+t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_t(g_1 \circ f)(s, t) &= \partial_x g_1(f(s, t)) \cdot \partial_t f_1(s, t) + \partial_y g_1(f(s, t)) \cdot \partial_t f_2(s, t) + \partial_z g_1(f(s, t)) \cdot \partial_t f_3(s, t) \\ &= 1 \cdot (2t) + (1) \cdot 1 + (0) \cdot (1) = 2t + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_t(g_2 \circ f)(s, t) &= \partial_x g_2(f(s, t)) \cdot \partial_t f_1(s, t) + \partial_y g_2(f(s, t)) \cdot \partial_t f_2(s, t) + \partial_z g_2(f(s, t)) \cdot \partial_t f_3(s, t) \\ &= (-1) \cdot (2t) + (0) \cdot 1 + (e^{s^2+t}) \cdot (1) = e^{s^2+t} - 2t \end{aligned}$$

Observamos que

$$Dg(f(s, t)) = \begin{pmatrix} \partial_x g_1(f(s, t)) & \partial_y g_1(f(s, t)) & \partial_z g_1(f(s, t)) \\ \partial_x g_2(f(s, t)) & \partial_y g_2(f(s, t)) & \partial_z g_2(f(s, t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & e^{s^2+t} \end{pmatrix}$$

$$Df(s, t) = \begin{pmatrix} \partial_s f_1(s, t) & \partial_t f_1(s, t) \\ \partial_s f_2(s, t) & \partial_t f_2(s, t) \\ \partial_s f_3(s, t) & \partial_t f_3(s, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2t \\ 1 & 1 \\ 2s & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$Dg(f(s, t)) \cdot Df(s, t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & e^{s^2+t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2t \\ 1 & 1 \\ 2s & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2t+1 \\ 2se^{s^2+t} & e^{s^2+t} - 2t \end{pmatrix}$$

- Seja  $U \subset \mathbb{R}^3$  um conjunto aberto e  $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $k \in \mathbb{R}$  uma constante. Assuma que existe uma função  $f : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$F(x, y, f(x, y)) = k$$

Dito de outra forma,  $f(x, y)$  é definido implicitamente por  $F$ . Queremos determinar  $\partial_x f$  e  $\partial_y f$ . Para isto, utilizamos a regra da cadeia. Como

$$\begin{aligned} 0 = \partial_x k &= \partial_x F(x, y, f(x, y)) \\ &= \partial_x F(x, y, f(x, y)) \frac{d}{dx} x + \partial_y F(x, y, f(x, y)) \frac{d}{dx} y \\ &\quad + \partial_z F(x, y, f(x, y)) \left( \partial_x f(x, y) \frac{d}{dx} x + \partial_y f(x, y) \frac{d}{dx} y \right) \\ \Rightarrow 0 &= \partial_x F(x, y, f(x, y)) + \partial_z F(x, y, f(x, y)) \partial_x f(x, y) \Rightarrow \partial_x f(x, y) = \frac{\partial_x F(x, y, f(x, y))}{\partial_z F(x, y, f(x, y))} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = \partial_y k &= \partial_y F(x, y, f(x, y)) \\ &= \partial_y F(x, y, f(x, y)) \frac{d}{dy} x + \partial_y F(x, y, f(x, y)) \frac{d}{dy} y \\ &\quad + \partial_z F(x, y, f(x, y)) \left( \partial_x f(x, y) \frac{d}{dy} x + \partial_y f(x, y) \frac{d}{dy} y \right) \\ \Rightarrow 0 &= \partial_y F(x, y, f(x, y)) + \partial_z F(x, y, f(x, y)) \partial_y f(x, y) \Rightarrow \partial_y f(x, y) = \frac{\partial_y F(x, y, f(x, y))}{\partial_z F(x, y, f(x, y))} \end{aligned}$$

- Seja  $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 6xy$  e assuma que queremos determinar  $\partial_x z(0, 0, 1)$ . Assumimos que  $z$  ode ser definida implicitamente ao redor do ponto  $(0, 0, 1)$  como uma função  $z = z(x, y)$  tal que

$$F(x, y, z(x, y)) = F(0, 0, 1) = 1.$$

Portanto

$$\partial_x z(0, 0) = \frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xz} \Big|_{(0,0,1)} = 0.$$

- Vamos a provar a seguir a "fórmula do tubo de Barkhausen". A formula trata quando temos três quantidades, que denotamos pelas variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$ , e que estão relacionadas pela relação  $F(x, y, z) = 0$  em que  $F$  é uma função a valores reais. Desta forma, podemos assumir que, ímlicitamente, temos definidas as funções

$$x = f(y, z), \quad y = g(x, z) \quad \text{e} \quad z = h(x, y)$$

Isto pode ser assumido pelo menos localmente para pontos próximos de algum ponto  $(a, b, c)$  tal que  $F(a, b, c) = 0$  se assumimos que  $F$  é de classe  $C^1$  e as derivadas parciais  $\partial_x F(a, b, c) \neq 0$ ,  $\partial_y F(a, b, c) \neq 0$  e  $\partial_z F(a, b, c) \neq 0$  (isto pode ser visto como o teorema da função implícita).

Pelo que vimos acima, aplicada a cada caso, temos

$$\begin{aligned} \partial_y x &= \partial_y f(b, c) = -\frac{\partial_y F(a, b, c)}{\partial_x F(a, b, c)} \\ \partial_x z &= \partial_x h(a, b) = -\frac{\partial_x F(a, b, c)}{\partial_z F(a, b, c)} \\ \partial_z y &= \partial_z g(a, c) = -\frac{\partial_z F(a, b, c)}{\partial_y F(a, b, c)} \end{aligned}$$

Com isto, multiplicando temos,

$$(\partial_{yx})(\partial_{xz})(\partial_{zy}) = -\frac{\partial_y F(a,b,c)}{\partial_x F(a,b,c)} \frac{\partial_x F(a,b,c)}{\partial_z F(a,b,c)} \frac{\partial_z F(a,b,c)}{\partial_y F(a,b,c)} = -1.$$

- Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $C^2$ . Defina

$$u(x,t) = f(x-at)$$

Então

$$\partial_t u(x,t) = -af'(x-at)$$

$$\partial_t^2 u(x,t) = a^2 f''(x-at)$$

$$\partial_x u(x,t) = f'(x-at)$$

$$\partial_x^2 u(x,t) = f''(x-at)$$

de onde segue que  $u$  satisfaz a equação do calor:

$$\partial_t^2 u(x,t) = a^2 \partial_x^2 u(x,t)$$

■

Em elaboração

## 6. Derivadas direcionais e vetor gradiente

Em muitas situações do mundo real, uma função de várias variáveis representa uma grandeza que varia no espaço, como a temperatura em uma sala ou a altitude em um mapa topográfico. Nessas situações, não basta entender como a função varia ao longo dos eixos coordenados, é natural perguntar: como a função varia ao longo de uma direção qualquer?

A resposta para essa pergunta leva à noção de derivada direcional, que mede a taxa de variação da função em uma direção específica. Essa derivada generaliza a ideia de derivada parcial e nos permite explorar o comportamento da função em qualquer direção do espaço.

Para organizar essas informações, surge uma ferramenta poderosa: o vetor gradiente. Ele reúne todas as derivadas parciais em um único vetor e aponta na direção de maior crescimento da função, sendo um conceito fundamental tanto na teoria quanto nas aplicações da matemática, da física e da engenharia.

Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma curva da forma

$$g(t) = a + tv$$

isto é, uma curva cujo traço é parte de uma reta que passa pelo ponto  $a$  e é paralela ao vetor  $v$ . Vamos assumir, para  $v$  indique uma unidade de distância, que  $\|v\| = 1$ . Isto último permite que

$$d(g(t+1), g(t)) = \|v\| = 1.$$

Então, podemos estudar o comportamento da função, ou a variação da função, no ponto  $a$  na direção do vetor  $v$  calculando

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(g(t)) - f(g(0))}{t}.$$

Isto motiva a seguinte definição

**Definição 6.1** Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e  $v \in \mathbb{R}^n$  um vetor tal que  $\|v\| = 1$ . Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. A derivada direcional de  $f$  no ponto  $a$  e na direção de  $v$  é dada por

$$D_v f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t},$$

quando o limite existir.

Obs.

- Se  $f$  é diferenciável, pela regra da cadeia, temos que

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(g(t)) = Df(g(0)) \cdot g'(0) = Df(a) \cdot v$$

Em particular, observamos que se  $v = e_i$  temos que

$$Df(a) \cdot e_i = \partial_i f(a).$$

Portanto, a derivada direcional generaliza o conceito de derivada parcial.

- Se  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  então todo vetor  $v \in \mathbb{R}^2$  tal que  $\|v\| = 1$  pode ser escrito na forma

$$v = (\cos(\theta), \sin(\theta)).$$

Portanto, a derivada direccional está definida em função do ângulo  $\theta$ .

**Definição 6.2** Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto,  $a \in U$  e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função a valores reais e assuma que suas derivadas parciais existem. O **gradiente de  $f$  no ponto  $a$**  é o vetor que denotamos por

$$\nabla f(a) = (\partial_1 f(a), \dots, \partial_n f(a)).$$

Obs.

- Ao que parece, estamos dando, com a definição acima, um novo nome ao diferencial da função  $f$  que assume valores em  $\mathbb{R}$ , no entanto observamos que o diferencial de uma função é uma função e o vetor gradiente é um vetor. Nesse sentido o vetor gradiente no ponto pode ser visto como o valor que assume o diferencial no ponto. No entanto, as vezes falaremos de **gradiente da função  $f$**  que é sim o diferencial de  $f$  mas pensado como "vetor". Veremos isto com mais detalhe quando estudemos campo vetoriais.
- Historicamente, a noção de derivadas em direções arbitrárias evoluiu com o desenvolvimento do cálculo multivariável no século XIX. O vetor gradiente foi formalizado dentro da geometria diferencial e do cálculo vetorial, tornando-se um elemento muito importante na formulação de leis físicas e equações diferenciais em várias variáveis.

■ **Exemplo 6.1** • Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = x^3 - 3xy + y^2$$

e queremos calcular  $D_v f$  no ponto  $P = (1, 2)$  onde  $v$  é o vetor unitário dado pelo ângulo  $\theta = \pi/6$ . Calculamos

$$\partial_x f(1, 2) = 3x^2 - 3y|_{(1,2)} = -3, \quad \partial_y f(1, 2) = -3x + 2y|_{(1,2)} = 1 \quad \text{e} \quad v = \left( \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right).$$

Então

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 - 3y, -3x + 2y) \Rightarrow \nabla f(1, 2) = (-3, 1),$$

$$D_v f(1, 2) = (-3, 1) \cdot \left( \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right) = \frac{1 - 3\sqrt{3}}{2}.$$

- Seja  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y, z) = xyz + \frac{2}{\pi} \cos[(x + 3y - z)\pi/2]$$

e queremos calcular  $D_v f$  no ponto  $P = (1, 2, -1)$  onde  $v$  é o vetor com a mesma direção e sentido que  $u = (1, 1, 1)$ . Calculamos

$$\partial_x f(1, 2, -1) = yz - \sin((x + 3y - z)\pi/2)|_{(1, 2, -1)} = -2$$

$$\partial_y f(1, 2, -1) = xz - 3\sin((x + 3y - z)\pi/2)|_{(1, 2, -1)} = -1$$

$$\partial_z f(1, 2, -1) = xy + \sin((x + 3y - z)\pi/2)|_{(1, 2, -1)} = 2$$

e

$$v = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1).$$

Então

$$\nabla f(x, y, z) = (yz - \sin((x + 3y - z)\pi/2), xz - 3\sin((x + 3y - z)\pi/2), xy + \sin((x + 3y - z)\pi/2))$$

$$\Rightarrow \nabla f(1, 2, -1) = (-2, -1, 2),$$

$$D_v f(1, 2, -1) = (-2, -1, 2) \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) \right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

- Seja  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = x \sin(yz\pi)$$

e queremos calcular  $D_v f$  no ponto  $P = (1, 3, 0)$  onde  $v$  é o vetor com a mesma direção e sentido que  $u = (1, 2, -1)$ . Calculamos

$$\partial_x f(1, 2, -1) = \sin(yz\pi)|_{(1, 2, -1)} = 0$$

$$\partial_y f(1, 2, -1) = xz\pi \cos(yz\pi)|_{(1, 2, -1)} = -\pi$$

$$\partial_z f(1, 2, -1) = xy\pi \cos(yz\pi)|_{(1, 2, -1)} = 2\pi$$

e

$$v = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1).$$

Então

$$\nabla f(x, y, z) = (\sin(yz\pi), xz\pi \cos(yz\pi), xy\pi \cos(yz\pi))$$

$$\Rightarrow \nabla f(1, 2, -1) = (0, -\pi, 2\pi),$$

$$D_v f(1, 2, -1) = (0, -\pi, 2\pi) \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1) \right) = -\frac{4\pi}{\sqrt{6}}.$$

■

Assumindo que  $f : U \subset \mathbb{R}^n$  é uma função diferenciável e  $a \in U$  e  $v$  é um vetor em  $\mathbb{R}^n$  tal que  $\|v\| = 1$  temos, utilizando a notação de vector gradiente e assumindo que  $\theta \in [0, \pi]$  é o ângulo entre  $\nabla f(a)$  e  $v$ , que

$$D_v f(a) = \nabla f(a) \cdot v = \|\nabla f(a)\| \overbrace{\|v\|}^{=1} \cos(\theta) = \|\nabla f(a)\| \cos(\theta)$$

De onde segue que  $D_v f(a)$  assume su maior valor se  $\theta = 0$  ou, equivalentemente, se

$$v = \frac{1}{\|\nabla f(a)\|} \cdot \nabla f(a).$$

Temos mostrado o seguinte

**Teorema 6.1** Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto,  $f : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável e  $a \in U$ . A derivada direcional de  $f$  no ponto  $a$ ,  $Df_v(a)$ , assumirá seu máximo valor quando  $v$  tenha a mesma direção que o vetor gradiente  $\nabla f(a)$  e o seu menor valor quando  $v$  tenha a mesma direção que o inverso vetor gradiente  $-\nabla f(a)$ , isto é  $-\nabla f(a)$ .

**Obs.**

Pelo teorema do valor medio, temos que se  $g(t) = f(a + tv)$  existe um ponto  $s \in [0, t]$  tal que

$$g(t) - g(0) = g'(s)(t - 0) \quad \Leftrightarrow \quad g(t) - g(0) = t(Df(a + sv) \cdot v) = t(\nabla f(a + sv) \cdot v)$$

Fazendo  $t \rightarrow 0$  vemos que  $\nabla f(a + sv) \rightarrow \nabla f(a)$ , portanto  $\nabla f(a)$  indica a direção de crescimento máximo da função no ponto  $a$ .

■ **Exemplo 6.2** Assuma que a temperatura, num ponto do espaço é dada pela função

$$T(x, y, z) = \frac{80}{1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2}$$

No ponto  $P = (1, 1, -2)$  a temperatura irá aumentar mais rapidamente na direção  $\nabla T(1, 1, -2)$  e a taxa de aumento ■

Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável. Assuma que  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma curva de nível de  $f$ , isto é, existe uma constante  $k \in \mathbb{R}$  tal que

$$f(\gamma(t)) = k \quad \forall t \in I.$$

Neste caso, temos que

$$0 = \frac{d}{dt}(f(\gamma(t))) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \quad \forall t \in I.$$

Isto significa que o **vetor gradiente**  $\nabla f(\gamma(t))$  é ortogonal ao vetor tangente  $\gamma'(t)$  à curva de nível  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

■ **Exemplo 6.3** • Considere o elipsoide de equação

$$\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3.$$

Neste caso,

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} - 3$$

e

$$\nabla f(x, y, z) = \left( \frac{x}{2}, 2y, \frac{2}{9}z \right)$$

A curva de nível obtida da interseção com o plano  $y = 1$  terá por equação

$$\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 2$$

Se queremos achar, por exemplo, a reta tangente a esta curva no ponto  $(2, 1, 3)$ , consideramos

$$g(x, z) = \frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} - 2$$

Então o vetor normal a esta curva, no plano  $y = 1$ , é dado por

$$\nabla g(x, z)|_{(2,3)} = \left( \frac{x}{2}, \frac{2}{9}z \right) \Big|_{(2,3)} = \left( 1, \frac{2}{3} \right)$$

Portanto, o vetor tangente a esta reta é dado por um vetor ortogonal a este último

$$u = \left(-\frac{2}{3}, 1\right)$$

Portanto, a reta tangente a curva de nível, é dada por

$$y = 1 \quad \text{e} \quad \frac{x-2}{-2/3} = \frac{z-3}{1}.$$

Em elaboração.

Em elaboração

## 7. Planos tangentes e aproximações lineares

Em Cálculo de uma variável, a reta tangente a uma função em um ponto fornece sua melhor aproximação linear local — corresponde, na verdade, ao termo linear do polinômio de Taylor. Ao lidarmos com funções de várias variáveis, essa ideia se generaliza: buscamos uma aproximação linear multivariada, cuja interpretação geométrica é dada pelo plano tangente à superfície do gráfico da função. Como veremos, esse plano oferece uma descrição eficiente e precisa do comportamento local da função.

Assim como no caso univariado, todos esses conceitos (plano tangente e aproximação linear) decorrem de uma construção fundamental: o polinômio de Taylor. No contexto multivariado, ele envolve derivadas parciais e fornece uma ferramenta poderosa para estimar valores próximos, compreender variações locais e analisar estabilidade de sistemas.

Historicamente, essas ideias foram desenvolvidas a partir dos estudos de séries de Taylor no século XVIII e, mais sistematicamente, no século XIX com os trabalhos de Cauchy, Lagrange e outros matemáticos que formalizaram o cálculo diferencial em múltiplas variáveis. O plano tangente e a aproximação linear tornaram-se ferramentas fundamentais na geometria diferencial e na modelagem de fenômenos reais.

Por todo o dito anteriormente, antes de começar, vamos a generalizar o polinômio de Taylor que vimos em cálculo de uma variável para o contexto de múltiplas variáveis. A ideia geral era a seguinte, se  $h : (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função que admite  $k$  derivadas, temos que o polinômio de Taylor  $T_n(x)$  de ordem  $n$  era um polinômio da forma

$$h(x) \simeq T_n(x) = h(a) + h'(a)(x-a) + \frac{1}{2}h''(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}h^{(n)}(a)(x-a)^n + R(n, x, h^{(n+1)}(x)).$$

onde

$$R(n, x, h^{(n+1)}(x)) = \frac{1}{(n+1)!}h^{(n+1)}(z)(x-a)^{n+1} \quad \text{para algum } z \in [a, x].$$

era o resto.

■ **Exemplo 7.1** • No caso em que  $n = 1$  escrevemos o polinômio de Taylor  $T_1(x)$  como

$$h(x) \simeq T_1(x) = h(a) + h'(a)(x-a) + \frac{1}{2}h''(z)(x-a)^2$$

para  $z \in [a, x]$ .

- No caso em que  $n = 2$  escrevemos o polinômio de Taylor  $T_2(x)$  como

$$h(x) \simeq T_2(x) = h(a) + h'(a)(x-a) + \frac{1}{2}h''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{6}h'''(a)(x-a)^3$$

para  $z \in [a, x]$ .

■

Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável. Temos visto que o gráfico da função é um conjunto  $\text{graf}(f) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , onde um ponto desta região é da forma

$$(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n))$$

Seja  $a = (a_1, \dots, a_n) \in U$ , estudamos o que acontece para  $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$  utilizando a diferença

$$f(x_1, \dots, x_n) - f(a_1, \dots, a_n)$$

Podemos pensar este problema como segue, seja  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno para que a curva  $\gamma : (-\varepsilon, 1 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por

$$\gamma(t) = (a_1, \dots, a_n) + t(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) \in U,$$

esteja bem definida. Denotamos por  $a = (a_1, \dots, a_n)$ .

Então  $f \circ \gamma : (-\varepsilon, 1 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  e, pelo polinômio de Taylor, podemos escrever

$$(f \circ \gamma)(1) - (f \circ \gamma)(0) \simeq (f \circ \gamma)'(0)(1-0) + \frac{1}{2}(f \circ \gamma)''(s)(1-0)^2 + \frac{1}{6}\gamma'''(s).$$

para algum  $s \in [0, 1]$ . Observamos que,

$$\begin{aligned} (f \circ \gamma)(1) &= f(x_1, \dots, x_n) \\ (f \circ \gamma)(0) &= f(a_1, \dots, a_n) \\ (f \circ \gamma)'(0) &= \sum_{i=1}^n (\partial_i f)(\gamma(s)) \cdot (x_i - a_i) \Big|_{s=0} \\ &= \sum_{i=1}^n \partial_i f(a)(x_i - a_i) = \nabla f(a) \cdot (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) \\ (f \circ \gamma)''(0) &= \left( \sum_{i=1}^n \partial_i f(\gamma(s))(x_i - a_i) \right)' \Big|_{s=0} \\ &= \sum_{i,j=1}^n \partial_j \partial_i f(\gamma(0))(x_i - a_i)(x_j - a_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \partial_j \partial_i f(a)(x_i - a_i)(x_j - a_j). \\ (f \circ \gamma)'''(s) &= \left( \sum_{i,j=1}^n \partial_j \partial_i f(\gamma(s))(x_i - a_i)(x_j - a_j) \right)' \Big|_{s=0} \\ &= \sum_{i,j,k=1}^n \partial_k \partial_j \partial_i f(\gamma(s))(x_i - a_i)(x_j - a_j)(x_k - a_k). \end{aligned}$$

De onde segue que

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(a_1, \dots, a_n) + \sum_{i=1}^n \partial_i f(a)(x_i - a_i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \partial_j \partial_i f(z)(x_i - a_i)(x_j - a_j)$$

$$+ \sum_{i,j,k=1}^n \partial_j \partial_i f(\gamma(s))(x_i - a_i)(x_j - a_j)(x_k - a_k)$$

para algum  $s \in [0, 1]$ .

Portanto, podemos escrever

- o **Polinômio de Taylor**  $T_1(x_1, \dots, x_n)$  **de grau 1 de**  $f$  como

$$f(x_1, \dots, x_n) \simeq T_1(x_1, \dots, x_n) = f(a_1, \dots, a_n) + \sum_{i=1}^n \partial_i f(z)(x_i - a_i)$$

para  $z \in B(a, r)$  com  $r < d(x, a)$ .

- o **Polinômio de Taylor**  $T_2(x_1, \dots, x_n)$  **de grau 2 de**  $f$  como

$$f(x_1, \dots, x_n) \simeq T_2(x_1, \dots, x_n) = f(a_1, \dots, a_n) + \sum_{i=1}^n \partial_i f(a)(x_i - a_i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \partial_j \partial_i f(z)(x_i - a_i)(x_j - a_j)$$

para  $z \in B(a, r)$  com  $r < d(x, a)$ .

Por outro lado, assumamos que  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função tal que

$$|\partial_j \partial_i f(z)| \leq K \quad \forall z \in U, \quad \forall i, j = 1 \dots n.$$

Então, se assumirmos que

$$d(x, a) < \varepsilon \ll 1 \quad \text{isto é, estão muito perto um do outro}$$

da expressão do polinômio de Taylor, tiramos que

$$f(x_1, \dots, x_n) \simeq f(a_1, \dots, a_n) + \sum_{i=1}^n \partial_i f(a)(x_i - a_i) \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

onde  $\mathcal{O}(\varepsilon^2) \simeq K\varepsilon^2$ . Portanto, podemos **aproximar a função**  $f$ , para todo  $x \in B(a, \varepsilon)$ , pela função

$$L(x_1, \dots, x_n) = f(a_1, \dots, a_n) + \sum_{i=1}^n \partial_i f(a)(x_i - a_i),$$

que é chamada de **Linearização da função**  $f$  **no ponto**  $a \in U$ . Desta forma, temos que

$$f(x_1, \dots, x_n) \simeq L(x_1, \dots, x_n) \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \quad \text{tal que } d((x_1, \dots, x_n), (a_1, \dots, a_n)) < \varepsilon.$$

**Obs.**

Em muitas situações, especialmente na análise de fenômenos físicos ou na modelagem matemática, não é possível trabalhar diretamente com uma função exata. Nesses casos, procuramos aproximar a função por expressões mais simples que descrevam seu comportamento localmente, isto é, em torno de um ponto específico.

A aproximação linear é a forma mais simples e mais útil dessas aproximações. Para funções de uma variável, isso corresponde à reta tangente: uma função afim que coincide com a função original no ponto de interesse e tem a mesma taxa de variação (derivada).

Para funções de várias variáveis, a ideia é semelhante: buscamos um plano (ou, mais geralmente, um hiperplano) que represente a melhor aproximação linear da função naquele ponto. Esse plano tangente tem a mesma altura e as mesmas variações parciais da função nas direções coordenadas. Em termos práticos, ele nos permite substituir uma função complicada por uma fórmula linear mais simples para estimar valores próximos e analisar comportamentos locais.

Essas aproximações lineares são fundamentais, por exemplo, para:

- estimar o valor de uma função em torno de um ponto conhecido;
- estudar estabilidade em equações diferenciais e sistemas dinâmicos;
- resolver problemas de otimização e encontrar máximos e mínimos locais.

■ **Exemplo 7.2** • Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a função é

$$f(x, y) = e^{xy} - \cos(x + y),$$

Vamos achar o polinômio de Taylor ao redor do ponto  $a = (\pi, 0)$ , observamos que

$$\begin{aligned} f(\pi, 0) &= 1 - (-1) = 2 \\ \partial_x f(\pi, 0) &= ye^{xy} + \sin(x + y)|_{(\pi, 0)} = 0 \\ \partial_y f(\pi, 0) &= xe^{xy} + \sin(x + y)|_{(\pi, 0)} = \pi \\ \partial_x^2 f(\pi, 0) &= y^2 e^{xy} + \cos(x + y)|_{(\pi, 0)} = -1 \\ \partial_y^2 f(\pi, 0) &= x^2 e^{xy} + \cos(x + y)|_{(\pi, 0)} = \pi^2 - 1 \\ \partial_{xy}^2 f(\pi, 0) &= xye^{xy} + e^{yx} + \cos(x + y)|_{(\pi, 0)} = 0 \end{aligned}$$

Então, o polinômio de Taylor de grau 2 é

$$\begin{aligned} T_2(x, y) &= 2 + 0(x - \pi) + \pi(y - 0) + (-1)(x - \pi)^2 + (\pi^2 - 1)(y - 0)^2 + 0(x - \pi)(y - 0) \\ &= 2 + \pi y - (x - \pi)^2 + (\pi^2 - 1)y^2 \\ &= 2 - \pi^2 + \pi y + 2\pi x - x^2 + (\pi^2 - 1)y^2. \end{aligned}$$

A linearização da função será

$$L(x, y) = 2 + \pi y.$$

Temos então que  $f(x, y) \simeq L(x, y)$  para  $(x, y)$  numa vizinhança de  $(\pi, 0)$ .

• Seja  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  a função é

$$f(x, y, z) = x \cos(yz),$$

Vamos achar o polinômio de Taylor ao redor do ponto  $a = (1, 1, 0)$ , observamos que

$$\begin{aligned} f(1, 1, 0) &= 1 \\ \partial_x f(1, 1, 0) &= \cos(yz)|_{(1, 1, 0)} = 1 \\ \partial_y f(1, 1, 0) &= -xz \sin(yz)|_{(1, 1, 0)} = 0 \\ \partial_z f(1, 1, 0) &= -xy \sin(yz)|_{(1, 1, 0)} = 0 \\ \partial_x^2 f(1, 1, 0) &= 0 \\ \partial_y^2 f(1, 1, 0) &= -xz^2 \sin(yz)|_{(1, 1, 0)} = 0 \\ \partial_z^2 f(1, 1, 0) &= -xy^2 \sin(yz)|_{(1, 1, 0)} = 0 \\ \partial_{xy}^2 f(1, 1, 0) &= -z \sin(yz)|_{(1, 1, 0)} = 0 \\ \partial_{xz}^2 f(1, 1, 0) &= -y \sin(yz)|_{(1, 1, 0)} = 0 \\ \partial_{yz}^2 f(1, 1, 0) &= -x \sin(yz) - xzy \cos(yz)|_{(1, 1, 0)} = 0 \end{aligned}$$

Então, o polinômio de Taylor de grau 2 é

$$T_2(x, y, z) = 1 + (x - 1) = x.$$

A linearização da função será

$$L(x, y, z) = 1 + 1(x - 1) = x.$$

Temos então que  $f(x, y, z) \simeq L(x, y, z)$  para  $(x, y, z)$  numa vizinhança de  $(1, 1, 0)$ . ■

A primeira consequência direta deste resultado é a seguinte.

**Teorema 7.1** Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável em  $a$ , então  $f$  é contínua em  $a$ .

*Demonstração.* Observamos, do polinômio de Taylor de grau 1, que

$$|f(x_1, \dots, x_n) - f(a_1, \dots, a_n)| \leq \sum_{i=1}^n |\partial_i f(z)(x_i - a_i)|$$

Tomando limite a ambos lados da expressão acima, temos que

$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x_1, \dots, x_n) - f(a_1, \dots, a_n)| = 0,$$

e, portanto,  $f$  é contínua. ■

Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável. Seja  $a \in U$  então, utilizando o polinômio de Taylor de ordem 1, temos que para algum  $\varepsilon > 0$  e  $x \in B(a, \varepsilon)$  vale

$$f(x_1, \dots, x_n) \simeq f(a_1, \dots, a_n) + \sum_{i=1}^n \partial_i f(a_1, \dots, a_n) \cdot (x_i - a_i)$$

Se denotamos por

$$\Delta z(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) - f(a_1, \dots, a_n), \quad \text{e} \quad \Delta x_i = (x_i - a_i), \quad \forall i = 1 \dots n$$

e definimos a aproximação

$$df(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \partial_i f(a_1, \dots, a_n) \cdot \Delta x_i$$

temos que o erro da aproximação dada pelo polinômio de Taylor será

$$(\Delta z - df)(x_1, \dots, x_n).$$

■ **Exemplo 7.3** Considere o volume de um cone em função da altura  $h$  e do raio  $r$  é dado por

$$V(h, r) = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

Observamos que

$$dV = \frac{2}{3} r h \pi \Delta r + \frac{1}{3} r^2 \pi \Delta h.$$

Suponha que temos um cone de raio  $r = 1$  e altura  $h = 3$ , se aumentamos a altura num  $\delta h$  e o raio num  $\delta r$  temos que

$$dV|_{(1,3)} = 2\pi \delta r + \frac{\pi}{3} \delta h$$

Se procuramos ver quanto devemos variar a altura do cone caso aumentemos o raio em  $\delta r = \frac{1}{100}$  temos que, aproximadamente,

$$0 = 2 \left( \frac{1}{100} \right) + \frac{1}{3} \delta h \quad \Rightarrow \quad \delta h = -\frac{3}{50} \simeq -0,06.$$

O valor exato, que faria  $\Delta V = 0$ , seria aquele que pode ser calculado como segue:

$$\frac{1}{3} \pi \left( \frac{101}{100} \right)^2 (3 + \delta h) = V(1 + 1/100, 3 + \delta h) = V(1, 3) = \pi \quad \Rightarrow \quad \delta h \simeq -0,059$$

Vamos introduzir agora o conceito de **Plano tangente**. Lembramos que

$$(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)), (a_1, \dots, a_n, f(a_1, \dots, a_n)) \in \text{Graf}(f),$$

portanto, se chamamos de

$$x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n) \quad \text{e} \quad a_{n+1} = f(a_1, \dots, a_n)$$

e denotamos por

$$b_1 = \partial_1 f(a), \quad b_n = \partial_n f(a),$$

temos que

$$x_{n+1} - x_n = b_1 \cdot (x_1 - a_1) + \cdots + b_n \cdot (x_n - a_n) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \partial_j \partial_i f(z) (x_i - a_i) (x_j - a_j).$$

Nos concentramos na parte,

$$x_{n+1} - x_n = b_1 \cdot (x_1 - a_1) + \cdots + b_n \cdot (x_n - a_n),$$

e observamos que, é a equação de um plano em  $\mathbb{R}^n$  que pode ser escrita, de forma sintética, como

$$x_{n+1} - x_n = \nabla f(a) \cdot ((x_1 - a_1), \dots, (x_n - a_n)).$$

Esta equação recebe o nome de **Equação do plano tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $a$** .

■ **Exemplo 7.4** • Determinar o plano tangente ao gráfico de  $f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 1\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

no ponto  $a = (1/2, -1/2)$ . Utilizando o visto acima, temos que

$$f(1/2, -1/2) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\partial_x f(1/2, -1/2) = - \frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \Big|_{(1/2, -1/2)} = - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\partial_y f(1/2, -1/2) = - \frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \Big|_{(1/2, -1/2)} = - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Portanto, a equação do plano tangente

$$z - \frac{1}{\sqrt{2}} = - \frac{1}{\sqrt{2}} \left( x - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \left( y + \frac{1}{2} \right) \Rightarrow \sqrt{2}z + x + y = 1$$

• Determinar o plano tangente ao gráfico de  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

no ponto  $a = (2, 4)$ . Utilizando o visto acima, temos que

$$f(2, 4) = -12$$

$$\partial_x f(2, 4) = 2x|_{(2, 4)} = 4$$

$$\partial_y f(2, 4) = -2y|_{(2, 4)} = -8$$

Portanto, a equação do plano tangente

$$z - (-12) = 4(x - 2) - 8(y - 4) \Rightarrow z + 4x + 8y = 28.$$

■

**Teorema 7.2** Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável em  $a = (a_1, \dots, a_n)$ . Para toda curva diferenciável  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$  uma curva tal

$$\gamma(0) = (a_1, \dots, a_n)$$

Então, se  $\tilde{\gamma} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$  é a curva definida por

$$\tilde{\gamma}(t) = (\gamma(t), f(\gamma(t))) \in \text{Graf}(f).$$

temos que

$\tilde{\gamma}'(0)$  é paralelo à equação do plano tangente ao gráfico de  $f$  em  $a$ .

*Demonstração.* Da equação do plano tangente temos que

$$\eta = (\partial_1 f(a), \dots, \partial_n f(a), -1)$$

é o vetor normal. Como

$$\eta \cdot \tilde{\gamma}'(0) = \sum_{i=1}^n \partial_i f(a) \gamma'_i(0) - (f \circ \gamma)'(0) = 0.$$

Temos provado o que queríamos mostrar. ■

**Obs.** O plano tangente é então um plano que intesecta a gráfica de  $f$  no ponto  $(a, f(a))$  e que é paralelo a todo vetor tangente a superfície no ponto  $a$ .

No caso em que a função é dada implicitamente, isto é, quando lidamos com um conjunto da forma

$$\mathcal{C} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, h(x_1, \dots, x_n) = 0\},$$

podemos assumir que, ao redor de um ponto  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{C}$  temos que existe um conjunto  $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$  tal que  $(a_1, \dots, a_{n-1}) \in U$  e

$$x_n = f(x_1, \dots, x_{n-1}) \quad \text{de forma tal que } (x_1, \dots, x_{n-1}, f(x_1, \dots, x_{n-1})) \in \mathcal{C}$$

Pelo que vimos acima, junto a derivação implícita, temos que

$$\partial_i f(a_1, \dots, a_{n-1}) = - \frac{\partial_i h(a_1, \dots, a_n)}{\partial_n h(a_1, \dots, a_n)},$$

Portanto, a equação do plano tangente será

$$x_n - a_n = - \sum_{i=1}^{n-1} \partial_i f(a_1, \dots, a_{n-1})(x_i - a_i),$$

que podemos reescrever como

$$\partial_n h(a_1, \dots, a_n)(x_n - a_n) = - \sum_{i=1}^{n-1} \partial_i h(a_1, \dots, a_n)(x_i - a_i) \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n \partial_i h(a_1, \dots, a_n)(x_i - a_i) = 0.$$

ou, sinteticamente como

$$\nabla h(a_1, \dots, a_n) \cdot (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) = 0.$$

**Obs.** Considere o gráfico da função  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\text{Graf}(f) = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}, x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)\}$$

Se definirmos,

$$F(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = x_{n+1} - f(x_1, \dots, x_n)$$

Então, a equação do plano tangente a  $f$  em  $(a_1, \dots, a_n)$ , descrita anteriormente, pode ser em função do resultado anterior como

$$\nabla F(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) \cdot (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n, x_{n+1} - a_{n+1}) = 0$$

onde  $a_{n+1} = f(a_1, \dots, a_n)$ .

- **Exemplo 7.5** • Considere a superfície definida por

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z), 2x^2 + 3y^2 - 4z^2 = 1\}.$$

Vamos determinar o plano tangente no ponto  $(-1, 1, -1)$ . Para isto observamos que

$$h(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 - 4z^2 - 1 \Rightarrow \nabla h(x, y, z) = (4x, 6y, -8z) \Rightarrow \nabla h(-1, 1, -1) = (-4, 6, 8).$$

O plano tangente à superfície no ponto  $(-1, 1, -1)$  será

$$(-4, 6, 8) \cdot (x - (-1), y - 1, z - (-1)) = 0 \Rightarrow 4x - 6y - 8z = 20.$$

- Considere o gráfico da função  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x, y) = yx^2$ ,

$$\text{Graf}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = yx^2\}$$

Se definirmos,

$$F(x, y, z) = z - x^2y \Rightarrow \nabla F(x, y, z) = (-2xy, -x^2, 1).$$

Então, por exemplo, a equação do plano tangente a  $f$  em  $(1, -2)$ , é dada por

$$\nabla F(1, -2, f(1, -2)) \cdot (x - 1, y + 2, z - f(1, -2)) = 0 \Rightarrow \nabla F(1, -2, -2) \cdot (x - 1, y + 2, z + 2) = 0$$

isto é,

$$(4, -1, 1) \cdot (x - 1, y + 2, z + 2) = 0 \Rightarrow 4x - y + z = 4$$

■

## 8. Valores máximos e mínimos

Em muitos problemas práticos, buscamos encontrar os valores máximos ou mínimos de uma função que depende de várias variáveis — por exemplo, maximizar o lucro de uma empresa, minimizar o custo de produção, ou determinar o ponto mais alto ou mais baixo de uma superfície. Esses pontos são conhecidos como extremos locais ou pontos críticos.

No caso de funções de uma variável, o cálculo desses extremos envolve encontrar os pontos onde a derivada é zero e analisar o comportamento da função nas proximidades desses pontos. Para funções de várias variáveis, esse conceito se generaliza: procuramos os pontos onde todas as derivadas parciais se anulam, isto é, onde o vetor gradiente é zero. Esses pontos são candidatos a máximos, mínimos ou pontos de sela.

Além disso, assim como no cálculo de uma variável, utilizamos derivadas de ordem superior para identificar a natureza desses pontos críticos. No entanto, por lidarmos agora com múltiplas variáveis, há diversas segundas derivadas a serem consideradas. Para organizar essas informações, construímos uma matriz chamada matriz Hessiana, que reúne todas as segundas derivadas parciais, permitindo determinar de forma precisa o tipo de ponto crítico que estamos analisando.

Historicamente, o estudo de máximos e mínimos remonta à Antiguidade, com problemas clássicos na geometria e na física, mas a formulação rigorosa da teoria para funções multivariadas desenvolveu-se a partir do século XVIII, com o avanço do cálculo diferencial por matemáticos como Euler, Lagrange e Laplace. Suas contribuições fundamentaram a otimização multivariada, que hoje é essencial em diversas áreas da ciência e engenharia.

Começamos com as definições

**Definição 8.1** Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto,  $a \in U$  e  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. Dizemos que

- $f$  tem um **mínimo local em**  $a$  se existe um  $\varepsilon > 0$  tal que

$$f(a) \leq f(x) \quad \forall x \in B(a, \varepsilon)$$

- $f$  tem um **mínimo absoluto em**  $a$  se

$$f(a) \leq f(x) \quad \forall x \in U$$

- $f$  tem um **máximo local** em  $a$  se existe um  $\varepsilon > 0$  tal que

$$f(a) \geq f(x) \quad \forall x \in B(a, \varepsilon)$$

- $f$  tem um **máximo absoluto** em  $a$  se

$$f(a) \geq f(x) \quad \forall x \in U$$

Os valores de máximo ou mínimo global de uma função são chamados de **valores extremos**

**Obs.** Os valores de máximo ou mínimo global são também valores de máximo ou mínimo local.

**Teorema 8.1** Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto,  $a \in U$  e  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável. Assuma que  $a \in U$  é um ponto de máximo ou mínimo global, então  $\nabla f(a) = 0$ .

*Demonstração.* Seja  $v \in \mathbb{R}^n$  um vetor e  $a \in U$ . Como  $U$  é aberto, existe um  $\varepsilon > 0$  tal que  $\gamma_v(t) : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ ,  $\gamma_v(t) = a + tv$ , está bem definida. Considere a função diferenciável  $g_v = (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$

$$g_v(t) = f(a + tv).$$

Observamos que, se por exemplo,  $a \in U$  é um mínimo local para  $f$  então 0 é um mínimo local para  $g_v$ . Segue disto que

$$0 = g'_v(0) = v \cdot \nabla f(a).$$

Mas, isto vale para qualquer  $v$ , então  $\nabla f(a) = 0$ . ■

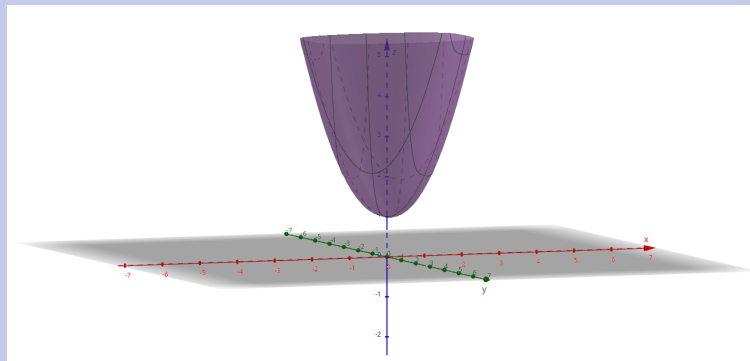
■ **Exemplo 8.1** • Considere a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = x^2 + y^4 + 1$$

Observamos que  $\nabla f(x, y) = (0, 0)$  se, e somente se,  $(x, y) = (0, 0)$ . De fato, este ponto é um ponto de mínimo, visto que, para todo  $(u, v) \in B((0, 0), r)$  temos que

$$1 = f(0, 0) < f(u, v) = 1 + u^2 + v^4.$$

Não há outros pontos de máximos ou mínimos pois o gradiente não se anula em nenhum outro ponto. De fato, o ponto  $(0, 0)$  é um ponto de mínimo global pois todos os valores de que  $f$  assumem são maiores do que  $f(0, 0)$ .



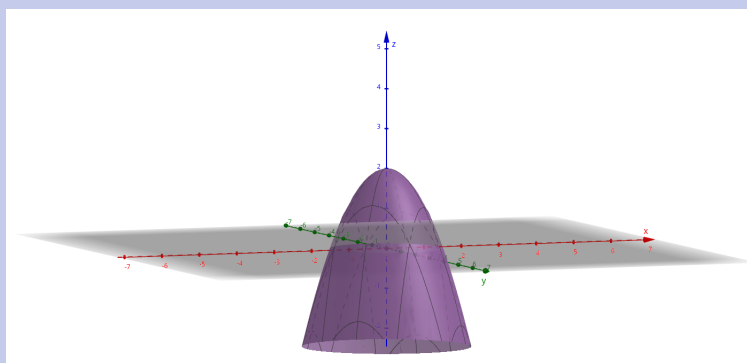
- Considere a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = 2 - x^2 - y^2$$

Observamos que  $\nabla f(x,y) = (0,0)$  se, e somente se,  $(x,y) = (0,0)$ . De fato, este ponto é um ponto de máximo, visto que, para todo  $(u,v) \in B((0,0), r)$  temos que

$$2 = f(0,0) > f(u,v) = 2 - u^2 - v^2.$$

Não há outros pontos de máximos ou mínimos pois o gradiente não se anula em nenhum outro ponto. De fato, o ponto  $(0,0)$  é um ponto de máximo global pois todos os valores de  $f$  assumem são menores do que  $f(0,0)$ .



**Definição 8.2** Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável. Um ponto  $a \in U$  é dito um **ponto crítico de  $f$**  se  $\nabla f(a) = 0$ .

■ **Exemplo 8.2** Nem sempre os pontos críticos são pontos de máximos ou de mínimos. Por exemplo, considere a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x,y) = xy.$$

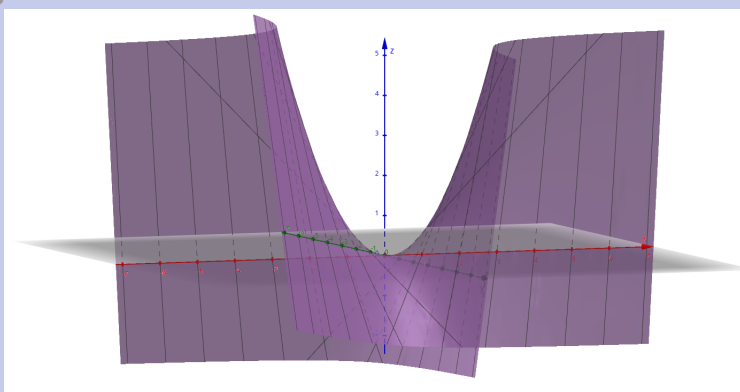
Observamos que

$$\nabla f(x,y) = (y,x) \quad \nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0).$$

Neste ponto  $f(0,0) = 0$ , no entanto,  $(0,0)$  não é ponto de máximo nem mínimo, de fato, para  $0 < u, v \ll 1$  temos que

$$f(u,u) = u^2 > 0 > -v^2 = f(-v,v)$$

Portanto,  $(0,0)$  é ponto de sela.



**Definição 8.3** Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável. Um **ponto de sela** é um ponto  $a \in U$  que satisfaz

- $\nabla f(a) = 0$  (isto é,  $a$  é ponto crítico).
- existe uma bola aberta  $B(\varepsilon, a) \subset U$  e pontos  $x, y \in B(\varepsilon, a)$  tais que

$$f(x) < f(a) < f(y).$$

**Obs.** Um ponto de sela é um ponto onde o gradiente se anula e, no entanto, não é máximo nem mínimo local.

Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto,  $a \in U$  e  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável de classe  $C^2$ . Assuma que  $\nabla f(a) = 0$  e que  $v \in \mathbb{R}^n$  é um vetor qualquer tal que  $\|v\| < \varepsilon \ll 1$ . Do polinômio de Taylor, temos que

$$f(a + tv) = f(a) + \overbrace{\nabla f(a)}^{=0} \cdot v + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \partial_i \partial_j f(a) v_i v_j + \frac{1}{6} \sum_{i,j,k=1}^n \partial_i \partial_j \partial_k f(a + sv) v_i v_j v_k.$$

Observamos que se

$$v = (v_1, \dots, v_n) \quad \text{e} \quad H_f(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 \partial_1 f(a) & \cdots & \partial_1 \partial_n f(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_n \partial_1 f(a) & \cdots & \partial_n \partial_n f(a) \end{pmatrix}$$

podemos escrever

$$\sum_{i,j=1}^n \partial_i \partial_j f(a) v_i v_j = v^T H_f(a) v$$

e, portanto, para o caso em que  $\varepsilon \ll 1$  temos

$$f(a + tv) \simeq f(a) + v H_f(a) v^T$$

**Definição 8.4** Sob a notação acima, a matriz

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 \partial_1 f(a) & \cdots & \partial_1 \partial_n f(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_n \partial_1 f(a) & \cdots & \partial_n \partial_n f(a) \end{pmatrix}$$

é chamada de **matriz Hessiana**

Pelo teorema de Clairaut temos que a matriz Hessiana é simétrica. Por um resultado que será visto em álgebra linear, temos que existe uma matriz  $O$  (tal que  $O^T O = I$ ) e uma matriz diagonal  $D$  (cujas entradas são os autovalores de  $H_f(a)$ ), as duas de tamanho  $n \times n$ , tais que

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad O D O^T = H_f(a)$$

portanto, se  $vO = (w_1, \dots, w_n)$  temos que

$$f(a + tv) \simeq f(a) + \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i^2$$

Analizando isto, vemos que

- Se todos os autovalores  $\lambda_i$  de  $H_f(a)$  são positivos, então, para qualquer escolha da direção de  $v$  ( $\|v\| < 1$ ) temos que

$$f(a+tv) > f(a)$$

e  $f$  tem um mínimo local em  $a$ .

- Se todos os autovalores  $\lambda_i$  de  $H_f(a)$  são negativos, então, para qualquer escolha da direção de  $v$  ( $\|v\| < 1$ ) temos que

$$f(a+tv) < f(a)$$

e  $f$  tem um máximo local em  $a$ .

- Se os autovalores de  $H_f(a)$  são positivos e negativos, então existem direções nas quais

$$f(a+tv) < f(a) \quad \text{ou} \quad f(a+tv) > f(a).$$

Segue então que  $f$  tem um ponto de sela em  $a$ .

**Teorema 8.2** Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto,  $a \in U$  e  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável de classe  $C^2$ .

- Se todos os autovalores de  $H_f(a)$  são positivos,  $f$  tem um mínimo local em  $a$ .
- Se todos os autovalores de  $H_f(a)$  são negativos,  $f$  tem um máximo local em  $a$ .
- Se os autovalores de  $H_f(a)$  são positivos e negativos,  $f$  tem um ponto de sela em  $a$ .

Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto,  $a \in U$  e  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável de classe  $C^2$ . Sabemos que existe uma matriz  $O$  tal que

$$O \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} O^T = \begin{pmatrix} \partial_1 \partial_1 f(a) & \partial_1 \partial_2 f(a) \\ \partial_2 \partial_1 f(a) & \partial_2 \partial_2 f(a) \end{pmatrix}$$

Então, calculando determinante aos dois lados e utilizando que  $OO^T = I$  e, portanto,  $\det(O)\det(O^T) = 1$  temos que

$$\lambda_1 \lambda_2 = \det(H_f(a)) = \partial_1 \partial_1 f(a) \partial_2 \partial_2 f(a) - (\partial_1 \partial_2 f(a))^2$$

Então se os autovalores são, simultaneamente, positivos ou negativos temos que  $\det(H_f(a)) > 0$ . Caso os autovalores tenham sinais diferentes, teremos que  $\det(H_f(a)) < 0$ .

Se, no caso, um vetor  $(u_1, u_2)$  for o autovetor associado ao autovalor  $\lambda_1$  de  $H_f(a)$  teremos que

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 \partial_1 f(a) & \partial_1 \partial_2 f(a) \\ \partial_2 \partial_1 f(a) & \partial_2 \partial_2 f(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 (u_1^2 + u_2^2).$$

Portanto, para determinarmos o sinal de  $\lambda_1$  estudamos

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 \partial_1 f(a) & \partial_1 \partial_2 f(a) \\ \partial_2 \partial_1 f(a) & \partial_2 \partial_2 f(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} &= u_1^2 \partial_1 \partial_1 f(a) + 2 \partial_1 \partial_2 f(a) u_1 u_2 + \partial_2 \partial_2 f(a) u_2^2 \\ &= \partial_1 \partial_1 f(a) \left[ \left( u_1 + \frac{\partial_1 \partial_2 f(a)}{\partial_1 \partial_1 f(a)} u_2 \right)^2 + \left( \frac{\partial_1 \partial_1 f(a) \partial_2 \partial_2 f(a) - (\partial_1 \partial_2 f(a))^2}{\partial_1 \partial_1 f(a)^2} \right) u_2^2 \right] \\ &= \partial_1 \partial_1 f(a) \left[ \left( u_1 + \frac{\partial_1 \partial_2 f(a)}{\partial_1 \partial_1 f(a)} u_2 \right)^2 + \frac{\det(H_f(a))}{\partial_1 \partial_1 f(a)^2} u_2^2 \right] \end{aligned}$$

Então, se  $\det(H_f(a)) > 0$ , o valor de

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 \partial_1 f(a) & \partial_1 \partial_2 f(a) \\ \partial_2 \partial_1 f(a) & \partial_2 \partial_2 f(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

acima será estritamente positivo ou negativo se  $\partial_1 \partial_1 f(a)$  for estritamente positivo ou negativo respectivamente.

Com isto, chegamos ao seguinte critério

- Se  $\det(H_f(a)) > 0$  e  $\partial_1 \partial_1 f(a) < 0$  então  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$  e todos os autovalores de  $H_f(a)$  são negativos, portanto  $f$  tem um máximo local em  $a$ .
- Se  $\det(H_f(a)) > 0$  e  $\partial_1 \partial_1 f(a) > 0$  então  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$  e todos os autovalores de  $H_f(a)$  são positivos, portanto  $f$  tem um mínimo local em  $a$ .
- Se  $\det(H_f(a)) < 0$  então  $\lambda_1 < 0$  e  $\lambda_2 > 0$  (ou viceversa) e, portanto,  $f$  tem um ponto de sela em  $a$ .

**Obs.**

A discussão acima presuppõe que  $\det(H_f(a)) \neq 0$ . Se  $\det(H_f(a)) = 0$  então tudo precisa ser olhado com mais cuidado e detalhe.

Por exemplo, a função  $f(x, y) = x^2$  é um caso. Para esta função os pontos críticos são da forma  $(0, y)$  são pontos de mínimo global ( $f(0, y) = 0 < a^2 = f(a, b)$  sempre que  $a \neq 0$ ). Neste caso

$$H_f(0, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(H_f(0, y)) = 0.$$

Outro caso é o da função  $f(x, y) = x^2 + y^4$ . Para esta função o ponto crítico é  $(0, 0)$  que é um ponto de mínimo global ( $f(0, 0) = 0 < a^2 + b^4 = f(a, b)$  sempre que  $(a, b) \neq (0, 0)$ ). Neste caso

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(H_f(0, 0)) = 0.$$

Ate agora estamos assumindo que  $U \subset \mathbb{R}^n$  é um conjunto aberto. No entanto, se  $U$  for fechado e limitado (isto é contido dentro de uma bola de raio finito), temos um resultado (que não provaremos) que nos garante que "se  $f : U \subset \mathbb{R}^n$  é contínua e  $U$  fechado e limitado, então  $f$  assume um valor máximo global e um valor mínimo global em  $U$ ".

#### Método para achar máximo ou mínimos absolutos

Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto fechado e limitado,  $a \in U$  e  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável de classe  $C^1$ . Para determinar os máximos e mínimos globais de  $f$  em  $U$

- Encontrar os pontos críticos de  $f$  em  $U$  e os valores que  $f$  assume nestes valores.
- Determinamos os máximos e mínimos de  $f$  na fronteira de  $U$ .

O maior dos valores obtidos é o máximo de  $f$  e o menor é o mínimo de  $f$ .

■ **Exemplo 8.3** • Considere a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida pela expressão

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy - 1$$

Observamos que

$$\nabla f(x, y) = (4x^3 - 4y, 4y^3 - 4x) = (x^3 - y, y^3 - x)$$

Portanto  $\nabla f = 0$  se,

$$x^3 = y \Rightarrow x(x^3 - 1) = 0 \Rightarrow x \in \{0, 1, -1\}.$$

Portanto,

$$\nabla f(x, y) = 0 \rightarrow (x, y) \in \{(0, 0), (1, 1), (-1, -1)\}$$

Calculamos agora a Hessiana

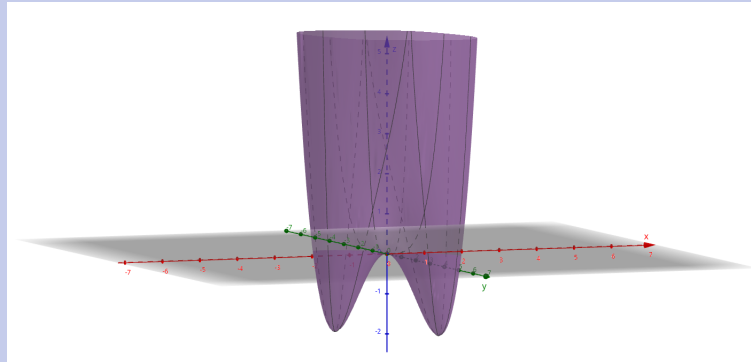
$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

e observamos que

$$\det(H_f(0, 0)) = -16 < 0 \Rightarrow f \text{ tem um ponto de sela}$$

$$\det(H_f(1, 1)) = 128 > 0, \partial_1^2 f(1, 1) = 12 > 0 \Rightarrow f \text{ tem um ponto de mínimo local}$$

$$\det(H_f(-1, -1)) = 128 > 0, \partial_1^2 f(-1, -1) = 12 > 0 \Rightarrow f \text{ tem um ponto de mínimo local}$$



- Considere a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2,$$

e queremos achar os valores de máximo e mínimo no retângulo

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \in [0, 3], y \in [0, 2]\}$$

Para ver isto calculamos primeiramente os pontos críticos,

$$\nabla f(x, y) = (2x - 2y, -2x + 2) \Rightarrow \nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (1, 1) \in R.$$

Como

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(H_f(1, 1)) = -4 < 0$$

temos que o ponto crítico é um ponto de sela. Então estudamos a função na fronteira do retângulo  $R$ . Observamos que

- Nos pontos da forma  $(x, 0)$  temos que

$$f(x, 0) = x^2 \Rightarrow \text{tem um mínimo em } x = 0 \text{ e um máximo em } x = 3.$$

Nestes casos,  $f(0, 0) = 0$  e  $f(3, 0) = 9$ .

- Nos pontos da forma  $(x, 2)$  temos que

$$f(x, 2) = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow \text{tem um mínimo em } x = 2 \text{ e um máximo em } x = 0$$

Nestes casos,  $f(2, 2) = 0$  e  $f(0, 2) = 4$ .

- Nos pontos da forma  $(0, y)$  temos que

$$f(0, y) = 2y \Rightarrow \text{tem um mínimo em } y = 0 \text{ e um máximo em } y = 2$$

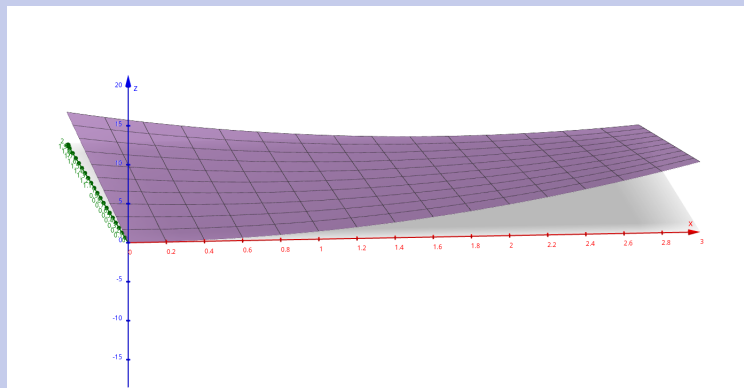
Nestes casos,  $f(0, 0) = 0$  e  $f(0, 2) = 4$ .

- Nos pontos da forma  $(3, y)$  temos que

$$f(3, y) = 9 - 4y \Rightarrow \text{tem um mínimo em } y = 2 \text{ e um máximo em } y = 0$$

Nestes casos,  $f(3, 0) = 9$  e  $f(3, 2) = 1$ .

Portanto, no retângulo  $R$  temos um máximo em  $(3, 0)$  e um mínimo em  $(2, 2)$  e  $(0, 0)$ .



- Considere a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = e^{-(x-1)^2 - (y-1)^2},$$

e queremos achar os valores de máximo e mínimo no primeiro quadrante

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0\}$$

Para ver isto calculamos primeiramente os pontos críticos,

$$\nabla f(x, y) = (-2(x-1), -2(y-1))e^{-(x-1)^2 - (y-1)^2} \Rightarrow \nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (1, 1) \in R.$$

Como

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} (-2 + 4(x-1)^2)e^{-(x-1)^2 - (y-1)^2} & 4(x-1)(y-1)e^{-(x-1)^2 - (y-1)^2} \\ 4(x-1)(y-1)e^{-(x-1)^2 - (y-1)^2} & (-2 + 4(y-1)^2)e^{-(x-1)^2 - (y-1)^2} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(H_f(1, 1)) = 4 > 0$$

Como  $\partial_x^2 f(1, 1) = -2 < 0$  temos que o ponto crítico é um ponto de máximo. Neste caso  $f(1, 1) = 1$ . Então estudamos a função na fronteira do conjunto. Observamos que

- Nos pontos da forma  $(x, 0)$  temos que

$$f(x, 0) = e^{-(x-1)^2 - 1} \Rightarrow \text{tem um máximo em } x = 1 \text{ e não há pontos de mínimo.}$$

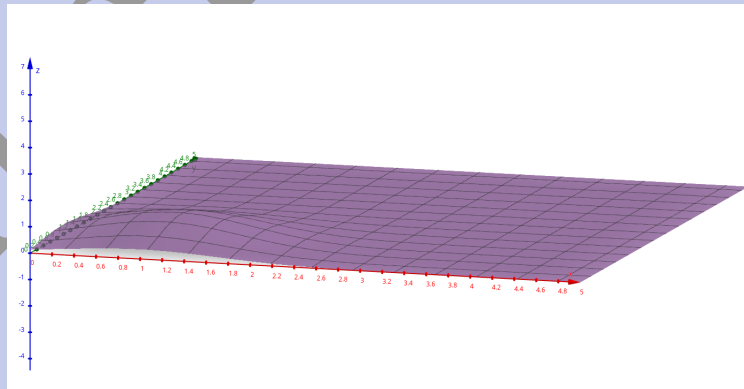
Neste caso,  $f(1, 0) = e^{-1}$ .

- Nos pontos da forma  $(0, y)$  temos que

$$f(0, y) = e^{-(y-1)^2 - 1} \Rightarrow \text{tem um máximo em } y = 1 \text{ e não há pontos de mínimo.}$$

Neste caso,  $f(0, 1) = e^{-1}$ .

Comparando os pontos temos que  $(1, 1)$  é um máximo global visto que para  $\|(x, y)\|$  suficientemente grande os valores de  $f$  estão próximos de 0.



■

## 9. Multiplicadores de Lagrange

Até agora, estudamos máximos e mínimos de funções definidas em conjuntos que geralmente eram abertos ou fechados e continham uma bola aberta em seu interior. Agora, vamos explorar como determinar máximos e mínimos de funções quando existem restrições ou vínculos que limitam as variáveis do problema.

Em muitos problemas práticos, é necessário encontrar os valores máximos ou mínimos de uma função sujeita a condições adicionais — por exemplo, otimizar a produção respeitando limites de recursos, ou maximizar a área de uma figura com perímetro fixo. Nesses casos, o método clássico de derivadas parciais para encontrar extremos não é suficiente, pois precisamos levar em conta as restrições que limitam o domínio possível.

É justamente para esse tipo de problema que surgem os multiplicadores de Lagrange, uma ferramenta poderosa para lidar com otimização sob restrição. A ideia central consiste em transformar o problema restrito em um problema sem restrição, incorporando as condições limitantes à função objetivo por meio de variáveis auxiliares chamadas multiplicadores. Assim, podemos encontrar os pontos críticos da função Lagrangiana, que incorporam as restrições de forma elegante e sistemática.

Portanto, se temos uma função  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , o vínculo pode ser descrito como um subconjunto  $S \subset U$  e a função da qual queremos achar os extremos nada mais é do que a função restrita  $f|_S : S \rightarrow \mathbb{R}$  que é definida por

$$f|_S(x) = f(x) \quad \forall x \in S.$$

O problema geral pode ser bem difícil de ser estudado. Basicamente, o problema está no domínio  $S$ . No entanto, podemos fazer alguma simplificação. Nesse sentido vamos considerar  $S$  como sendo uma superfície de nível particular. Estudamos agora esse problema

Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e  $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funções diferenciáveis. Assuma que  $a \in U$  um ponto de máximo ou mínimo de  $f$  (quando restrita a  $S$ ) tal que  $\nabla g(a) \neq 0$ ,  $k = g(a)$  e a superfície de nível

$$S = \{x \in U, g(x) = k\}.$$

Claramente,  $a \in S$ . Se  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma curva tal que  $\gamma(0) = a$  e  $\gamma(t) \in S$  para todo  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ . Então

$$\frac{d}{dt} g \circ \gamma(t) = \frac{d}{dt} k = 0.$$

Portanto,

$$0 = \frac{d}{dt} g \circ \gamma(0) = \nabla g(a) \cdot \gamma'(0).$$

Se  $f$ , quando restrita a  $S$ , tem um máximo em  $a$ , entonces  $f \circ \gamma$  tem um máximo em  $t = 0$ . Então

$$0 = \left. \frac{d}{dt} f \circ \gamma(t) \right|_{t=0} = \nabla f(a) \cdot \gamma'(0).$$

Então, para toda curva  $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S \subset \mathbb{R}^n$  temos que

$$\gamma'(0) \perp \nabla g(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla f(a) \perp \gamma'(0) = 0.$$

Portanto, como  $\lambda g(a) \neq 0$ , temos que existe um  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que

$$\nabla f(a) = \lambda \cdot \nabla g(a).$$

Temos provado o seguinte resultado

**Teorema 9.1** Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e  $f, g: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funções diferenciáveis. Assuma que  $a \in U$  um ponto de máximo ou mínimo de  $f$  (quando restrita a  $S$ ) tal que  $\nabla g(a) \neq 0$ ,  $k = g(a)$  e o superfície de nível

$$S = \{x \in U, g(x) = k\}.$$

Se  $f$ , quando restrita a  $S$ , tem um máximo em  $(a_1, \dots, a_n) \in S$  (ou mínimo), então existe um  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que

$$\nabla f(a_1, \dots, a_n) = \lambda \nabla g(a_1, \dots, a_n).$$

Com isto temos desenvolvido o seguinte método para achar máximo ou mínimos para funções restritas a vínculos:

#### Método dos multiplicadores de Lagrange

Seja  $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. Queremos determinar os pontos  $(x_1, \dots, x_n)$  que satisfazem uma condição de vínculo da forma  $g(x_1, \dots, x_n) = k$  onde  $g$  é uma função tal que  $\nabla g|_S \neq 0$ .

- Encontrar todos os pontos  $(x_1, \dots, x_n) \in S$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$  tais que

$$\nabla f(a_1, \dots, a_n) = \lambda \nabla g(a_1, \dots, a_n).$$

- Avaliar  $f$  em todos os pontos obtidos. O maior destes valores corresponde a um máximo e o menos a um mínimo.

O maior dos valores obtidos é o máximo de  $f$  e o menor é o mínimo de  $f$ .

**Obs.**

Historicamente, o método foi desenvolvido por Lagrange no século XVIII, como parte de sua obra sobre cálculo de variações e mecânica analítica. Desde então, tem se tornado fundamental em diversas áreas da matemática aplicada, economia, engenharia e ciência da computação, devido à sua capacidade de tratar problemas complexos com múltiplas restrições.

■ **Exemplo 9.1** • Seja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

e considere

$$S = \{(x, y), y - x = 1\}$$

Utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange para

$$g(x, y) = y - x,$$

temos

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \Rightarrow (2x, 2y) = \lambda(-1, 1) \Rightarrow \begin{cases} 2x = -\lambda \\ 2y = \lambda \end{cases} \Rightarrow x = -y.$$

De onde tiramos que

$$1 = y - x \Rightarrow 2y = 1,$$

de onde segue que o único ponto possível é

$$P = (-1/2, 1/2)$$

Como  $f(1/2, -1/2) = 1/2$  e, por exemplo,  $f(0, 1) = 1$  temos que  $P$  é um ponto de mínimo relativo a  $S$ .

- Seja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = x.$$

e considere

$$S = \{(x, y), x^2 + 2y^2 = 3, x \in \mathbb{R}\}$$

Utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange para

$$g(x, y) = x^2 + 2y^2 - 3,$$

temos

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \Rightarrow (1, 0) = \lambda(2x, 4y) \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2\lambda} \\ y = 0 \end{cases}.$$

De onde tiramos que

$$g(x, 0) = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3},$$

de onde segue que o único ponto possível é

$$P = (-\sqrt{3}, 0) \text{ e } Q = (\sqrt{3}, 0)$$

Como  $f(\sqrt{3}, 0) = \sqrt{3}$ , temos que  $P$  é um ponto de máximo e como  $f(-\sqrt{3}, 0) = -\sqrt{3}$  temos que  $Q$  é um ponto de mínimo de  $f$  relativo a  $S$ .

- Suponha que queremos achar o volume da maior caixa retangular de superfície igual a 10 u.a. Para isto seja  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , a função volume, definida por

$$f(x, y, z) = xyz.$$

e considere

$$S = \{(x, y, z), 2(xy + yz + xz) = 10\} = \{(x, y, z), (xy + yz + xz) = 5\}$$

Utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange para

$$g(x, y, z) = xy + yz + xz,$$

temos

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \Rightarrow (yz, xz, xy) = \lambda(y + z, x + z, x + y)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} yz = \lambda(y+z) \\ xz = \lambda(x+z) \\ xy = \lambda(x+y) \end{cases}$$

Observamos que  $x \neq 0$  pois não haveria volume. Análogamente  $y \neq 0$  e  $z \neq 0$ . Fazendo os quocientes correspondentes, temos

$$\frac{y}{x} = \frac{yz}{xz} = \frac{y+z}{x+z}, \Rightarrow y(x+z) = x(y+z) \Rightarrow x = y$$

Análogamente

$$\frac{z}{x} = \frac{yz}{xy} = \frac{y+z}{x+y} \Rightarrow z(x+y) = x(y+z) \Rightarrow x = z$$

De onde tiramos que  $x = y = z$  e

$$5 = 3x^2 \Rightarrow x = \sqrt{5/3},$$

de onde segue que o único ponto possível é

$$P = (\sqrt{5/3}, \sqrt{5/3}, \sqrt{5/3})$$

Como  $f(\sqrt{5/3}, \sqrt{5/3}, \sqrt{5/3}) = (\sqrt{5/3})^3$  e  $f(\sqrt{5}, \sqrt{5}, 0) = 0$  temos que o ponto  $P$  é um ponto de máximo de  $f$  quando restrito a  $S$ .

■



# Integração

10	Integrais sobre regiões do plano . . . . .	81
11	Integrais sobre regiões do espaço . . .	99
12	Mudança de variáveis em integrais .	111
13	Integrais duplas em coordenadas polares 121	
14	Integrais triplas em coordenadas cilíndri- cas . . . . .	127
15	Integrais triplas em coordenadas esféricas 131	
16	Integral ao longo de curvas . . . . .	135
17	Superfícies parametrizadas . . . . .	145
18	Integrais de superfície . . . . .	151

Em elaboração

## 10. Integrais sobre regiões do plano

No cálculo de uma variável, a integral definida serve para calcular áreas sob curvas. Quando avançamos para funções de duas variáveis, surge a necessidade de calcular volumes, áreas e outras grandezas sobre regiões no plano. As integrais duplas foram desenvolvidas para atender a essa necessidade: elas permitem somar infinitesimais contribuições de uma função sobre uma região bidimensional, seja para determinar volumes sob superfícies, massas, centros de massa, ou mesmo cargas distribuídas.

Historicamente, as integrais múltiplas tiveram seu desenvolvimento no século XVIII com os trabalhos de matemáticos como Euler e Lagrange, que estenderam as ideias de integração para múltiplas dimensões. Posteriormente, Cauchy e Riemann formalizaram rigorosamente os conceitos, abrindo caminho para o cálculo moderno.

Assim, as integrais sobre regiões do plano são fundamentais para modelar e resolver problemas reais que envolvem grandezas distribuídas no espaço, como fluxo de líquidos, densidade de material e outras aplicações em física, engenharia e economia.

Vamos começar o estudo da integral para regiões retangulares e depois generalizaremos para outros tipos de regiões.

Considere um retângulo  $R = [a, b] \times [c, d]$  ( $-\infty < a, b, c, d < +\infty$ ) uma função  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ . Particionamos os intervalos que definem  $R$  como segue

$$P_1 : a < x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \quad \text{e} \quad P_2 : c < y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$$

e, com estas partições criamos uma partição de  $R$  em pequenos retângulos

$$P := P_1 \times P_2 = \{R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \quad \forall 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m\}$$

Denotamos por

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad \text{e} \quad \Delta y_j = y_j - y_{j-1} \quad \forall 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m,$$

e definimos a **amplitude da partição**  $P$  por

$$\Delta = \max\{\Delta x_i, \Delta y_j, 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m\}.$$

Observamos que pedir

$$\Delta \rightarrow 0 \quad \text{é equivalente a pedir} \quad \Delta x_i \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \Delta y_j \rightarrow 0.$$

Seja  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e considere os números

$$m_{ij} = \inf_{(x,y) \in R_{ij}} f(x,y) \quad \text{e} \quad M_{ij} = \sup_{(x,y) \in R_{ij}} f(x,y)$$

Com isto, chamamos de **soma superior de Riemann** a

$$U(f, P) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j$$

e de **soma inferior de Riemann** a

$$L(f, P) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n m_{ij} \Delta x_i \Delta y_j$$

A **Integral superior de Riemann** é

$$U(f) = \sup_{P \text{ partição de } R} U(f, P)$$

e a **Integral inferior de Riemann** é

$$L(f) = \inf_{P \text{ partição de } R} L(f, P)$$

**Teorema 10.1** Sejam  $P$  e  $P'$  duas partições de  $R$  tais que  $P \subset P'$ . então

$$L(f, P) \leq L(f, P') \quad \text{e} \quad U(f, P') \leq U(f, P).$$

*Demonstração.* Isto segue, essencialmente do fato que, se  $A \subset B$  então

$$\inf_{z \in B} f(z) \leq \inf_{z \in A} f(z) \quad \text{e} \quad \sup_{z \in A} f(z) \leq \sup_{z \in B} f(z)$$

Então, por exemplo, se  $R_1, R_2 \in P$  e  $R = R_1 \cup R_2 \in P'$

$$\inf_{z \in R} f(z) \cdot \text{Area}(R) \leq \inf_{z \in R_1} f(z) \cdot \text{Area}(R_1) + \inf_{z \in R_2} f(z) \cdot \text{Area}(R_2)$$

$$\sup_{z \in R_1} f(z) \cdot \text{Area}(R_1) + \sup_{z \in R_2} f(z) \cdot \text{Area}(R_2) \leq \sup_{z \in R} f(z) \cdot \text{Area}(R).$$

De onde segue que

$$L(f, P) \leq L(f, P') \quad \text{e} \quad U(f, P') \leq U(f, P).$$

■

**Teorema 10.2** Se  $P = P_1 \times P_2$  e  $P' = P'_1 \times P'_2$  são partições de  $R$  então

$$L(f, P) \leq U(f, P').$$

Portanto  $L(f) \leq U(f)$

*Demonstração.* De fato, seja  $P''_1 = P_1 \cup P'_1$  e  $P''_2 = P_2 \cup P'_2$  então construímos a partição de  $R$  dada por  $P'' = P''_1 \times P''_2$ . Neste caso dizemos que  $P''$  é um refinamento de  $P$  e  $P'$ .

Com isto

$$L(f, P) \leq L(f, P'') \leq U(f, P'') \leq U(f, P')$$

■

**Definição 10.1** Seja  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  uma função sobre  $R = [a, b] \times [c, d]$ . Dizemos que **a função  $f$  é Riemann integrável em  $R$**  se  $U(f) = L(f)$ . Neste caso  $U(f) = L(f)$  recebe o nome de **integral dupla de  $f$  sobre  $R$**  e o denotamos por

$$U(f) = L(f) = \iint_R dA.$$

**Teorema 10.3** Seja  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada definida em um retângulo  $R = [a, b] \times [c, d]$ . Então  $f$  é Riemann integrável se, e somente se, existe uma partição  $P$  de  $R$  tal que

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$$

para todo  $\varepsilon > 0$ .

*Demonstração.* Assuma que  $f$  é integrável então, dado  $\varepsilon > 0$  existem partições  $P, P'$  tais que

$$L(f) - \frac{\varepsilon}{2} \leq L(f, P') \quad \text{e} \quad U(f, P'') \leq U(f) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Seja  $P''$  um refinamento das partições  $P$  e  $P'$ , isto é, uma partição  $P''$  que contém todas as subdivisões de  $P$  e  $P'$ , temos que

$$L(f) - \frac{\varepsilon}{2} \leq L(f, P') \leq L(f, P'') \leq U(f, P'') \leq U(f, P) \leq U(f) + \frac{\varepsilon}{2}$$

de onde  $U(f, P'') - L(f, P'') < \varepsilon$ .

Por outro lado se para cada  $\varepsilon$  existe uma partição  $P$  de  $R$  tal que  $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$  temos que

$$U(f) \leq U(f, P) - L(f, P) + L(f, P) = \varepsilon + L(f, P) \leq \varepsilon + L(f).$$

Como  $\varepsilon$  pode ser arbitrariamente pequeno temos que  $U(f) \leq L(f)$ . De onde segue que  $U(f) = L(f)$ . ■

**Teorema 10.4** Seja  $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Então,  $f$  é Riemann integrável.

*Demonstração.* Assumimos, sem demonstração, o seguinte fato: Como  $f$  é contínua em um conjunto fechado e limitado de  $\mathbb{R}^2$ , ela é uniformemente contínua, isto significa que, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que, para quaisquer  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in [a, b] \times [c, d]$  com

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \delta$$

tem-se

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \frac{\varepsilon}{(b-a)(d-c)}.$$

Dividimos  $[a, b] \times [c, d]$  em uma grade de subretângulos de tamanho no máximo  $\delta$  em cada direção. Ou seja, tomamos uma partição

$$P := P_1 \times P_2 = \{R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]\}$$

tal que cada subretângulo  $R_{ij}$  tem diâmetro menor que  $\delta$ . Como  $f$  é uniformemente contínua, teremos, na notação introduzida acima, que

$$|M_{ij} - m_{ij}| \leq \frac{\varepsilon}{(b-a)(d-c)}.$$

Com isto,

$$|U(f, P) - L(f, P)| \leq \frac{\varepsilon}{(b-a)(d-c)} \cdot \text{área}(R) = \frac{\varepsilon}{(b-a)(d-c)} \cdot (b-a)(d-c) = \varepsilon.$$

Aggora, o resultado segue do teorema anterior. ■

**Obs.** Seja  $f : R = [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável e

$$P_1 : a < x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \quad \text{tal que} \quad \frac{b-a}{n} = x_i - x_{i-1} \quad \forall i = 1 \dots n$$

$$P_2 : c < y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d \quad \text{tal que} \quad \frac{d-c}{m} = y_j - y_{j-1} \quad \forall j = 1 \dots m$$

e, com estas partições criamos uma partição de  $R$  em pequenos retângulos como acima. Aqui

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} \quad \text{e} \quad \Delta y_j = y_j - y_{j-1} = \frac{d-c}{m} \quad \forall 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m,$$

considere agora uma família de pontos

$$Z = \{z_{ij} = (x_i, y_j) \in R_{ij}, 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m\}$$

e defina **soma de Riemann de  $f$  relativa a partição  $P$  e aos pontos  $z_{ij}$**  pela expressão.

$$S(f, P, Z) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n f(z_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j$$

Observamos que cada termo  $f(z_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j$  é o volume de um paralelepípedo de base  $\Delta x_i \times \Delta y_j$  e altura  $f(z_{ij})$ . Neste caso temos que

$$L(f, P) \leq S(f, P, Z) \leq U(f, P)$$

Portanto, seja  $\{(P_k, Z_k), k \in \mathbb{N}\}$  uma família de partições  $P_k$  de  $R$  munida de pontos médios  $Z_k$  e de forma tal que  $\Delta_k \rightarrow 0$ . Então, como  $f$  é contínua e, portanto, integrável, temos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S(f, P_k, Z_k) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} U(f, P_k) = U(f) = \iint_R f \, dA.$$

e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S(f, P_k, Z_k) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} L(f, P_k) = L(f) = \iint_R f \, dA.$$

de onde

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S(f, P_k, Z_k) = \iint_R f \, dA.$$

Embora, do ponto de vista teórico, o cálculo da integral por meio do limite acima seja difícil (como veremos em alguns exemplos a seguir), do ponto de vista computacional, é justamente esse limite que nos permite calcular integrais com o auxílio de um computador, quando não é possível fazê-lo de forma analítica.

Além disso, essa expressão nos ajudará, no futuro, a interpretar certas somas de Riemann como integrais — por exemplo, no cálculo do fluxo de um campo vetorial através de uma superfície.

■ **Exemplo 10.1** • Seja a região  $[0, a] \times [0, b] \subset \mathbb{R}^2$  e a função  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = k$  para  $k$  uma constante.

Considere as partições

$$P_1 : a < x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \quad \text{tal que} \quad x_i = \frac{ia}{n} \quad \forall i = 0 \dots n$$

$$P_2 : c < y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d \quad \text{tal que} \quad y_j = \frac{jb}{m} \quad \forall j = 0 \dots m$$

e, com estas partições criamos uma partição de  $R$  em pequenos retângulos

$$P := P_1 \times P_2 = \{R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m\}$$

$$Z = \{z_{ij} = (x_i, y_j) \in R_{ij}, 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m\}$$

Então

$$S(f, P, Z) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n f(z_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j = k \left( \sum_{i=0}^n \frac{1(i+1-i)a}{n} \right) \left( \sum_{j=0}^m \frac{1(j+1-j)b}{m} \right) = k \cdot a \cdot b.$$

Como isto vale para toda partição, temos que

$$\iint_R f dA = k \cdot a \cdot b.$$

- Seja a região  $[0, a] \times [0, b] \subset \mathbb{R}^2$  e a função  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = kx$  para  $k$  uma constante. Considere as partições

$$P_1 : a < x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \quad \text{tal que} \quad x_i = \frac{ia}{n} \quad \forall i = 0 \dots n$$

$$P_2 : c < y_0 < y_1 < \dots < y_m = d \quad \text{tal que} \quad y_j = \frac{jb}{m} \quad \forall j = 0 \dots m$$

e, com estas partições criamos uma partição de  $R$  em pequenos retângulos

$$P := P_1 \times P_2 = \{R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m\}$$

$$Z = \{z_{ij} = (x_i, y_j) \in R_{ij}, 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m\}$$

Então

$$\begin{aligned} S(f, P, Z) &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n f(z_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n kx_i \Delta x_i \Delta y_j \\ &= k \left( \sum_{i=0}^n \frac{ia}{n} \cdot \frac{1(i+1-i)a}{n} \right) \left( \sum_{j=0}^m \frac{1(j+1-j)b}{m} \right) \\ &= \frac{k \cdot a^2 \cdot b}{n^2} \left( \sum_{i=0}^n i \right) \\ &= \frac{k \cdot a^2 \cdot b}{n^2} \left( \frac{n(n+1)}{2} \right) = \frac{k \cdot a^2 \cdot b}{2} \left( 1 + \frac{1}{n} \right). \end{aligned}$$

Portanto, fazendo a amplitude da partição ir para zero, que é equivalente a pedir  $m, n \rightarrow \infty$  temos que

$$\iint_R f dA = \frac{k \cdot a^2 \cdot b}{2}.$$

■

No caso em que temos  $U$  um conjunto limitado de  $\mathbb{R}^2$ , sabemos que  $U$  está contido num retângulo  $R$  como acima. Se temos uma função  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , observamos que sempre podemos estendê-la a uma função  $\tilde{f} : R \rightarrow \mathbb{R}$  que se anula fora de  $U$ , de fato, se definimos a a função  $\tilde{f} : R \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \in U \\ 0 & \text{se } (x, y) \notin U \end{cases}$$

temos a extensão pedida.

**Definição 10.2** Seja  $U$  um conjunto limitado de  $\mathbb{R}^2$  e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. Utilizando a notação acima, se  $\tilde{f} : R \rightarrow \mathbb{R}$  é a extensão dada por

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \in U \\ 0 & \text{se } (x, y) \notin U \end{cases}$$

Se existe

$$\iint_R \tilde{f} dA,$$

definimos a **integral dupla de  $f$  sobre o conjunto  $U$**  definimos como

$$\iint_U f dA = \iint_R \tilde{f} dA.$$

Vamos procurar agora uma forma de calcular estas integrais. Para isso, primeiramente, vamos ver como simplificar a integral em alguns casos em função do domínio:

**Definição 10.3** Um conjunto  $V \subset \mathbb{R}^n$  tem **medida nula** se para todo  $\varepsilon > 0$  existe um número finito de retângulos  $R_1, \dots, R_k$  de dimensão  $n$  tais que  $V \subset \cup_{j=1}^k R_j$  e

$$\sum_{j=1}^k \text{vol}(R_j) < \varepsilon$$

■ **Exemplo 10.2** • Um conjunto finito de pontos de  $\mathbb{R}^n$  tem medida nula quando  $n \geq 1$ .

- O conjunto dos racionais  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  tem medida nula
- A esfera  $S[a, r] \subset \mathbb{R}^n$  tem medida nula.
- O traço de uma curva  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  tem medida nula quando  $n \geq 2$ .
- $[a, b] \subset \mathbb{R}$  não tem medida nula.
- O conjunto de Cantor (procurar a descrição) não tem medida nula.

**Lema 10.1** Seja  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada. Se  $U$  tem conteúdo nulo então

$$\iint_U f = 0.$$

*Demonstração.* Assuma  $f \geq 0$ . Como  $f$  é limitada temos que existe  $K \in \mathbb{R}$  tal que  $0 \leq f \leq K$ . Por outro lado, como  $U$  tem medida nula, para qualquer  $\varepsilon > 0$  teremos uma partição  $P$  tal que

$$\sum_{R \in P} \text{Area}(R) \leq \varepsilon$$

Então,

$$S(f, P, Z) \leq K \cdot \varepsilon$$

de onde segue que  $S(f, P_n, Z_n) \rightarrow 0$ . ■

**Corolário 10.1** Seja  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável e seja  $V \subset U$  tal que  $U \setminus V$  tem medida nula, então

$$\iint_U f dA = \iint_V f dA.$$

**Obs.**

Os resultados acima garantem que se  $U = V \cup W$  é um conjunto limitado de  $\mathbb{R}^2$  tal que  $V \cap W$  tem medida nula e  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$f(x, y) = \begin{cases} f_1(x, y) & \text{se } (x, y) \in V \\ f_2(x, y) & \text{se } (x, y) \in W \end{cases}$$

Onde

$$f_1(x, y) = f_2(x, y) \quad \forall (x, y) \in V \cap W$$

então podemos escrever  $f$  como soma de  $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : U \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por

$$\tilde{f}_1(x, y) = \begin{cases} f_1(x, y) & \text{se } (x, y) \in V \\ 0 & \text{se } (x, y) \notin V \end{cases} \quad \text{e} \quad \tilde{f}_2(x, y) = \begin{cases} f_2(x, y) & \text{se } (x, y) \notin V \\ 0 & \text{se } (x, y) \in V \end{cases}$$

Como  $V^C \subset W$  e  $V \cap W$  com medida 0 temos, pelo resultado acima, que

$$\begin{aligned} \int_{V^C} \tilde{f}_2 \, dA &= \int_W \tilde{f}_2 \, dA \\ \int_U f \, dA &= \int_V f \, dA + \int_{V^C} f \, dA \\ &= \int_V \tilde{f}_1 \, dA + \int_{V^C} \tilde{f}_2 \, dA \\ &= \int_V \tilde{f}_1 \, dA + \int_W \tilde{f}_2 \, dA. \end{aligned}$$

**Teorema 10.5** Seja  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada definida em um retângulo fechado  $R$ . Seja  $E$  o conjunto de pontos de  $R$  onde  $f$  é descontínua. Se  $E$  é um conjunto de medida nula, então  $f$  é Riemann integrável em  $R$ .

*Demonstração.* Como  $E$  é o conjunto de descontinuidades de  $f$ , então  $f$  é contínua em  $R \setminus E$ . Além disso, sabemos que:

- Se  $f$  é contínua em um subretângulo  $R_i$  de uma partição  $P$ , a diferença entre os valores máximo e mínimo que pode assumir  $f$  em  $R_i$  pode ser tornada arbitrariamente pequena ao refinarmos  $P$ .
- Se  $f$  é descontínua em  $R_i$ , então a diferença entre os valores máximo e mínimo que pode assumir  $f$  em  $R_i$  pode ser grande, mas isso só ocorre nos subretângulos que contêm pontos de  $E$ .

Como  $E$  é de medida nula, podemos escolher uma partição  $P$  tal que a soma das áreas dos subretângulos que contêm pontos de  $E$  seja arbitrariamente pequena e menor que  $\varepsilon$  para  $\varepsilon$  arbitrário. Assim, a contribuição para

$$U(f, P) - L(f, P)$$

desses subretângulos pode ser controlada e feita  $< \varepsilon$ .

Refinando a partição  $P$ , conseguimos fazer

$$U(f, P) - L(f, P) < K\varepsilon$$

para  $K$  uma constante e  $\varepsilon$  arbitrariamente pequeno, o que implica que  $f$  é Riemann integrável. ■

**Teorema 10.6** Sejam  $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções integráveis e  $c \in \mathbb{R}$  então

- Se  $|f|$  é integrável, então

$$\iint_U |f| \, dA \geq \left| \iint_U f \, dA \right|.$$

- $f + cg$  é uma função integrável e

$$\iint_U (f + cg) \, dA = \iint_U f \, dA + c \iint_U g \, dA$$

- Se  $f(x, y) \geq g(x, y)$  então

$$\iint_U f \, dA \geq \iint_U g \, dA$$

- Se o conjunto limitado  $U$  é tal que  $U = U_1 \cup \dots \cup U_n$  com  $U_i \cap U_j = \emptyset$  e a integral de  $f$  existe para cada

$U_i$  temos

$$\iint_U f \, dA = \sum_{i=1}^n \iint_{U_i} f \, dA.$$

*Demonstração.* • Segue de observar que sempre temos

$$S(|f|, P, Z) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |f(z_{ij})| \Delta x_i \Delta y_j \geq \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(z_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j \right| = |S(f, P, Z)|.$$

• Segue de observar que

$$\begin{aligned} S(f + cg, P, Z) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (f(z_{ij}) + cg(z_{ij})) \Delta x_i \Delta y_j \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(z_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j + c \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m g(z_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j \\ &= S(f, P, Z) + cS(g, P, Z) \end{aligned}$$

• Segue de observar que

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(z_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j \geq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m g(z_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j$$

• Segue de observar que podemos escrever

$$f = f_1 + \cdots + f_n$$

em que

$$f_i(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \in U_i \\ 0 & \text{se } (x, y) \notin U_i \end{cases} \quad \forall i = 1 \dots n$$

Então, como

$$\iint_U f_i \, dA = \iint_{U_i} f_i \, dA = \iint_{U_i} f \, dA$$

e

$$\iint_U f \, dA = \sum_{i=1}^n \iint_U f_i \, dA = \sum_{i=1}^n \iint_{U_i} f \, dA.$$

■

**Definição 10.4** Seja  $U$  um conjunto limitado e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável. Definimos

- a **Área de  $U$** , que denotamos por  $Area(U)$ , como sendo a integral da função  $1 : U \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $1(x, y) = 1$  para todo  $(x, y) \in U$ .
- o **valor médio de  $f$**  como sendo o número

$$\bar{f} = \frac{1}{Area(U)} \iint_U f \, dA.$$

**Corolário 10.2** Seja  $U$  um conjunto limitado e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável. Se  $m \leq f(x, y) \leq M$  então

$$m \cdot Area(U) \leq \iint_U f \, dA \leq M \cdot Area(U).$$

*Demonstração.* Segue das propriedades da integral. ■

**Teorema 10.7** Seja  $U \subset \mathbb{R}^2$  um conjunto fechado e limitado tal que para quaisquer quaisquer dois pontos de  $U$  o segmento de reta que une os pontos está contido em  $U$ .

Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua que assume máximo em  $x_M \in U$  e mínimo em  $x_m \in U$ . Então existe um ponto  $x_0 \in U$  tal que

$$f(x_0) = \frac{1}{\text{Area}(U)} \int_U f \, dA.$$

*Demonstração.* Pelo corolário anterior temos que

$$f(x_m) \leq \frac{1}{\text{Area}(U)} \int_U f \, dA \leq f(x_M).$$

Seja  $g : [0, 1] \rightarrow U$  a curva

$$g(t) = tx_M + (1-t)x_m$$

Então  $f \circ g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma curva contínua tal que

$$f(g(0)) = f(x_m) \quad \text{e} \quad f(g(1)) = f(x_M).$$

Então, pelo teorema do valor intermediário em  $\mathbb{R}$  existe um  $t_0$  tal que

$$f \circ g(t_0) = \frac{1}{\text{Area}(U)} \int_U f \, dA.$$

O ponto  $x_0 = g(t_0)$  é o ponto procurado. ■

**Teorema 10.8 — de Fubini.** Seja  $R = [a, b] \times [c, d]$  um retângulo e  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada que é contínua em um conjunto  $U \subset R$  tal que  $R \setminus U$  tem medida nula.

- Se, para todo  $x \in [a, b]$  existe  $g(x) = \int_c^d f(x, y) \, dy$  então

$$\iint_R f \, dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy \, dx = \int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) \, dy \right] dx$$

- Se, para todo  $y \in [c, d]$  existe  $h(y) = \int_a^b f(x, y) \, dx$  então

$$\iint_R f \, dA = \int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx \, dy = \int_c^d \left[ \int_a^b f(x, y) \, dx \right] dy$$

- Se, para todo  $x \in [a, b]$  existe  $g(x) = \int_c^d f(x, y) \, dy$  e para todo  $y \in [c, d]$  existe  $h(y) = \int_a^b f(x, y) \, dx$  então

$$\begin{aligned} \iint_R f \, dA &= \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy \, dx \\ &= \int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) \, dy \right] dx \\ &= \int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx \, dy \\ &= \int_c^d \left[ \int_a^b f(x, y) \, dx \right] dy \end{aligned}$$

*Demonstração.* Mostramos o resultado para o caso em que  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua por ser mais simples. O caso geral é mais técnico e não será mostrado.

Considere uma partição

$$P_2 : \quad c = y_0 < \cdots < y_m = d$$

Então, utilizando a definição de integral junto com o teorema do valor médio temos

$$g(x) = \int_c^d f(x, y) dy \quad (10.1)$$

$$= \sum_{k=1}^m \int_{y_{k-1}}^{y_k} f(x, y) dy \quad (10.2)$$

$$= \sum_{k=1}^m f(x, \tilde{y}_k(x)) (y_k - y_{k-1}) \quad (10.3)$$

Agora, como

$$\begin{aligned} \int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) dy \right] dx &= \int_a^b g(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(\tilde{x}_i) (x_i - x_{i-1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m f(x, \tilde{y}_k(x)) (y_k - y_{k-1}) (x_i - x_{i-1}) \\ &= \iint_R f dA. \end{aligned}$$

Analogamente se mostra o outro caso. ■

■ **Exemplo 10.3** • Seja  $R = [0, 2] \times [1, 2]$  e  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = (x - 3y)$ . Calculamos

$$\begin{aligned} \iint_R f dA &= \int_0^2 \left( \int_1^2 (x - 3y) dy \right) dx \\ &= \int_0^2 \left( -\frac{1}{9} (x - 3y)^3 \right) \Big|_1^2 dx \\ &= -\frac{1}{9} \int_0^2 [(x - 9)^3 - (x - 3)^3] dx \\ &= -\frac{1}{9} \left( \frac{1}{4} (x - 9)^4 - \frac{1}{4} (x - 3)^4 \right) \Big|_0^2 \\ &= -\frac{1}{36} [7^4 - 9^4 - 1 + 3^4] = -\frac{4080}{36}. \end{aligned}$$

• Seja  $R = [0, 1] \times [0, 2]$  e  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = ye^{xy}$ . Calculamos

$$\begin{aligned} \iint_R f dA &= \int_0^1 \int_0^2 ye^{xy} dy dx \int_0^1 \left( \int_0^1 ye^{xy} dx \right) dy \\ &= \int_0^1 (e^{xy}) \Big|_0^1 dy \\ &= \int_0^1 [e^y - 1] dy \\ &= (e^y - y) \Big|_0^1 \\ &= e^2 - 2 - 1 + 0 = e^2 - 1. \end{aligned}$$

- Seja  $R = [0, 4] \times [-1, 2]$  e  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = (1 - xy^2)$ . Calculamos

$$\begin{aligned} \int_R (1 - xy^2) dA &= \int_0^4 \int_{-1}^2 (1 - xy^2) dy dx \\ &= \int_0^4 \left( y - \frac{1}{3} xy^3 \right) \Big|_{-1}^2 dx \\ &= \int_0^4 \left( 3 - \frac{1}{3} 9x \right) dx \\ &= \int_0^4 (3 - 3x) dx = 3x - \frac{3}{2} x^2 \Big|_0^4 \\ &= 12 - 24 = -12 \end{aligned}$$

- Seja  $R = [0, 4] \times [0, 2]$  e  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = (1 - xy^2)$ . Primeiramente observamos que

$$\begin{aligned} 2 \cos \theta = y &\Rightarrow -2 \sin \theta d\theta = dy \Rightarrow \sqrt{4 - y^2} = 2 \sin \theta \\ y = 2 &\Rightarrow \theta = 0 \quad y = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Com isto, calculamos

$$\begin{aligned} \int_0^4 \int_0^2 \sqrt{4 - y^2} dy dx &= \int_0^2 \int_0^4 \sqrt{4 - y^2} dx dy \\ &= \int_0^2 x \Big|_0^4 \sqrt{4 - y^2} dy \\ &= 4 \int_0^2 \sqrt{4 - y^2} dy \\ &= 8 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin \theta (-2 \sin \theta d\theta) \\ &= 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta \\ &= 16 \frac{\theta - \cos \theta \sin \theta}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 4\pi \end{aligned}$$

■

No teorema de Fubini vimos que se  $R = [a, b] \times [c, d]$  e  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua em  $R$  (a menos de um conjunto de medida nula) e limitada, então

$$\iint_R f dA = \int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_c^d \left[ \int_a^b f(x, y) dx \right] dy$$

Por outro lado, lembramos que quando tínhamos uma função  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , para calcular

$$\iint_U f dA$$

achávamos um retângulo  $R$  tal que  $U \subset R$  e definíamos uma função  $\tilde{f} : R \rightarrow \mathbb{R}$  pela expressão

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \in U \\ 0 & \text{se } (x, y) \notin U \end{cases}$$

Então

$$\iint_U f dA = \int_R \tilde{f}(x, y) dA.$$

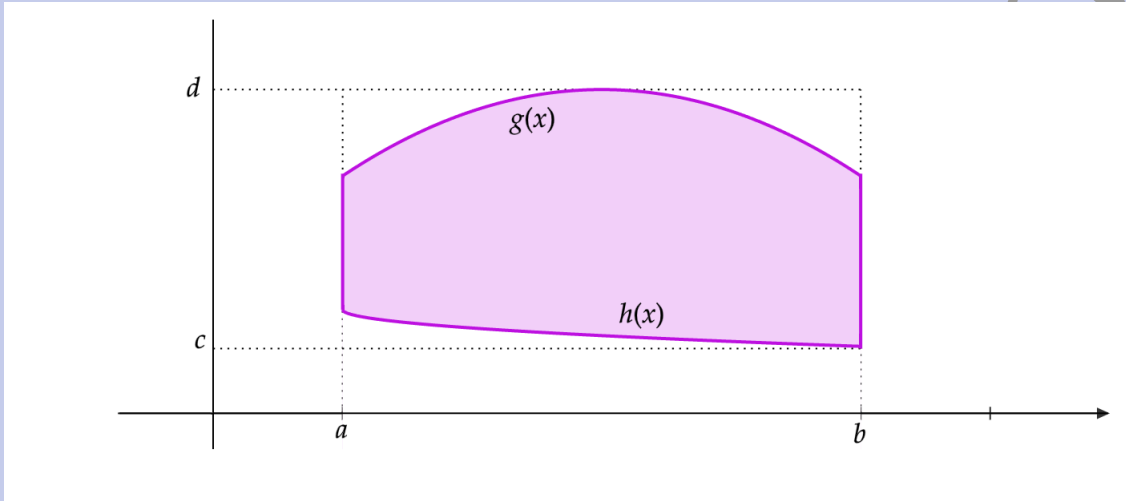
Vamos estudar algumas simplificações que podem ser feitas a esta expressão em função da definição de  $U$ .

• **Região de Tipo I:**

Assuma que  $U \subset R = [a, b] \times [c, d]$  é um conjunto da forma

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

para  $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínuas tais que  $g(x) \leq h(x)$  para todo  $x \in [a, b]$ .



Neste caso, temos

- para todo  $y \in [c, g(x)) \cup (h(x), d]$  teremos que  $(x, y) \notin U$ , portanto  $\tilde{f}(x, y) = 0$ .
- para todo  $y \in [g(x), h(x)]$  temos que  $(x, y) \in U$ , portanto  $\tilde{f}(x, y) = f(x, y)$

Com isto, vemos que

$$\begin{aligned} \int_c^d \tilde{f}(x, y) dy &= \int_c^{g(x)} \overbrace{\tilde{f}(x, y)}^{=0} dy + \int_{g(x)}^{h(x)} \overbrace{\tilde{f}(x, y)}^{=f(x, y)} dy + \int_{h(x)}^d \overbrace{\tilde{f}(x, y)}^{=0} dy \\ &= \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \end{aligned}$$

Portanto, do teorema de Fubini, temos

$$\iint_U f dA = \int_a^b \left[ \int_c^d \tilde{f}(x, y) dy \right] dx = \int_a^b \left[ \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

Isto é

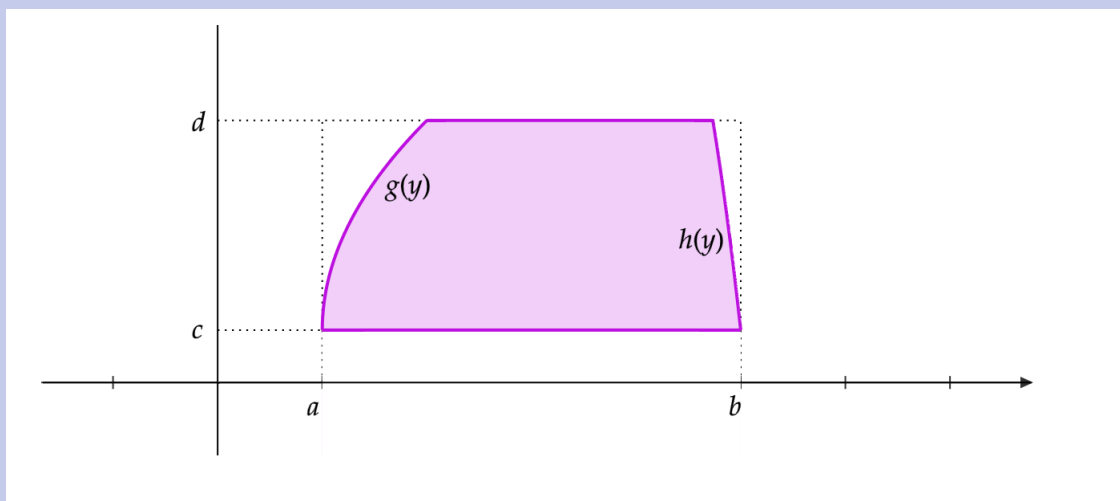
$$\boxed{\iint_U f dA = \int_a^b \left[ \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right] dx.}$$

• **Região de Tipo II:**

Assuma que  $U \subset R = [a, b] \times [c, d]$  é um conjunto da forma

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, c \leq y \leq d, g(y) \leq x \leq h(y)\}$$

para  $g, h : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  contínuas tais que  $g(y) \leq h(y)$  para todo  $y \in [c, d]$ .



Neste caso, temos

- para todo  $x \in [a, g(y)) \cup (h(y), b]$  teremos que  $(x, y) \notin U$ , portanto  $\tilde{f}(x, y) = 0$ .
- para todo  $x \in [g(y), h(y)]$  temos que  $(x, y) \in U$ , portanto  $\tilde{f}(x, y) = f(x, y)$

Com isto, vemos que

$$\begin{aligned} \int_a^b \tilde{f}(x, y) dx &= \int_a^{g(y)} \overbrace{\tilde{f}(x, y)}^{=0} dx + \int_{g(y)}^{h(y)} \overbrace{\tilde{f}(x, y)}^{=f(x, y)} dx + \int_{h(y)}^b \overbrace{\tilde{f}(x, y)}^{=0} dx \\ &= \int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y) dx \end{aligned}$$

Portanto, do teorema de Fubini, temos

$$\iint_U f dA = \int_c^d \left[ \int_a^b \tilde{f}(x, y) dx \right] dy = \int_c^d \left[ \int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y) dx \right] dy$$

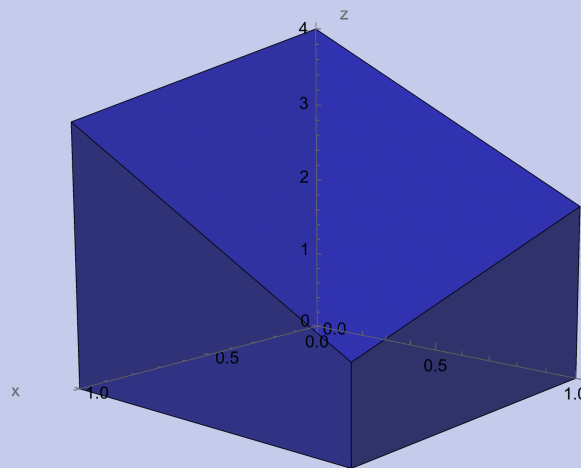
Isto é

$$\boxed{\iint_U f dA = \int_c^d \left[ \int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y) dx \right] dy.}$$

■ **Exemplo 10.4** • Seja  $U$  o triângulo de vértices  $(0, 0)$ ,  $(3, 3)$  e  $(0, 4)$  no plano, e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = x$ . Calculamos

$$\begin{aligned} \iint_T f dA &= \int_0^3 \int_x^{-\frac{x}{3}+4} x dy dx \\ &= \int_0^3 xy \Big|_x^{-\frac{x}{3}+4} dx \\ &= \int_0^3 \left( x \left( 4 - \frac{x}{3} \right) - x^2 \right) dx \\ &= \int_0^3 \left( 4x - \frac{4x^2}{3} \right) dx \\ &= 2x^2 - \frac{4}{9}x^3 \Big|_0^3 \\ &= 18 - 12 = 6 \end{aligned}$$

- Vamos calcular o volume do sólido que se encontra abaixo do plano  $4x + 6y - 2z + 15 = 0$  e acima do retângulo  $R = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1\}$ .



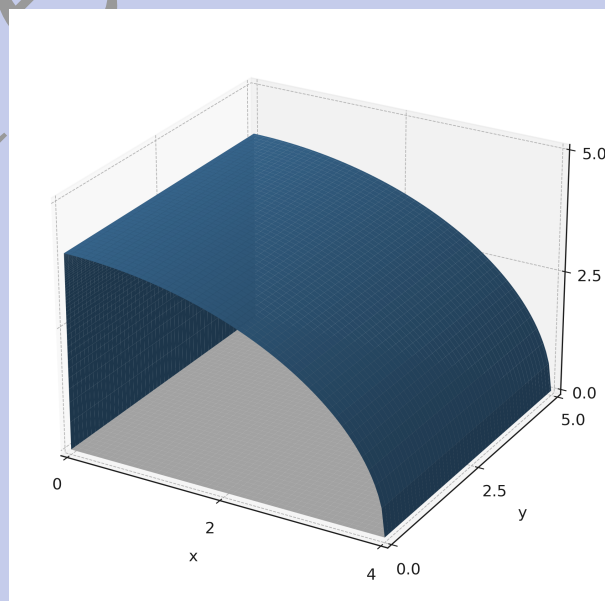
Sabemos que a altura será dada por  $z = 2x + 3y - \frac{15}{2}$  como  $x \in [-1, 2]$  e  $y \in [-1, 1]$  temos que

$$2x \in [-2, 4] \quad \text{e} \quad 3y \in [-3, 3] \implies 2x + 3y \in [-5, 7]$$

De onde  $z = \frac{15}{2} - 2x - 3y \geq 0$ . Com isto

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^2 \int_{-1}^1 -2x - 3y + \frac{15}{2} dy dx = \int_{-1}^2 \left. -2xy - \frac{3}{2}y^2 + \frac{15}{2}y \right|_{-1}^1 dx \\ &= \int_{-1}^2 -4x + 15 dx \\ &= \left. -2x^2 + 15x \right|_{-1}^2 = -6 + 45 = 39 \end{aligned}$$

- Vamos calcular o volume do sólido no primeiro octante limitado pelo cilindro  $z^2 = 16 - x^2$  e pelo plano  $y = 5$ .



$$x = 4 \cos \theta \implies \sqrt{16 - x^2} = 4 \sin \theta \quad \text{e} \quad dx = -4 \sin \theta d\theta$$

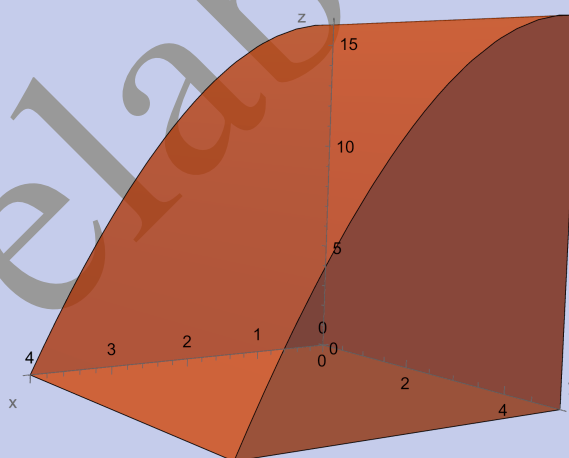
$$x = 0 \implies \theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad x = 4 \implies \theta = 0$$

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} 5 \, dz \, dx = \int_0^4 5\sqrt{16-x^2} \, dx \\
 &= -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 5 \cdot 16 \sin^2 \theta \, d\theta \\
 &= 80 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \, d\theta \\
 &= 80 \left. \frac{\theta - \frac{1}{2} \sin(2\theta)}{2} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = 20\pi
 \end{aligned}$$

Analogamente, poderíamos ter calculado o volume em função da base no plano  $z = 0$ . Neste caso

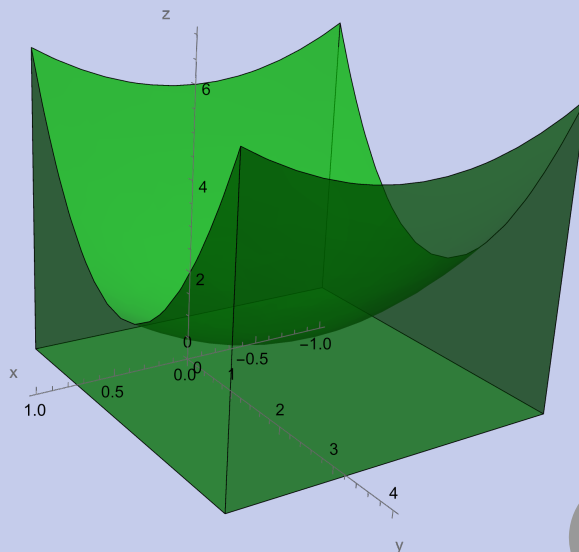
$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^4 \int_0^5 \sqrt{16-x^2} \, dy \, dx = \int_0^4 5\sqrt{16-x^2} \, dx \\
 &= 20\pi
 \end{aligned}$$

- Vamos calcular o volume do sólido no primeiro octante limitado pelo cilindro  $z = 16 - x^2$  e pelo plano  $y = 5$ .



$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^4 \int_0^{16-x^2} 5 \, dz \, dx = \int_0^4 5(16-x^2) \, dx \\
 &= 80x - \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^4 = 320 - \frac{64}{3}.
 \end{aligned}$$

- Vamos calcular o volume do sólido limitado pelo parabolóide  $z = 2 + x^2 + (y-2)^2$  e pelos planos  $z = 1$ ,  $x = 1$ ,  $x = -1$ ,  $y = 0$  e  $y = 4$



$$\begin{aligned}
 V &= \int_{-1}^1 \int_0^4 1 + x^2 + (y-2)^2 dy dx = \int_{-1}^1 (1+x^2)y + \frac{1}{3}(y-2)^3 \Big|_0^4 dx \\
 &= \int_{-1}^1 \left( 4x^2 + \frac{28}{3} \right) dx \\
 &= \frac{4x^3}{3} + \frac{28}{3}x \Big|_{-1}^1 \\
 &= \frac{8}{3} + \frac{56}{3} = \frac{64}{3}
 \end{aligned}$$

- Calculamos a seguinte integral em

$$\iint_D \frac{y}{x^5 + 1} dA$$

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$$

$$\begin{aligned}
 \iint_D \frac{y}{x^5 + 1} dA &= \int_0^1 \int_0^{x^2} \frac{y}{x^5 + 1} dy dx \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{x^5 + 1} \cdot \frac{1}{2} y^2 \Big|_0^{x^2} dx \\
 &= \int_0^1 \frac{x^4}{2(x^5 + 1)} dx
 \end{aligned}$$

Se

$$u = x^5 \Rightarrow du = 5x^4 dx \Rightarrow \frac{du}{5} = x^4 dx$$

e

$$x = 0 \Rightarrow u = 0 \quad x = 1 \Rightarrow u = 1$$

De onde,

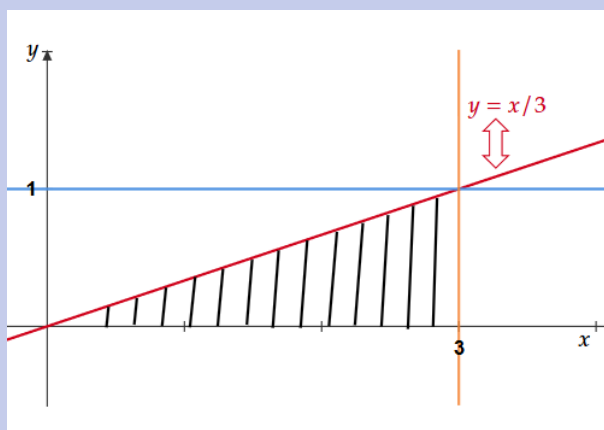
$$\begin{aligned}
 \iint_D \frac{y}{x^5 + 1} dA &= \frac{1}{10} \int_0^1 \frac{du}{u+1} \\
 &= \frac{1}{10} \ln(u+1) \Big|_0^1 \\
 &= \frac{1}{10} \ln(2)
 \end{aligned}$$

- Vamos agora a calcular a integral trocando a ordem de integração.

$$\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} dx dy$$

a) Como  $0 \leq y \leq 1$  e  $3y \leq x \leq 3$

Temos a região



Trocando a ordem podemos descrever esta região como

$$0 \leq y \leq \frac{x}{3} \quad \text{e} \quad 0 \leq x \leq 3$$

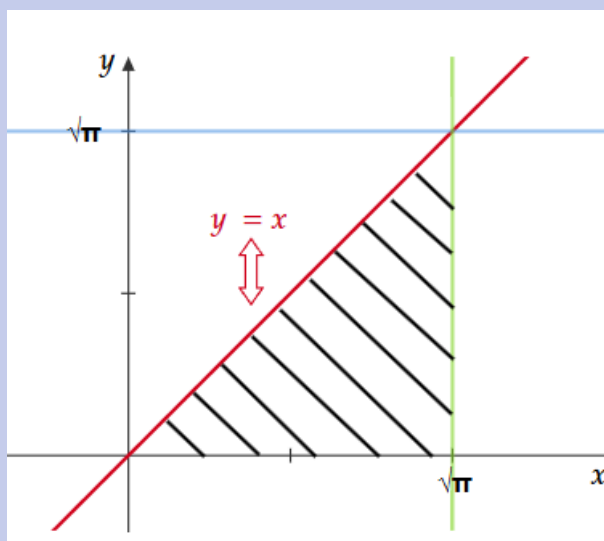
Então,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} dx dy &= \int_0^3 \int_0^{\frac{x}{3}} e^{x^2} dy dx \\ &= \int_0^3 \frac{x}{3} e^{x^2} dx \\ &= \frac{1}{6} e^{x^2} \Big|_0^3 = \frac{e^9}{6} - \frac{1}{6} \end{aligned}$$

- Vamos agora a calcular a integral trocando a ordem de integração.

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \int_y^{\sqrt{\pi}} \cos(x^2) dx dy$$

Como  $0 \leq x \leq \sqrt{\pi}$  e  $0 \leq y \leq \sqrt{\pi}$ , temos a região



Observe que podemos descrever a região como  $0 \leq y \leq x$  e  $0 \leq x \leq \sqrt{\pi}$ . Trocando a ordem, temos

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{\pi}} \int_y^{\sqrt{\pi}} \cos(x^2) \, dx \, dy &= \int_0^{\sqrt{\pi}} \int_0^x \cos(x^2) \, dy \, dx \\ &= \int_0^{\sqrt{\pi}} x \cos(x^2) \, dx \\ &= \left. \frac{1}{2} \sin(x^2) \right|_0^{\sqrt{\pi}} = 0\end{aligned}$$

■

## 11. Integrais sobre regiões do espaço

Após compreendermos as integrais sobre regiões do plano, estendemos essas ideias para funções de três variáveis definidas em regiões do espaço tridimensional. As integrais triplas surgem para somar contribuições infinitesimais distribuídas em volumes, permitindo calcular, por exemplo, o volume de sólidos mais complexos, a massa de corpos com densidade variável, centros de massa e momentos de inércia.

O desenvolvimento das integrais múltiplas em três dimensões seguiu um caminho natural a partir das integrais duplas, e foi formalizado por matemáticos do século XIX, como Riemann e Lebesgue, que aprimoraram a teoria da integração. Essas integrais são ferramentas essenciais para modelar fenômenos físicos e geométricos em contextos tridimensionais, como mecânica dos fluidos, eletromagnetismo e engenharia estrutural.

Assim, o domínio do cálculo de integrais em regiões do espaço amplia significativamente o poder de análise e solução de problemas que envolvem grandezas distribuídas volumetricamente.

Assim como fizemos para o espaço, começamos o estudo da integral sobre paralelepípedos e depois o estendemos a outro tipo de regiões.

Considere agora um paralelepípedo  $R = [a, b] \times [c, d] \times [e, h]$  ( $-\infty < a, b, c, d, e, h < +\infty$ ) uma função  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $f(x) \geq 0$  para todo  $x \in R$ .

Considere um retângulo  $R = [a, b] \times [c, d] \times [e, h]$  ( $-\infty < a, b, c, d, e, h < +\infty$ ) uma função  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ . Particionamos os intervalos que definem  $R$  como segue

$$P_1 : a < x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \quad P_2 : c < y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$$

$$\text{e } P_3 : e < z_0 < z_1 < \cdots < z_l = h.$$

Com estas partições criamos uma partição de  $R$  em pequenos paralelepípedos

$$P := P_1 \times P_2 \times P_3 = \{R_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k], \quad \forall 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq l\}$$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad \Delta y_j = y_j - y_{j-1} \quad \text{e} \quad \Delta z_k = z_k - z_{k-1} \quad \forall 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m, 0 \leq k \leq l,$$

e definimos a **amplitude da partição**  $P$  por

$$\Delta = \sup\{\Delta x_i, \Delta y_j, \Delta z_k, 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m, 0 \leq k \leq l\}.$$

Observamos que pedir

$$\Delta \rightarrow 0 \quad \text{é equivalente a pedir } \Delta x_i \rightarrow 0, \quad \Delta y_j \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \Delta z_k \rightarrow 0.$$

Seja  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e considere os números

$$m_{ijk} = \inf_{(x,y,z) \in R_{ijk}} f(x,y,z) \quad \text{e} \quad M_{ijk} = \sup_{(x,y,z) \in R_{ijk}} f(x,y,z)$$

Com isto, chamamos de **soma superior de Riemann** a

$$U(f, P) = \sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n M_{ijk} \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

e de **soma inferior de Riemann** a

$$L(f, P) = \sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n m_{ijk} \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

A **Integral superior de Riemann** é

$$U(f) = \sup_{P \text{ partição de } R} U(f, P)$$

e a **Integral inferior de Riemann** é

$$L(f) = \inf_{P \text{ partição de } R} L(f, P)$$

**Definição 11.1** Seja  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  uma função em  $R = [a, b] \times [c, d] \times [e, h]$ . Dizemos que **a função  $f$  é Riemann integrável em  $R$**  se  $U(f) = L(f)$ . Neste caso  $U(f) = L(f)$  recebe o nome de **integral dupla de  $f$  sobre  $R$**  e o denotamos por

$$U(f) = L(f) = \iiint_R f \, dV.$$

Assim como no caso do plano, temos os seguintes resultados.

**Teorema 11.1** Seja  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada definida em um retângulo  $R = [a, b] \times [c, d] \times [e, h]$ . Então  $f$  é Riemann integrável se, e somente se, existe uma partição  $P$  de  $R$  tal que

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$$

para todo  $\varepsilon > 0$ , .

**Teorema 11.2** Seja  $f : [a, b] \times [c, d] \times [e, h] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Então,  $f$  é Riemann integrável.

**Obs.**

Assim como dito no caso de superfícies, aqui também destacamos que, se particionamos os intervalos que definem  $R$  como segue

$$P_1 : \quad a < x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \quad \text{tal que} \quad \frac{b-a}{n} = x_i - x_{i-1} \quad \forall i = 1 \dots n$$

$$P_2 : \quad c < y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d \quad \text{tal que} \quad \frac{d-c}{m} = y_j - y_{j-1} \quad \forall j = 1 \dots m$$

$$P_3 : \quad e < z_0 < z_1 < \cdots < z_l = h \quad \text{tal que} \quad \frac{h-e}{l} = z_k - z_{k-1} \quad \forall k = 1 \dots l$$

e, com estas partições criamos uma partição de  $R$  em pequenos retângulos

$$P := P_1 \times P_2 \times P_3 = \{R_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]\}$$

Denotamos por

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}, \quad \Delta y_j = y_j - y_{j-1} = \frac{c-d}{m}$$

$$\text{e } \Delta z_k = z_k - z_{k-1} = \frac{h-e}{l} \quad \forall 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m, 0 \leq k \leq l,$$

e definimos a **amplitude da partição**  $P$  por

$$\Delta = \sup\{\Delta x_i, \Delta y_j, \Delta z_k, 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m, 0 \leq k \leq l\}.$$

Observamos que pedir

$$\Delta \rightarrow 0 \quad \text{é equivalente a pedir } \Delta x_i \rightarrow 0, \quad \Delta y_j \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \Delta z_k \rightarrow 0.$$

Seja  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável e considere agora uma família de pontos

$$W = \{w_{ijk} = (x_i, y_j, z_k) \in R_{ijk}, 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m, 0 \leq k \leq l\}$$

e defina **soma de Riemann de  $f$  relativa a partição  $P$  e aos pontos  $w_{ijk}$**  pela expressão.

$$S(f, P, W) = \sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n f(w_{ijk}) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k.$$

Seja  $\{(P_r, W_r), r \in \mathbb{N}\}$  uma família de partições  $P_r$  de  $R$  munida de pontos médios  $W_r$  e de forma tal que  $\Delta_r \rightarrow 0$ . Então

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} S(f, P_r, W_r) = \iiint_R f \, dV.$$

Como dito anteriormente, embora do ponto de vista teórico, o cálculo da integral por meio do limite acima seja difícil (como veremos em alguns exemplos a seguir), do ponto de vista computacional, é justamente esse limite que nos permite calcular integrais com o auxílio de um computador, quando não é possível fazê-lo de forma analítica.

Esta expressão também nos ajudará, no futuro, a interpretar certas somas de Riemann como integrais de volume.

Seja  $R = [a, b] \times [c, d] \times [e, h]$  um paralelepípedo e  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada que é contínua em um conjunto  $U \subset R$  tal que  $R \setminus U$  tem medida nula. Assim como no teorema de Fubini para integrais dobles, pode ser mostrado que:

- Se, para todo  $z \in [e, h]$  existe  $g(z) = \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) \, dy \, dx$  então

$$\iiint_R f \, dV = \int_a^b \int_c^d \int_e^h f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_e^h \left[ \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) \, dx \, dy \right] dz$$

- Se, para todo  $y \in [c, d]$  existe  $h(y) = \int_e^h \int_a^b f(x, y, z) \, dx \, dz$  então

$$\iiint_R f \, dV = \int_a^b \int_c^d \int_e^h f(x, y, z) \, dx \, dz \, dy = \int_c^d \left[ \int_a^b \int_e^h f(x, y, z) \, dx \, dz \right] dy$$

- Se, para todo  $x \in [a, b]$  existe  $l(x) = \int_e^h \int_c^d f(x, y, z) \, dy \, dz$  então

$$\iiint_R f \, dV = \int_a^b \int_c^d \int_e^h f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx = \int_a^b \left[ \int_c^d \int_e^h f(x, y, z) \, dz \, dy \right] dx$$

- Se, para todo  $z \in [e, h]$  existe  $g(z) = \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dA$ , para todo  $y \in [c, d]$  existe  $h(y) = \int_e^h \int_a^b f(x, y, z) dx dz$  e  $x \in [a, b]$  existe  $l(x) = \int_e^h \int_c^d f(x, y, z) dy dz$  então

$$\begin{aligned} \iiint_R f dV &= \int_a^b \int_c^d \int_e^h f(x, y, z) dz dy dx \\ &= \int_a^b \left[ \int_c^d \int_e^h f(x, y, z) dz dy \right] dx \\ &= \int_c^d \left[ \int_a^b \int_e^h f(x, y, z) dx dz \right] dy \\ &= \int_e^h \left[ \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy \right] dz \end{aligned}$$

- **Exemplo 11.1** • Seja  $R = [0, a] \times [0, b] \times [0, c]$ . Vamos calcular a integral

$$\begin{aligned} \iiint_R dV &= \int_0^a \int_0^b \int_0^c dz dy dx \\ &= \int_0^a \int_{-1}^2 z \Big|_0^c dy dx \\ &= c \int_0^a y \Big|_0^b dx \\ &= cb \int_0^a dx \\ &= abc. \end{aligned}$$

- Seja  $R = [0, 1] \times [-1, 2] \times [0, 3]$ . Vamos calcular a integral

$$\begin{aligned} \iiint_R xyz^2 dV &= \int_0^1 \int_{-1}^2 \int_0^3 xyz^2 dz dy dx \\ &= \int_0^1 \int_{-1}^2 xy \frac{1}{3} z^3 \Big|_0^3 dy dx \\ &= 9 \int_0^1 x \frac{y^2}{2} \Big|_{-1}^2 dx \\ &= \frac{27}{2} \int_0^1 x dx \\ &= \frac{27}{2} \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{27}{4}. \end{aligned}$$

- Seja  $R = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [0, \pi/2]$ . Vamos calcular a integral

$$\begin{aligned} \iiint_R (x+y) \sin(z) dV &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_0^{\pi/2} (x+y) \sin(z) dz dy dx \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (x+y) (-\cos(z)) \Big|_0^{\pi/2} dy dx \\ &= \int_0^1 xy + \frac{y^2}{2} \Big|_{-1}^1 dx \\ &= 2 \int_0^1 x dx \\ &= 2 \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^1 = 0. \end{aligned}$$

■

**Teorema 11.3** Toda função contínua  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  definida sobre o paralelepípedo  $R$  é Riemann integrável

No caso em que temos  $U$  um conjunto limitado de  $\mathbb{R}^3$ , sabemos que  $U$  está contido num paralelepípedo

$R$  como acima. Se temos uma função  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , observamos que sempre podemos estendê-la a uma função  $\tilde{f} : R \rightarrow \mathbb{R}$  que se anula fora de  $U$ , de fato, se definimos  $\tilde{f} : R \rightarrow \mathbb{R}$  como segue

$$\tilde{f}(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & \text{se } (x, y, z) \in U \\ 0 & \text{se } (x, y, z) \notin U \end{cases}$$

temos a extensão pedida.

Com isto, se existe

$$\iiint_R \tilde{f} dV$$

definimos **integral tripla de  $f$  sobre o conjunto  $U$**  como

$$\iiint_U f dV = \iiint_R \tilde{f} dV.$$

Agora enunciaremos os mesmos resultados que eram válidos para integrais duplas e que continuam válidos para integrais triplas. A demonstração destes resultados é muito similar à demonstração no caso de integrais duplas.

**Lema 11.1** Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada. Se  $U$  tem medida nula então

$$\iiint_U f dV = 0.$$

**Corolário 11.1** Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável e seja  $V \subset U$  tal que  $U \setminus V$  tem medida nula, então

$$\iiint_U f dV = \iiint_V f dV.$$

**Teorema 11.4** Sejam  $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções integráveis e  $c \in \mathbb{R}$  então

- Se  $|f|$  é integrável, então

$$\iiint_U |f| dV \geq \left| \iiint_U f dV \right|.$$

- $f + cg$  é uma função integrável e

$$\iiint_U (f + cg) dV = \iiint_U f dV + c \iiint_U g dV$$

- Se  $f(x, y, z) \geq g(x, y, z)$  então

$$\iiint_U f dV \geq \iiint_U g dV$$

- Se o conjunto limitado  $U$  é tal que  $U = U_1 \cup \dots \cup U_n$  com  $U_i \cap U_j = \emptyset$  e a integral de  $f$  existe para cada  $U_i$  temos

$$\iiint_U f dV = \sum_{i=1}^n \iiint_{U_i} f dV.$$

**Corolário 11.2** Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável e seja  $V \subset U$  tal que  $U \setminus V$  tem medida nula, então

$$\iiint_U f \, dV = \iiint_V f \, dV.$$

**Obs.** Os resultados acima garantem que se  $U = V \cup W$  é um conjunto limitado de  $\mathbb{R}^2$  tal que  $V \cap W$  tem medida nula e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$f(x, y, z) = \begin{cases} f_1(x, y, z) & \text{se } (x, y, z) \in V \\ f_2(x, y, z) & \text{se } (x, y, z) \in W \end{cases}$$

Onde

$$f_1(x, y, z) = f_2(x, y, z) \quad \forall (x, y, z) \in V \cap W$$

então podemos escrever  $f$  como soma de  $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : U \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por

$$\tilde{f}_1(x, y, z) = \begin{cases} f_1(x, y, z) & \text{se } (x, y, z) \in V \\ 0 & \text{se } (x, y, z) \notin V \end{cases} \quad \text{e} \quad \tilde{f}_2(x, y, z) = \begin{cases} f_2(x, y, z) & \text{se } (x, y, z) \notin V \\ 0 & \text{se } (x, y, z) \in V \end{cases}$$

Como  $V^c \subset W$  e  $V \cap W$  com medida 0 temos, pelo resultado acima, que

$$\begin{aligned} \iiint_{V^c} \tilde{f}_2 \, dV &= \iiint_W \tilde{f}_2 \, dV \\ \iiint_U f(x, y, z) \, dV &= \iiint_V f(x, y, z) \, dV + \iiint_{V^c} f \, dV \\ &= \iiint_V \tilde{f}_1 \, dV + \iiint_{V^c} \tilde{f}_2 \, dV \\ &= \iiint_V \tilde{f}_1 \, dV + \iiint_W \tilde{f}_2 \, dV. \end{aligned}$$

**Definição 11.2** Seja  $U$  um conjunto limitado e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável. Definimos

- o **Volume de  $U$** , que denotamos por  $\text{Vol}(U)$ , como sendo a integral da função  $1 : U \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $1(x, y, z) = 1$  para todo  $(x, y, z) \in U$ .
- o **valor médio de  $f$**  como sendo o número

$$\bar{f} = \frac{1}{\text{Vol}(U)} \iiint_U f \, dV.$$

**Corolário 11.3** Seja  $U$  um conjunto limitado e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável. Se  $m \leq f(x, y) \leq M$  então

$$m \cdot \text{Vol}(U) \leq \iiint_U f \, dV \leq M \cdot \text{Vol}(U)$$

A demonstração do teorema a seguir é similar que no caso de áreas.

**Teorema 11.5** Seja  $U \subset \mathbb{R}^3$  um conjunto fechado e limitado tal que para quaisquer quaisquer dois pontos de  $U$  o segmento de reta que une os pontos está contido em  $U$ .

Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  que assume máximo em  $x_M \in U$  e mínimo em  $x_m \in U$ . Então existe um ponto

$x_0 \in U$  tal que

$$f(x_0) = \frac{1}{\text{Vol}(U)} \iiint_U f \, dV.$$

Dada uma função  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , para calcular

$$\iiint_U f \, dV$$

achávamos um paralelepípedos  $R$  tal que  $U \subset R$  e definíamos uma função  $\tilde{f} : R \rightarrow \mathbb{R}$  pela expressão

$$\tilde{f}(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & \text{se } (x, y, z) \in U \\ 0 & \text{se } (x, y, z) \notin U \end{cases}$$

Então

$$\iiint_U f \, dV = \iiint_R \tilde{f} \, dV.$$

Vamos estudar algumas simplificações que podem ser feitas a esta expressão em função da definição de  $U$ .

Não vamos a separar por regiões como fizemos para integrais duplas. Vamos dar um único tipo e deixamos ao leitor fazer a extensão para os outros tipos de regiões.

Assuma que  $U \subset R = [a, b] \times [c, d] \times [e, h]$  é um conjunto da forma

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x), k_1(x, y) \leq z \leq k_2(x, y)\}$$

para  $g_1, g_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínuas tais que  $g_1(x) \leq g_2(x)$  para todo  $x \in [a, b]$  e  $k_1, k_2 : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  contínuas tais que  $k_1(x, y) \leq k_2(x, y)$  para todo  $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$

Neste caso, temos

- para todo  $z \in [e, k_1(x, y)) \cup (k_2(x, y), h]$  teremos que  $(x, y, z) \notin U$ , portanto  $\tilde{f}(x, y, z) = 0$ .
- para todo  $y \in [c, g_1(x)) \cup (g_2(x), d]$  teremos que  $(x, y, z) \notin U$ , portanto  $\tilde{f}(x, y, z) = 0$ .
- para todo  $(y, z) \in [g_1(x), g_2(x)] \times [k_1(x, y), k_2(x, y)]$  temos que  $(x, y, z) \in U$ , portanto  $\tilde{f}(x, y, z) = f(x, y, z)$

Com isto, vemos que

$$\begin{aligned} \int_e^h \tilde{f}(x, y, z) \, dz &= \int_e^{k_1(x, y)} \overbrace{\tilde{f}(x, y, z)}^{=0} \, dz + \int_{k_1(x, y)}^{k_2(x, y)} \tilde{f}(x, y, z) \, dz + \int_{k_2(x, y)}^d \overbrace{\tilde{f}(x, y, z)}^{=0} \, dz \\ &= \int_{k_1(x, y)}^{k_2(x, y)} \tilde{f}(x, y, z) \, dz. \end{aligned}$$

Portanto, do teorema de Fubini, temos

$$\begin{aligned} \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) \, dz \, dy &= \int_c^d \left[ \int_e^h \tilde{f}(x, y, z) \, dz \right] \, dy \\ &= \int_c^d \left[ \int_{k_1(x, y)}^{k_2(x, y)} \tilde{f}(x, y, z) \, dz \right] \, dy \\ &= \int_c^{g_1(x)} \left[ \int_{k_1(x, y)}^{k_2(x, y)} \overbrace{\tilde{f}(x, y, z)}^{=0} \, dz \right] \, dy + \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \left[ \int_{k_1(x, y)}^{k_2(x, y)} \overbrace{\tilde{f}(x, y, z)}^{=f(x, y, z)} \, dz \right] \, dy \\ &\quad + \int_{g_2(x)}^d \left[ \int_{k_1(x, y)}^{k_2(x, y)} \overbrace{\tilde{f}(x, y, z)}^{=0} \, dz \right] \, dy \end{aligned}$$

De onde segue que

$$\int_c^d f(x, y, z) \, dz dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \left[ \int_{k_1(x, y)}^{k_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz \right] dy$$

Por fim,

$$\boxed{\iiint_U f \, dV = \int_a^b \left[ \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \left[ \int_{k_1(x, y)}^{k_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz \right] dy \right] dx.}$$

■ **Exemplo 11.2** • Vamos verificar a formula de volume da esfera. Aqui

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Escolhemos descrever esta região como o conjunto de pontos  $(x, y, z)$  tais que

$$\begin{aligned} -\sqrt{1-x^2-y^2} &\leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2} \\ -\sqrt{1-x^2} &\leq y \leq \sqrt{1-x^2} \\ -1 &\leq x \leq 1 \end{aligned}$$

Primeiramente observamos que

$$\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - y^2} \, dy = \frac{a^2}{2} \pi.$$

de fato, fazendo  $y = a \sin(u)$  temos

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - y^2} \, dy &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^2 \cos(u)^2 \, du \\ &= a^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 + \cos(2u)}{2} \, du \\ &= a^2 \left( \frac{u}{2} + \frac{\sin(2u)}{4} \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{a^2 \pi}{2}. \end{aligned}$$

Com isto

$$\begin{aligned} \iiint_W dV &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz dy dx \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 2\sqrt{1-x^2-y^2} dy dx \\ &= 2 \int_{-1}^1 \frac{1-x^2}{2} \pi dx \\ &= \pi \left( x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{4}{3} \pi. \end{aligned}$$

• Vamos calcular o volume do elipsoide

$$W = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}.$$

Escolhemos descrever esta região como o conjunto de pontos  $(x, y, z)$  tais que

$$\begin{aligned} -c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} &\leq z \leq c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} \\ -b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} &\leq y \leq b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \\ -a &\leq x \leq a \end{aligned}$$

Com isto

$$\begin{aligned}
 \iiint_W dV &= \int_{-a}^a \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \int_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dz dy dx \\
 &= \int_{-a}^a \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} 2c \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} dy dx \\
 &= \frac{2c}{b} \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{b^2 \left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) - y^2} dy dx \\
 &= \frac{2c}{b} \int_{-a}^a \frac{1}{2} b^2 \left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) \pi dx \\
 &= \pi bc \left( x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-a}^a = \frac{4}{3} \pi abc.
 \end{aligned}$$

onde temos utilizado a identidade

$$\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - y^2} dy = \frac{a^2}{2} \pi.$$

- Considere a região do primeiro octante abaixo do plano  $z = 2$  e que está dentro do parabolóide

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = x^2 + y^2\}.$$

Escolhemos descrever esta região como o conjunto de pontos  $(x, y, z)$  tais que

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 &\leq z \leq 2 \\
 0 &\leq y \leq \sqrt{2-x^2} \\
 0 &\leq x \leq \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

Vamos a calcular

$$\begin{aligned}
 \iiint_W x dV &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \int_{x^2+y^2}^2 x dz dy dx \\
 &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} x(2-x^2-y^2) dy dx \\
 &= \int_0^{\sqrt{2}} x \left( (2-x^2)^{3/2} - \frac{1}{3}(2-x^2)^{3/2} \right) dx \\
 &= -\frac{2(2-x^2)^{5/2}}{15} \Big|_0^{\sqrt{2}} \\
 &= \frac{8\sqrt{2}}{15}
 \end{aligned}$$

- Considere a região do primeiro octante que está abaixo do plano  $x + y + z = 1$  e que Escolhemos descrever esta região como o conjunto de pontos  $(x, y, z)$  tais que

$$\begin{aligned}
 0 &\leq z \leq 1-x-y \\
 0 &\leq y \leq 1-x \\
 0 &\leq x \leq 1
 \end{aligned}$$

Vamos a calcular a integral de  $f(x, y, z) = xyz$  nesta região.

$$\begin{aligned}
 \iiint_W x \, dV &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} yz \, dz dy dx \\
 &= \int_0^1 \int_0^{1-x} y \frac{(1-x-y)^2}{2} dy dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-x} ((1-x)^2 y - 2(1-x)y^2 + y^3) \Big|_0^{1-x} dy dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \frac{(1-x)^2}{2} y^2 - \frac{2(1-x)}{3} y^3 + \frac{1}{4} y^4 \right) \Big|_0^{1-x} dx \\
 &= \frac{1}{24} \int_0^1 (1-x)^4 dx = \left( -\frac{1}{120} (1-x)^5 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{120}
 \end{aligned}$$

- Calculamos o volume da região  $W$  do primeiro octante delimitada pelo plano  $2x + 3y = 12$  e pelo cilindro  $z = y^2/2$ .

Vamos calcular o seu volume. Observamos que,

$$0 \leq x \leq (12 - 3y)/2,$$

e que, no plano  $z = 0$  temos a região

Escolhemos descrever esta região  $W$  como o conjunto de pontos  $(x, y, z)$  tais que

$$0 \leq z \leq y^2/2$$

$$0 \leq y \leq 4 - 2x/3$$

$$0 \leq x \leq 6$$

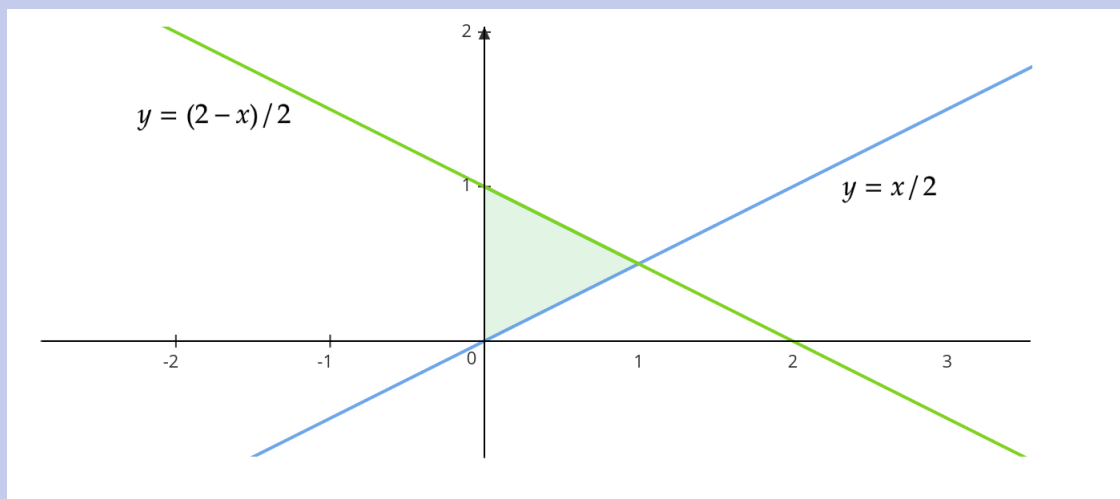
Com isto

$$\begin{aligned}
 \iiint_W dV &= \int_0^6 \int_0^{4-2x/3} \int_0^{y^2/2} dz dy dx \\
 &= \int_0^6 \int_0^{4-2x/3} \frac{y^2}{2} dy dx \\
 &= \int_0^6 \left( \frac{1}{6} y^3 \right) \Big|_0^{4-2x/3} dx \\
 &= \frac{1}{6} \int_0^6 \left( 4 - \frac{2x}{3} \right)^3 dx \\
 &= \frac{1}{6} \left( -\frac{3}{8} \left( 4 - \frac{2x}{3} \right)^4 \right) \Big|_0^6 = 16
 \end{aligned}$$

- Considere o tetraedro  $T$  limitado pelos planos  $x + 2y + z = 2$ ,  $x = 2y$ ,  $x = 0$  e  $z = 0$ . Vamos calcular o seu volume. Observamos que,

$$0 \leq z \leq 2 - 2y - x,$$

e que, no plano  $z = 0$  temos a região



que podemos descrever como o conjunto de pontos  $(x, y)$  tais que

$$x/2 \leq y \leq (2-x)/2 \quad \text{e} \quad 0 \leq x \leq 1.$$

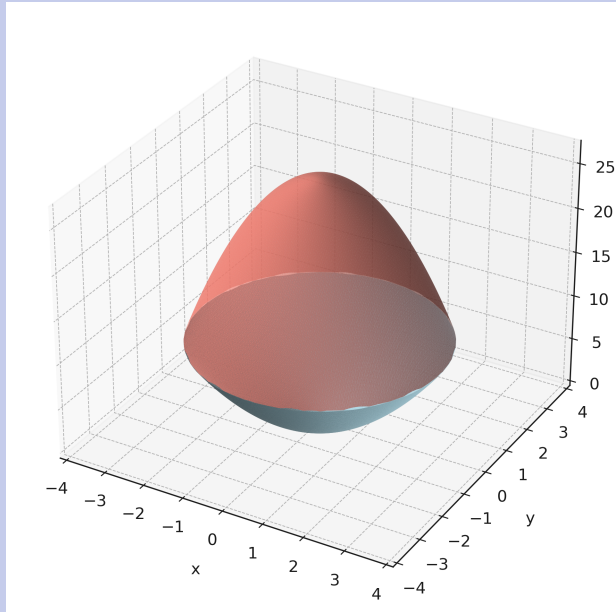
Com isto, vamos descrever o tetraedro  $T$  como os pontos  $(x, y, z)$  tais que

$$\begin{aligned} 0 &\leq z \leq 2-2y-x \\ x/2 &\leq y \leq (2-x)/2 \\ 0 &\leq x \leq 1 \end{aligned}$$

Calculamos

$$\begin{aligned} \iiint_T dV &= \int_0^1 \int_{x/2}^{(2-x)/2} \int_0^{2-2y-x} dz dy dx \\ &= \int_0^1 \int_{x/2}^{(2-x)/2} (2-2y-x) dy dx \\ &= \int_0^1 \left( (2-x)y - y^2 \right) \Big|_{x/2}^{(2-x)/2} dx \\ &= \int_0^1 \left( \frac{x^2}{2} - x \right) dx \\ &= \left( \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

- Vamos calcular o volume da região  $W$  limitada pelas superfícies  $z = x^2 + y^2$  e  $z = 27 - 2x^2 - 2y^2$ .



Observamos que, neste caso

$$x^2 + y^2 \leq z \leq 27 - 2x^2 - 2y^2$$

e que a, a área de integração no plano  $z = 0$  será delimitada por

$$x^2 + y^2 = 27 - 2x^2 - 2y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9$$

Podemos descrever esta região como o conjunto dos  $(x, y)$  tais que

$$-\sqrt{9-y^2} \leq x \leq \sqrt{9-y^2} \quad \text{e} \quad -3 \leq y \leq 3.$$

Com isto, vamos descrever a região  $W$  como os pontos  $(x, y, z)$  tais que

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &\leq z \leq 27 - 2x^2 - 2y^2 \\ -\sqrt{9-y^2} &\leq x \leq \sqrt{9-y^2} \\ -3 &\leq y \leq 3. \end{aligned}$$

Calculamos

$$\begin{aligned} \iiint_W dV &= \int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} \int_{x^2+y^2}^{27-2x^2-2y^2} dz dx dy \\ &= \int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} (27 - 3x^2 - 3y^2) dx dy \\ &= \int_{-3}^3 \left( (27 - 3y^2)x - x^3 \right) \Big|_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} dy \\ &= \int_{-3}^3 4(9 - y^2) \sqrt{9 - y^2} dy. \end{aligned}$$

Fazendo

$$y = 3\sin(u) \Rightarrow dy = 3\cos(u) du \quad 9 - y^2 = 9\cos^2(u)$$

temos

$$\int_{-3}^3 4(9 - y^2) \sqrt{9 - y^2} dy = 324 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4(u) du = \frac{243}{2} \pi$$

portanto,

$$\iiint_W dV = \frac{243}{2} \pi$$

## 12. Mudança de variáveis em integrais

Quando calculamos integrais em regiões do espaço, muitas vezes as formas das regiões ou as funções envolvidas tornam o cálculo direto bastante complexo. Para facilitar a resolução, utilizamos a técnica da mudança de variáveis, que consiste em transformar o domínio da integral para uma região mais simples, onde o cálculo é mais acessível.

Essa transformação é feita por meio de funções diferenciáveis que reparam o espaço, e o efeito dessa mudança sobre os volumes é controlado pelo determinante da matriz diferencial, que ajusta a "escala" do volume infinitesimal após a transformação.

Historicamente, essa ideia remonta aos trabalhos de Jacobi, que formalizou a noção da matriz diferencial (ou Jacobiana) no século XIX, ampliando o poder do cálculo integral para múltiplas variáveis. A mudança de variáveis é fundamental em diversas áreas da matemática e suas aplicações, como em coordenadas polares, cilíndricas e esféricas, amplamente usadas na física e engenharia para simplificar problemas com simetrias específicas.

Verremos como compreender e aplicar a mudança de variáveis nos permite resolver integrais triplas complexas e analisar fenômenos naturais e tecnológicos com maior facilidade e precisão.

Seja  $R \subset \mathbb{R}^3$  e  $S = [a, b] \times [c, d] \times [e, h]$  duas regiões de  $\mathbb{R}^3$  e assuma que existe  $T : R \rightarrow S$  uma função diferenciável com inversa  $T^{-1}$  diferenciável.

Para melhor nos organizarmos vamos denotar a cada ponto de  $R \subset \mathbb{R}^3$  pelas coordenadas  $(x, y, z)$  e a cada ponto de  $S \subset \mathbb{R}^3$  pelas coordenadas  $(u, v, w)$ .

Observamos que, pelo fato de  $T$  admitir uma função inversa, para cada ponto  $(u, v, w) \in S$  existe um único ponto  $(x, y, z) \in R$  tal que

$$T(x, y, z) = (u, v, w).$$

Considere as partições

$$P_1 : a = x_0 < \dots < x_n = b$$

$$P_2 : c = y_0 < \dots < y_m = d$$

$$P_3 : e = z_0 < \dots < z_l = h$$

e a partição  $P = P_1 \times P_2 \times P_3$  e uma coleção de pontos

$$W = \{w_{ijk} \in [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}], i = 1 \dots n, j = 1 \dots m, k = 1 \dots l\}.$$

Observamos que se

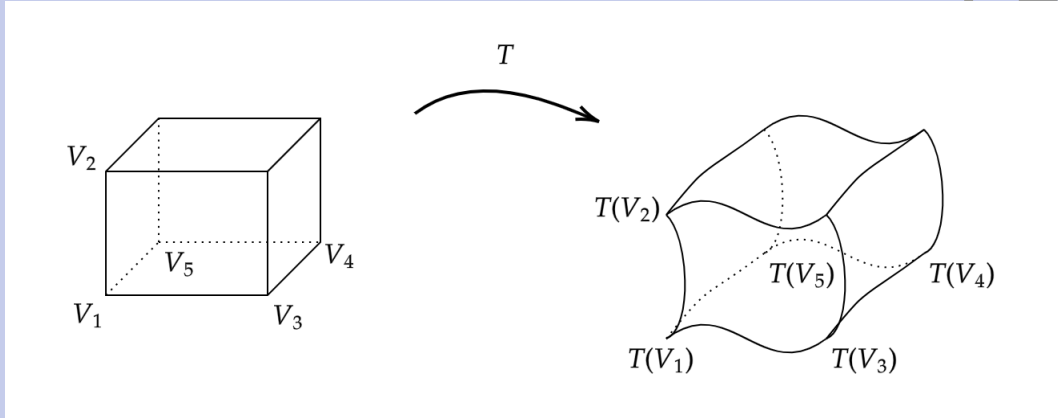
$$\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1})$$

é o volume do retângulo  $R_{ijk}$  de vértices

$$V_1 = (x_{i-1}, y_{j-1}, z_{k-1}), \quad V_2 = (x_i, y_{j-1}, z_{k-1}), \quad V_3 = (x_{i-1}, y_j, z_{k-1}), \quad V_4 = (x_i, y_j, z_{k-1})$$

$$V_5 = (x_{i-1}, y_{j-1}, z_k), \quad V_6 = (x_i, y_{j-1}, z_k), \quad V_7 = (x_{i-1}, y_j, z_k) \quad \text{e} \quad V_8 = (x_i, y_j, z_k)$$

Considere agora a imagem por  $T$  do retângulo  $R_{ijk}$ ,  $T(R_{ijk}) = S_{ijk} \subset S$ . Esta região não será um paralelepípedo, mas se a amplitude da partição  $P$  for suficientemente pequena, teremos que o volume de  $S_{ijk}$  é aproximadamente o volume de um sólido muito similar a um paralelepípedo que tem de vértices  $\tilde{V}_i = T(V_i)$ .



Portanto, pelo que vimos em geometria analítica, e pensando  $\tilde{V}_1 = T(V_1)$ ,  $\tilde{V}_2 = T(V_2)$ ,  $\tilde{V}_3 = T(V_3)$  como vetores, o volume deste sólido será aproximadamente

$$\text{Vol}(S_{ijk}) = \left| \det \begin{pmatrix} \tilde{V}_2 - \tilde{V}_1 \\ \tilde{V}_3 - \tilde{V}_1 \\ \tilde{V}_5 - \tilde{V}_1 \end{pmatrix} \right|$$

Agora, se

$$T(x, y, z) = (T_1(x, y, z), T_2(x, y, z), T_3(x, y, z)),$$

temos, pelo que vimos em aproximações lineares, que

$$\begin{aligned} \tilde{V}_2 - \tilde{V}_1 &= T(x_i, y_{j-1}, z_{k-1}) - T(x_{i-1}, y_{j-1}, z_{k-1}) \\ &\simeq (\partial_1 T_1(x_{i-1}, y_{j-1}, z_{k-1}), \partial_1 T_2(x_{i-1}, y_{j-1}, z_{k-1}), \partial_1 T_3(x_{i-1}, y_{j-1}, z_{k-1})) \Delta x_i, \\ \tilde{V}_3 - \tilde{V}_1 &= T(x_{i-1}, y_j, z_{k-1}) - T(x_{i-1}, y_{j-1}, z_{k-1}) \\ &\simeq (\partial_2 T_1(x_{i-1}, y_{j-1}, z_{k-1}), \partial_2 T_2(x_{i-1}, y_{j-1}, z_{k-1}), \partial_2 T_3(x_{i-1}, y_{j-1}, z_{k-1})) \Delta y_j, \\ \tilde{V}_5 - \tilde{V}_1 &= T(x_{i-1}, y_{j-1}, z_k) - T(x_{i-1}, y_{j-1}, z_{k-1}) \\ &\simeq (\partial_3 T_1(x_{i-1}, y_{j-1}, z_{k-1}), \partial_3 T_2(x_{i-1}, y_{j-1}, z_{k-1}), \partial_3 T_3(x_{i-1}, y_{j-1}, z_{k-1})) \Delta z_k, \end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned} \text{Vol}(S_{ijk}) &\simeq \left| \det \begin{pmatrix} \tilde{V}_2 - \tilde{V}_1 \\ \tilde{V}_3 - \tilde{V}_1 \\ \tilde{V}_5 - \tilde{V}_1 \end{pmatrix} \right| \\ &\simeq \left| \det \begin{pmatrix} \partial_1 T_1(x_{i-1}, y_{j-1}, z_{k-1}) & \partial_1 T_2(x_{i-1}, y_{j-1}, z_{k-1}) & \partial_1 T_3(x_{i-1}, y_{j-1}, z_{k-1}) \\ \partial_2 T_1(x_{i-1}, y_{j-1}, z_{k-1}) & \partial_2 T_2(x_{i-1}, y_{j-1}, z_{k-1}) & \partial_2 T_3(x_{i-1}, y_{j-1}, z_{k-1}) \\ \partial_3 T_1(x_{i-1}, y_{j-1}, z_{k-1}) & \partial_3 T_2(x_{i-1}, y_{j-1}, z_{k-1}) & \partial_3 T_3(x_{i-1}, y_{j-1}, z_{k-1}) \end{pmatrix} \right| \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k, \end{aligned}$$

Chamamos de **Jacobiano da transformação**  $T$  à expressão

$$J_T(x, y, z) = \left| \det \begin{pmatrix} \partial_1 T_1(x, y, z) & \partial_1 T_2(x, y, z) & \partial_1 T_3(x, y, z) \\ \partial_2 T_1(x, y, z) & \partial_2 T_2(x, y, z) & \partial_2 T_3(x, y, z) \\ \partial_3 T_1(x, y, z) & \partial_3 T_2(x, y, z) & \partial_3 T_3(x, y, z) \end{pmatrix} \right|$$

Então, podemos escrever,

$$\text{Vol}(S_{ijk}) \simeq J_T(x_{i-1}, y_{j-1}, z_{k-1}) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

Seja  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável, podemos aproximar a soma de Riemann na região  $S$  como uma soma da forma

$$S(f, P, W) \simeq \sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n f(v_{ijk}) \text{Vol}(S_{ijk}),$$

em que os  $v_{ijk} = T(w_{ijk})$  formam uma família  $V$  de pontos em  $S$ . Agora, como

$$\begin{aligned} S(f, \tilde{P}, V) &\simeq \sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n f(T(w_{ijk})) \frac{\text{Vol}(S_{ijk})}{\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k} \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k \\ &\simeq \sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n f(T(w_{ijk})) J_T(w_{ijk}) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k \\ &= S((f \circ T) \cdot J_T, P, W) \end{aligned}$$

Utilizando a definição de integral que vimos anteriormente, quando for considerada uma sequência de partições  $\{P_k\}$  cujas amplitudes  $\Delta_k$  converge para zero, teremos que

$$\iiint_R (f \circ T) J_T dV = \lim_{\Delta_k \rightarrow 0} S((f \circ T) \cdot J_T, P, W) = \lim_{\Delta_k \rightarrow 0} S(f, \tilde{P}, V) = \iiint_S f d\tilde{V}.$$

E isto é formalizado no seguinte resultado.

**Teorema 12.1 — de mudança de variáveis.**

• Sejam  $R$  e  $S$  dois conjuntos limitados de  $\mathbb{R}^2$  e  $T : R \rightarrow S$  uma função de classe  $C^1$  dada por

$$T(u, v) = (T_1(u, v), T_2(u, v))$$

que admite inversa e tal que  $T(R) = S$ . Então, para toda função  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  temos

$$\iint_R (f \circ T) J_T d\tilde{A} = \iint_S f(u, v) dA.$$

onde

$$J_T(u, v) = \left| \det \begin{pmatrix} \partial_1 T_1(u, v) & \partial_1 T_2(u, v) \\ \partial_2 T_1(u, v) & \partial_2 T_2(u, v) \end{pmatrix} \right|$$

é o Jacobiano da transformação  $T$ .

• Sejam  $R$  e  $S$  dois conjuntos limitados de  $\mathbb{R}^3$  e  $T : R \rightarrow S$  uma função de classe  $C^1$  dada por

$$T(x, y, z) = (T_1(u, v, w), T_2(u, v, w), T_3(u, v, w))$$

que admite inversa e tal que  $T(R) = S$ . Então, para toda função  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  temos

$$\iiint_R (f \circ T) J_T d\tilde{V} = \iiint_S f(u, v, w) dV,$$

onde

$$J_T(x, y, z) = \left| \det \begin{pmatrix} \partial_1 T_1(u, v, w) & \partial_1 T_2(u, v, w) & \partial_1 T_3(u, v, w) \\ \partial_2 T_1(u, v, w) & \partial_2 T_2(u, v, w) & \partial_2 T_3(u, v, w) \\ \partial_3 T_1(u, v, w) & \partial_3 T_2(u, v, w) & \partial_3 T_3(u, v, w) \end{pmatrix} \right|$$

é o Jacobiano da transformação  $T$ .

**Obs.**

Do fato,  $\det(A) = \det(A^T)$ , tiramos que o Jacobiano pode ser expresso em termos do diferencial da função como segue

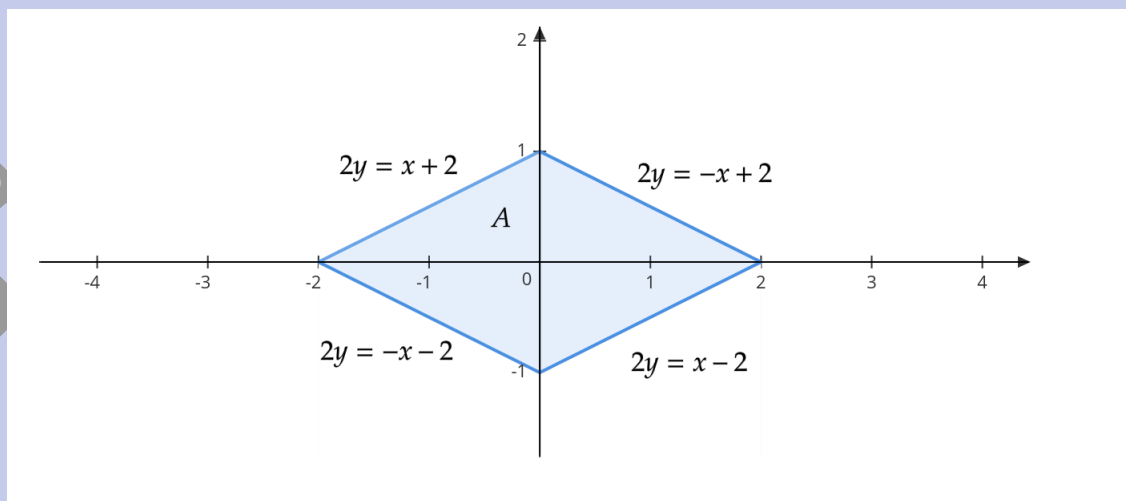
$$J_T(u, v) = |\det(D_{(u,v)}T)| \quad \text{em } \mathbb{R}^2 \quad \text{ou} \quad J_T(u, v, w) = |\det(D_{(u,v,w)}T)| \quad \text{em } \mathbb{R}^3.$$

Também, da explicação eurística que motiva o teorema de mudança de variáveis vemos que o Jacobiano dá informação sobre o fator pelo qual áreas de regiões são modificadas quando fazemos uma mudança de coordenadas. A mudança de coordenada modifica o conjunto em um outro conjunto que tem uma forma de mensurar a área ou volume de forma diferente, esta distorção na medida é corrigida pelo Jacobiano.

■ **Exemplo 12.1** • Considere uma função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e queremos calcular a integral de  $f$  no quadrilátero  $A$  de vértices

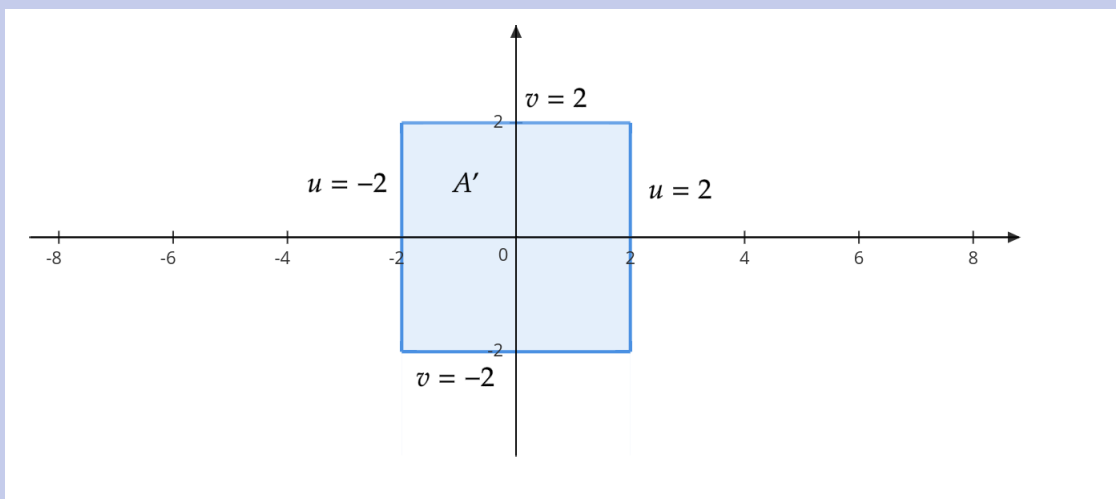
$$P_1 = (-2, 0), \quad P_2 = (0, -1), \quad P_3 = (2, 0) \quad \text{e} \quad P_4 = (0, 1)$$

Podemos descrever a região  $A$  como segue



Observamos que esta região não é do tipo I nem do tipo II.

Queremos fazer uma mudança de variáveis utilizando um mapa  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de modo tal que se  $A' = [-2, 2] \times [-2, 2]$  temos que  $T : A' \rightarrow A$  seja bijetor e diferenciável.



Neste caso

$$T(u, v) = (T_1(u, v), T_2(u, v))$$

e para obter  $T_1(u, v)$  e  $T_2(u, v)$  substituímos  $x$  e  $y$  em

$$u = x + 2y \quad \text{e} \quad v = x - 2y$$

e obtemos

$$u = T_1(u, v) + 2T_2(u, v) \quad \text{e} \quad v = T_1(u, v) - 2T_2(u, v) \quad \Rightarrow \quad T_1(u, v) = \frac{u+v}{2} \quad T_2(u, v) = \frac{u-v}{4}.$$

Com isto, temos que a transformação procurada é

$$T(u, v) = (T_1(u, v), T_2(u, v)) = \left( \frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{4} \right) =$$

Portanto

$$J_T = \left| \det \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & -1/4 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{4}$$

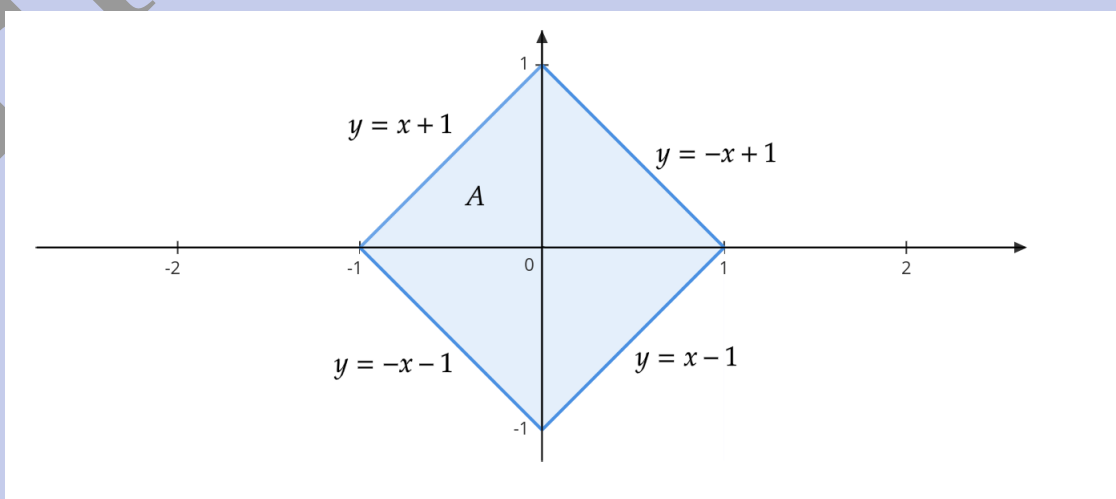
Então, a integral de  $f$  ficaria

$$\iint_A f(x, y) \, dx dy = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 \int_{-2}^2 f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{4}\right) \, du dv$$

- Considere uma função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e queremos calcular a integral de  $f$  no quadrilátero  $A$  de vértices

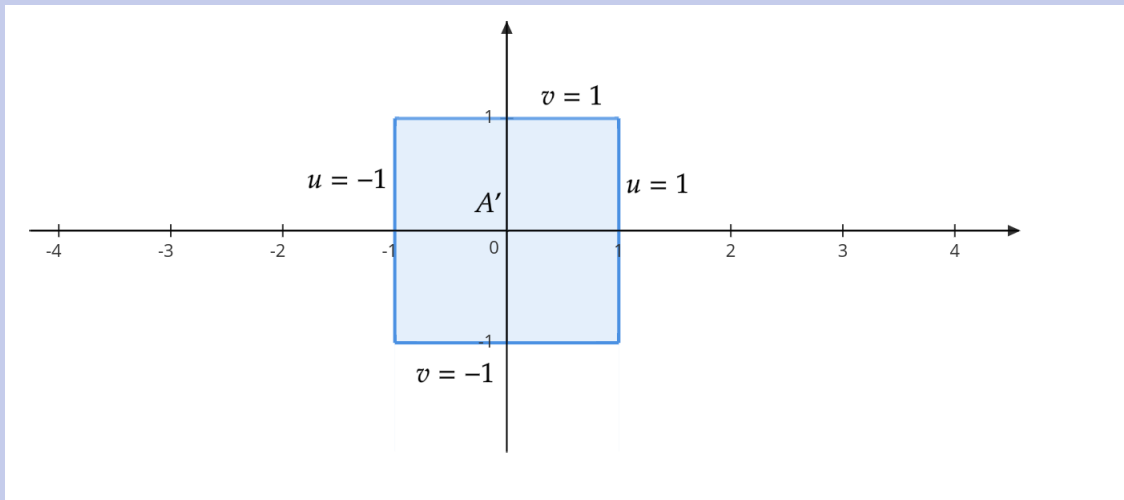
$$P_1 = (-1, 0), \quad P_2 = (0, -1), \quad P_3 = (1, 0) \quad \text{e} \quad P_4 = (0, 1)$$

Podemos descrever a região  $A$  como segue



Observamos que esta região não é do tipo I nem do tipo II.

Queremos fazer uma mudança de variáveis utilizando um mapa  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de modo tal que se  $A' = [-1, 1] \times [-1, 1]$  temos que  $T : A' \rightarrow A$  seja bijetor e diferenciável.



Neste caso

$$T(u, v) = (T_1(u, v), T_2(u, v))$$

e para obter  $T_1(u, v)$  e  $T_2(u, v)$  substituímos  $x$  e  $y$  em

$$u = x + y \quad \text{e} \quad v = x - y$$

e obtemos

$$u = T_1(u, v) + T_2(u, v) \quad \text{e} \quad v = T_1(u, v) - T_2(u, v) \quad \Rightarrow \quad T_1(u, v) = \frac{u+v}{2} \quad T_2(u, v) = \frac{u-v}{2}.$$

Com isto, temos que a transformação procurada é

$$T(u, v) = (T_1(u, v), T_2(u, v)) = \left( \frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2} \right) =$$

Portanto

$$J_T = \left| \det \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2}$$

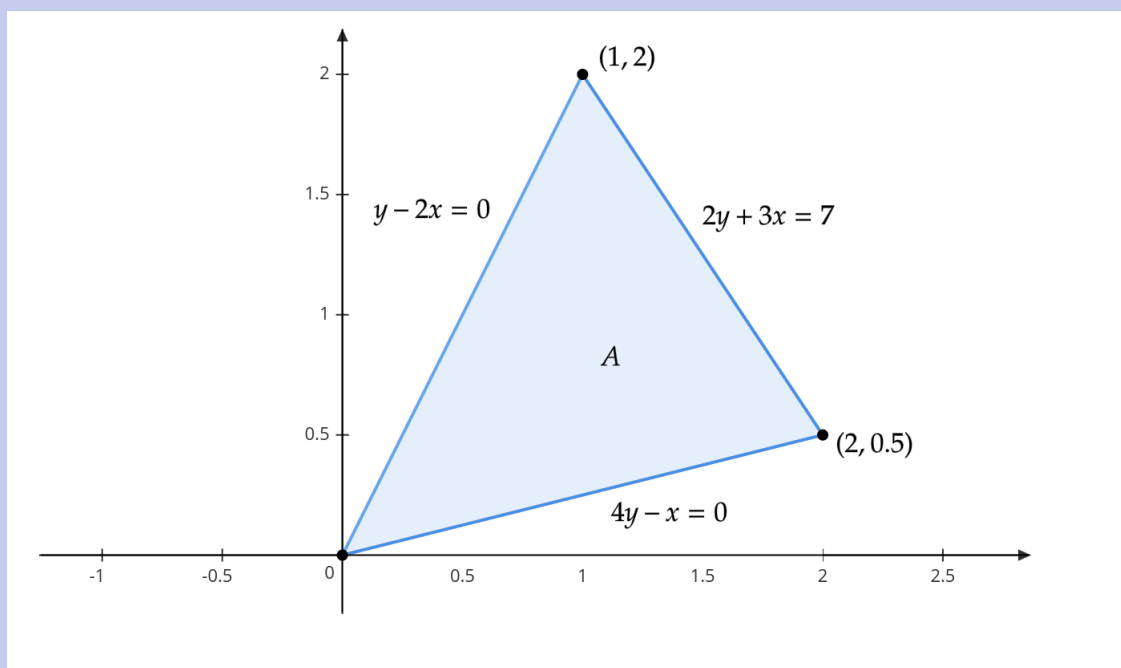
Então, a integral de  $f$  ficaria

$$\iint_A f(x, y) \, dx dy = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}\right) \, du dv$$

- Considere uma função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e queremos calcular a integral de  $f$  no triângulo  $A$  de vértices

$$P_1 = (0, 0), \quad P_2 = (2, 0.5) \quad \text{e} \quad P_3 = (1, 2)$$

Podemos descrever a região  $A$  como segue



Observamos que esta região não é do tipo I nem do tipo II.

Queremos fazer uma mudança de variáveis utilizando um mapa  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , bijetor e diferenciável, de modo exista uma região  $A'$  que seja de Tipo I ou Tipo II e tal que  $T: A' \rightarrow A$  seja uma bijeção.

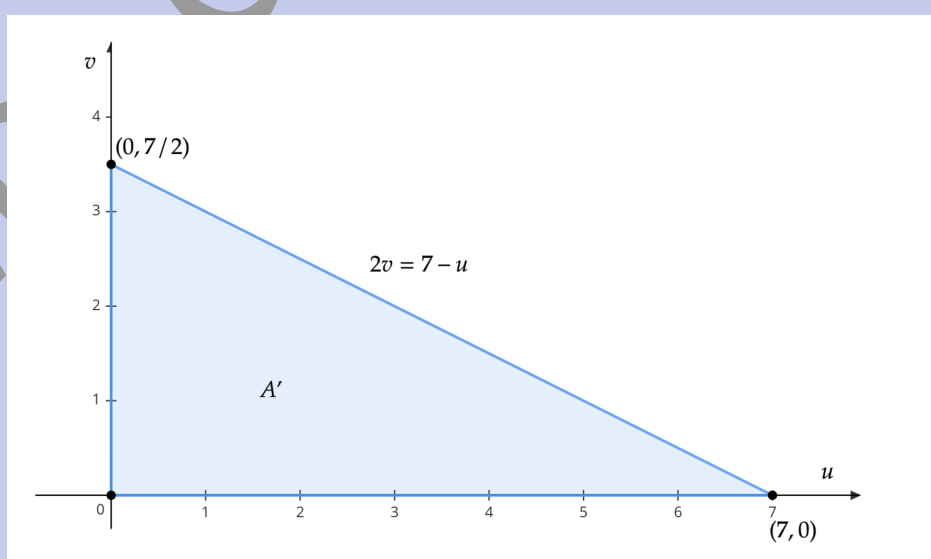
Para isto assumimos que

$$\begin{cases} 4y - x = u \\ 2x - y = v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{u+4v}{7} \\ y = \frac{2u+v}{7} \end{cases} \Rightarrow T(u,v) = \left( \frac{u+4v}{7}, \frac{2u+v}{7} \right)$$

Observamos que

$$T(0,0) = (0,0), \quad T(0,7/2) = (2,1/2) \quad \text{e} \quad T(7,0) = (1,2)$$

Portanto, temos que  $A'$  é o triângulo



Mais ainda, se substituimos  $u$  e  $v$  na reta

$$2v = 7 - u \Rightarrow 2(\overbrace{2x-y}^v) = 7 - (\overbrace{4y-x}^u) \Rightarrow 2y = -3x + 7$$

que é a reta que fecha o triângulo  $A$ .  
Com isto temos

$$J_T = \left| \det \begin{pmatrix} 1/7 & 4/7 \\ 2/7 & 1/7 \end{pmatrix} \right| = \frac{7}{49} = \frac{1}{7}.$$

Então, se vemos  $A'$  como uma região de tipo I, a integral de  $f$  ficaria

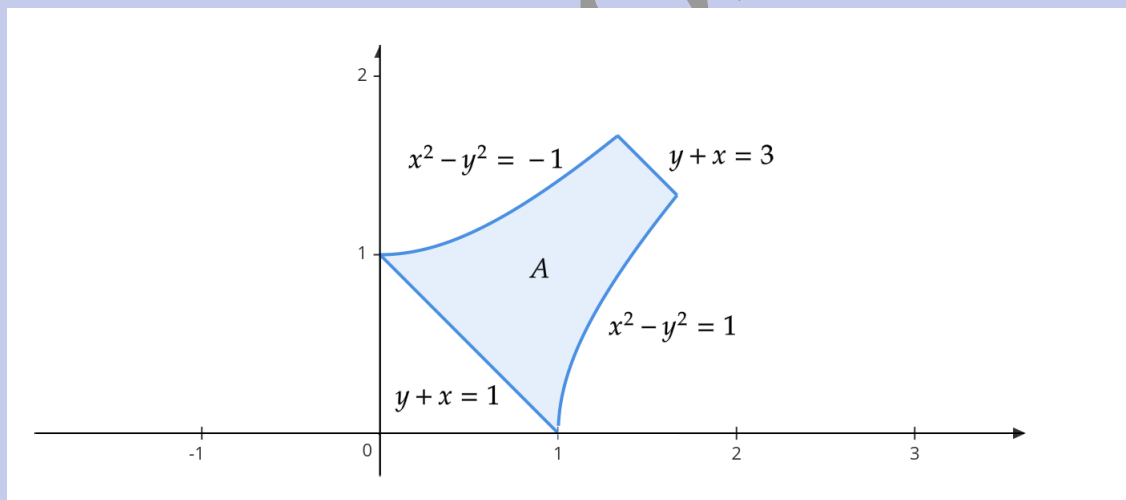
$$\iint_A f \, dA = \frac{1}{7} \int_0^7 \left( \int_0^{(7-u)/2} f\left(\frac{u+4v}{7}, \frac{2u+v}{7}\right) dv \right) du$$

ou, equivalentemente, se vemos  $A'$  como região de tipo II, ficaria

$$\iint_A f \, dA = \frac{1}{7} \int_0^{7/2} \left( \int_0^{7-2v} f\left(\frac{u+4v}{7}, \frac{2u+v}{7}\right) du \right) dv$$

- Considere uma função  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  e queremos calcular a integral de  $f$  na região  $A$  delimitada por

$$x^2 - y^2 = -1, \quad x^2 - y^2 = 1, \quad x + y = 1, \quad \text{e} \quad x + y = 3$$



Considere a transformação  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$T(u, v) = \left( \frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2} \right)$$

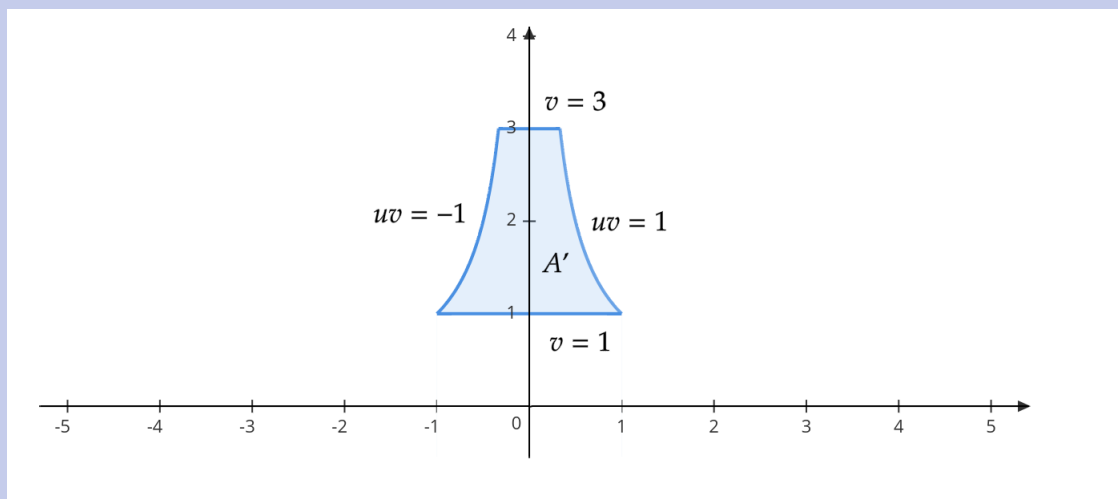
Então, observamos que

$$x^2 - y^2 = \left( \frac{u+v}{2} \right)^2 - \left( \frac{v-u}{2} \right)^2 = uv$$

$$x + y = v$$

Portanto, se  $A'$  é a região delimitada por

$$uv = -1, \quad uv = 1, \quad v = 1 \quad \text{e} \quad v = 3$$



Temos que  $T : A' \rightarrow A$  é bijetor e diferenciável. Como

$$J_T = \left| \det \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2}$$

Então, a integral de  $f$  ficaria

$$\iint_A f(x, y) \, dx dy = \frac{1}{2} \int_1^3 \int_{-1/v}^{1/v} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}\right) \, dudv$$

Por exemplo,

$$\begin{aligned} \iint_A (x-y)e^{x^2-y^2} \, dA &= \frac{1}{2} \int_1^3 \int_{-1/v}^{1/v} ue^{uv} \, dudv \\ &= \frac{1}{2} \int_1^3 \left( \frac{uv-1}{v^2} e^{uv} \right) \Big|_{-1/v}^{1/v} dv \\ &= \frac{1}{e} \int_1^3 \frac{1}{v^2} \, dv = \frac{1}{e} \left( -\frac{1}{v} \right) \Big|_1^3 = \frac{2}{3e}. \end{aligned}$$

- Considere uma função  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  e queremos calcular a integral de  $f$  no paralelepípedo  $A$  de vértices

$$P_1 = (-1, 0, 0), \quad P_2 = (0, -1, 0), \quad P_3 = (1, 0, 0) \quad \text{e} \quad P_4 = (0, 1, 0)$$

$$P_1 = (-1, 0, 1), \quad P_2 = (0, -1, 1), \quad P_3 = (1, 0, 1) \quad \text{e} \quad P_4 = (0, 1, 1)$$

Queremos fazer uma mudança de variáveis utilizando um mapa  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  de modo tal que se  $A' = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [0, 1]$  temos que  $T : A' \rightarrow A$  seja bijetor e diferenciável. Neste caso

$$T(u, v, w) = (T_1(u, v, w), T_2(u, v, w), T_3(u, v, w))$$

e para obter  $T_1(u, v, w)$ ,  $T_2(u, v, w)$  e  $T_3(u, v, w)$  substituímos  $x$ ,  $y$  e  $z$  em

$$u = x + y \quad v = x - y \quad \text{e} \quad w = z$$

e obtemos

$$w = T_3(u, v, w), \quad u = T_1(u, v, w) + T_2(u, v, w) \quad \text{e} \quad v = T_1(u, v, w) - T_2(u, v, w)$$

$$\Rightarrow \quad T_1(u, v, w) = \frac{u+v}{2} \quad T_2(u, v, w) = \frac{u-v}{2}.$$

Com isto, temos que a transformação procurada é

$$T(u, v, w) = (T_1(u, v, w), T_2(u, v, w), T_3(u, v, w)) = \left( \frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}, w \right) =$$

Portanto

$$J_T = \left| \det \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2}$$

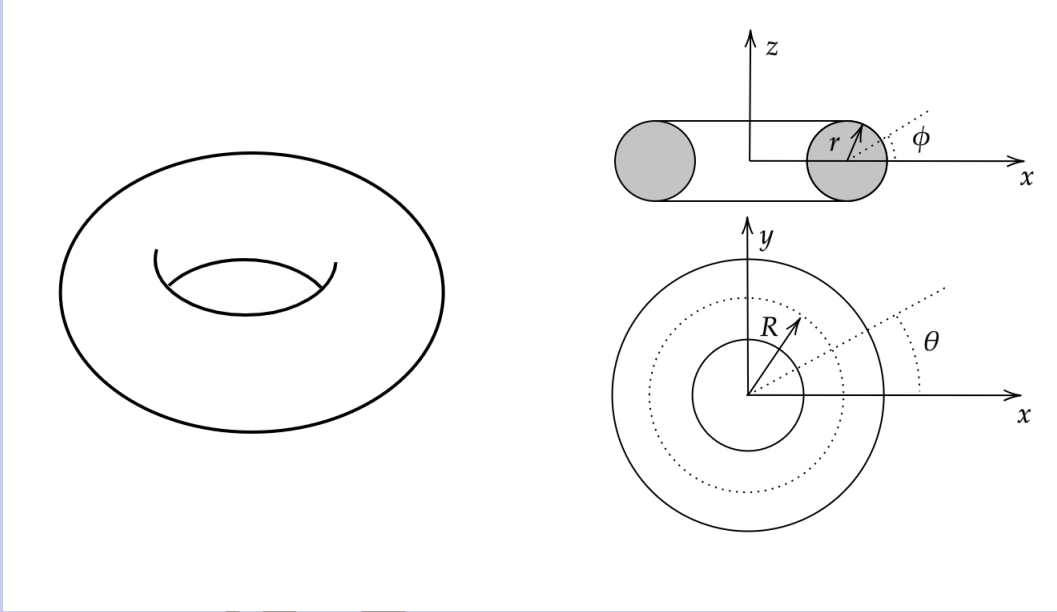
Então, a integral de  $f$  ficaria

$$\iint_A f(x, y, z) \, dx dy dz = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_0^1 f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}, w\right) \, dw du dv$$

- Vamos calcular o volume do Toro sólido  $\mathcal{T}$ , isto é, do sólido que tem por fronteira a superfície

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (R - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 = r^2 \right\}.$$

para  $R > r$ .



Considere o mapa

$$T(u, \theta, \phi) = ((R + u \cos(\phi)) \cos(\theta), (R + u \cos(\phi)) \sin(\theta), u \sin(\phi))$$

Então, temos que o Toro sólido pode ser descrito por

$$T : [0, r] \times [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathcal{T}$$

Calculamos

$$\begin{aligned} J_T &= \left| \det \begin{pmatrix} \cos(\phi) \cos(\theta) & -(R + u \cos(\phi)) \sin(\theta) & -u \sin(\phi) \cos(\theta) \\ \cos(\phi) \sin(\theta) & (R + u \cos(\phi)) \cos(\theta) & -u \sin(\phi) \sin(\theta) \\ \sin(\phi) & 0 & u \cos(\phi) \end{pmatrix} \right| \\ &= u \cos^2(\phi) \cos^2(\theta) (R + u \cos(\phi)) + u \sin^2(\theta) (R + u \cos(\phi)) + u \sin^2(\phi) \cos^2(\theta) (R + u \cos(\phi)) \\ &= u(R + u \cos(\phi)) \end{aligned}$$

Com isto,

$$\begin{aligned} V &= \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R + u \cos(\phi)) \, d\theta d\phi du \\ &= 2\pi \int_0^r \int_0^{2\pi} u(R + u \cos(\phi)) \, d\phi du \\ &= 4\pi^2 \int_0^r uR du \\ &= 2\pi^2 R r^2 = (2\pi R)(\pi r^2). \end{aligned}$$

## 13. Integrais duplas em coordenadas polares

O sistema de coordenadas polares é o sistema de coordenadas no qual cada ponto do plano  $P = (x, y)$  pode ser descrito a partir de um número real não negativo  $r \in (0, +\infty)$  e um ângulo  $\theta \in (0, 2\pi)$  que é o ângulo entre o eixo polar  $\vec{OX}$  e o vetor  $\vec{OP}$ . Desta forma, para cada ponto  $P$  no plano existe um par  $(r, \theta)$  que o descreve. A relação entre o sistema de coordenadas polares e o sistema de coordenadas cartesianas é dada por

$$x = r \cos(\theta) \quad \text{e} \quad y = r \sin(\theta).$$

Nesse sentido, a função que faz a mudança de coordenadas polares para cartesianas é um mapa diferenciável e bijetor e pode ser descrito por

$$T(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$$

Desta forma, se uma região  $U \subset \mathbb{R}^2$  é tal que existe uma região  $V \in (0, +\infty) \times (0, 2\pi)$  satisfazendo

$$T(V) = U$$

podemos aplicar o que vimos no capítulo anterior sobre mudanças de coordenadas. Para isto, primeiramente observamos que

$$J_T(r, \theta) = \left| \det \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix} \right| = r$$

Com isto, dada  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  temos que

$$\iint_U f(x, y) \, dx dy = \iint_V f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \, r dr d\theta.$$

**Obs.** Aqui há um detalhe que é as regiões que contem parte, ou todo, o eixo polar pois este conjunto do plano não está coberto pelo sistema de coordenadas polares. Neste caso não há problemas porque o eixo polar, nessas regiões, tem medida nula.

O fato do eixo polar não estar coberto é por causa de que  $\theta \in (0, 2\pi)$ . Poderíamos mudar isto para  $\theta \in (-\pi, \pi)$  mas, neste caso, o semieixo na direção oposta ao eixo polar não estaria coberto. No entanto, o mesmo se aplica, esse conjunto tem medida nula. O detalhe aqui é por causa do intervalo aberto na definição de  $\theta$ . Precisamos deste intervalo nesse formato para que  $T$  seja inversível e diferenciável.

Em qualquer caso, entendendo o conceito da medida nula, não há problema nenhum em considerar as integrais para  $\theta \in [0, 2\pi]$  ou  $\theta \in [-\pi, \pi]$ .

Assim como no caso de integrais em regiões do plano, temos dois tipos de regiões que podemos integrar em coordenadas polares

• **Região de Tipo I:**

Assuma que  $U$  é um conjunto da forma

$$U = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2, a \leq r \leq b, g(r) \leq y \leq h(r)\}$$

para  $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínuas tais que  $g(r) \leq h(r)$  para todo  $r \in [a, b]$ .

Neste caso, temos

$$\iint_U f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left[ \int_{g(r)}^{h(r)} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \, d\theta \right] r dr.$$

• **Região de Tipo II:**

Assuma que  $U$  é um conjunto da forma

$$U = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2, \alpha \leq \theta \leq \beta, g(\theta) \leq r \leq h(\theta)\}$$

para  $g, h : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  contínuas tais que  $g(\theta) \leq h(\theta)$  para todo  $\theta \in [\alpha, \beta]$ .

Neste caso, temos

$$\iint_U f(x, y) \, dx dy = \int_\alpha^\beta \left[ \int_{g(\theta)}^{h(\theta)} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \, r dr \right] d\theta.$$

■ **Exemplo 13.1** • Vamos calcular a integral de uma função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  na região

$$R = \{(x, y), y \geq 0, x^2 + y^2 \geq 1, x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

Observamos que a mesma região pode ser descrita, em coordenadas polares, por

$$R = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2, 1 \leq r \leq 3, 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

Então

$$\iint_R f(x, y) \, dx dy = \int_0^\pi \int_1^3 f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \, r dr d\theta$$

• Vamos calcular a área no interior da cardioide

$$R = \{(r, \theta), 0 \leq r \leq a(1 - \sin(\theta)), 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

em que  $a > 0$ . Podemos parametrizar esta área como

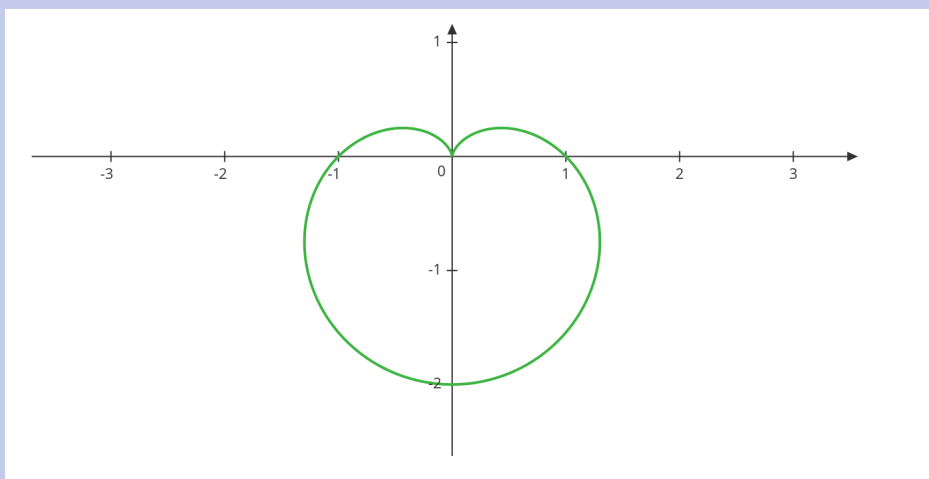
$$S = \{(r, \theta), 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq a(1 - \sin(\theta))\}$$

Então

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \int_0^{a(1-\sin(\theta))} 1 \, r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left. \frac{r^2}{2} \right|_0^{a(1-\sin(\theta))} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{a^2(1-\sin(\theta))^2}{2} d\theta \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2} - \sin(\theta) + \frac{1}{2} \sin^2(\theta) \right) d\theta \\ &= a^2 \left( \frac{1}{2} + \cos(\theta) + \frac{1}{4} \left( \theta - \frac{1}{2} \cos(2\theta) \right) \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{3a^2\pi}{2}. \end{aligned}$$

Em particular, calculamos a área delimitada pela cardioide

$$R = \{(r, \theta), r = 1 - \sin(\theta), \theta \in (0, 2\pi]\}.$$



$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^{2\pi} \int_0^{1-\sin(\theta)} r \, dr \, d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [1 - \sin(\theta)]^2 \, d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - 2\sin(\theta) + \sin^2(\theta)) \, d\theta \\
 &= \left( \theta + 2\cos(\theta) + \frac{1}{4}(2\theta - \sin(2\theta)) \right) \Big|_0^{2\pi} \\
 &= 3\pi.
 \end{aligned}$$

- Vamos calcular a área no interior da rosácea

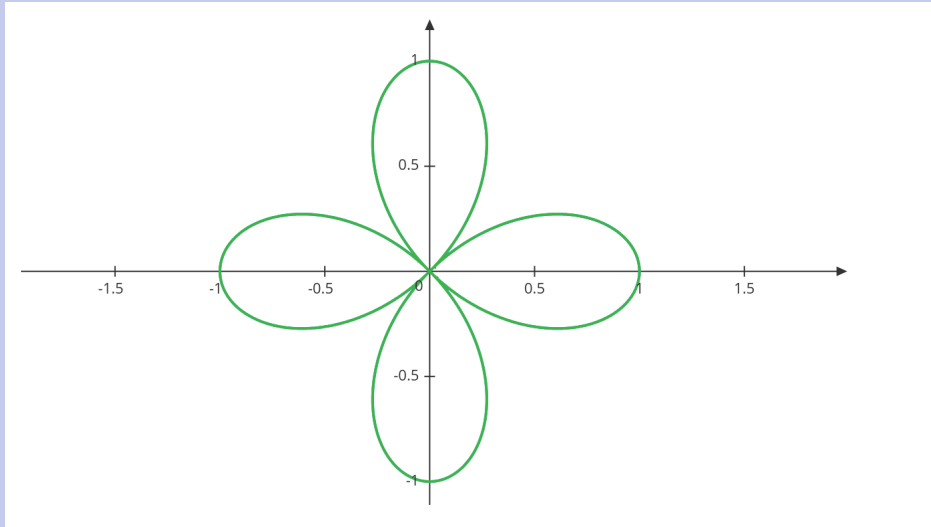
$$R = \{(r, \theta), 0 \leq r \leq a \sin(n\theta), 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Então

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^{2\pi} \int_0^{a \sin(n\theta)} r \, dr \, d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left. \frac{r^2}{2} \right|_0^{a \sin(n\theta)} d\theta \\
 &= \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (\sin(n\theta))^2 \, d\theta \\
 &= \frac{a^2}{2} \left( \frac{1}{2} \left( \theta - \frac{1}{2n} \sin(2n\theta) \right) \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{a^2 \pi}{2}.
 \end{aligned}$$

Em particular, calculamos a área delimitada pela rosácea de 4 pétalas

$$R = \{(r, \theta), r = |\cos(2\theta)|, \theta \in (0, 2\pi]\}.$$



Podemos parametrizar este área como

$$S = \{(r, \theta), 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq |\cos(2\theta)|\}$$

de onde

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \int_0^{|\cos(2\theta)|} r \, dr \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\cos(2\theta)]^2 \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \pi. \end{aligned}$$

- Vamos calcular o volume do cone delimitado por

$$z = H - a\sqrt{x^2 + y^2}, \quad \text{e} \quad z = 0.$$

Para isto, temos que calcular

$$\iint_D h \, dA$$

onde  $h(x, y) = H - a\sqrt{x^2 + y^2}$  e

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq (H/a)^2\}.$$

Calculamos esta integral em coordenadas polares. Observamos que

$$D = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq r \leq H/a\}$$

$$\begin{aligned} \iint_D h \, dA &= \int_0^{2\pi} \int_0^{H/a} (H - ar) \, r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{H/a} \int_0^{2\pi} r(H - ar) \, d\theta \, dr \\ &= 2\pi \int_0^{H/a} r(H - ar) \, dr \\ &= 2\pi \left( \frac{Hr^2}{2} - \frac{ar^3}{3} \right) \Big|_0^{H/a} = \frac{2H^3}{3a^2} \pi = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left( \frac{H}{a} \right)^2 \cdot H. \end{aligned}$$

- Vamos calcular o volume delimitado pelo parabolóide  $z = x^2 + y^2$  e pelo plano  $z = 4$ . Para isto, temos que calcular

$$\iint_D h \, dA$$

onde  $h(x, y) = 4 - x^2 - y^2$  e

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Calculamos esta integral em coordenadas polares. Observamos que

$$D = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq r \leq 2\}$$

$$\begin{aligned} \iint_D f \, dA &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2) r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 r(4 - r^2) \, d\theta \, dr \\ &= 2\pi \int_0^2 r(4 - r^2) \, dr \\ &= 2\pi \left( 2r^2 - \frac{r^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{32}{3}\pi \end{aligned}$$

- Considere a função

$$f(x, y) = \exp \left( -\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2} \right)$$

E vamos calcular

$$\iint_D h \, dA$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq R\}.$$

Calculamos esta integral em coordenadas polares. Observamos que

$$D = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq r \leq R\}$$

$$\begin{aligned} \iint_D f \, dA &= \int_0^{2\pi} \int_0^R \exp \left( -\frac{r^2}{2\sigma^2} \right) r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \exp \left( -\frac{r^2}{2\sigma^2} \right) d\theta \, dr \\ &= 2\pi \int_0^R \exp \left( -\frac{r^2}{2\sigma^2} \right) dr \\ &= 2\pi \left( -\sigma^2 \exp \left( -\frac{r^2}{2\sigma^2} \right) \right) \Big|_0^R \\ &= 2\pi \sigma^2 \left( 1 - e^{-\frac{R^2}{2\sigma^2}} \right) \end{aligned}$$

- Podemos utilizar as coordenadas polares para calcular

$$\iint_D e^{-(x^2 + y^2)} \, dA$$

Onde  $D$  é a região delimitada pelo semicírculo  $x = \sqrt{4 - y^2}$  e o eixo  $\hat{y}$ . Calculamos esta integral em coordenadas polares. Observamos que

$$D = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq r \leq 2, \quad \theta \in [-\pi/2, \pi/2]\}$$

$$\begin{aligned}\iint_D f \, dA &= \int_0^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp^{-r^2} r \, d\theta \, dr \\&= \pi \int_0^2 r \exp^{-r^2} \, dr \\&= \pi \left( -\frac{1}{2} e^{-r^2} \right) \Big|_0^2 \\&= \pi \left( \frac{1 - e^{-4}}{2} \right)\end{aligned}$$

Em elaboração ■

## 14. Integrais triplas em coordenadas cilíndricas

Assim como acontece com as coordenadas cartesianas no plano e as coordenadas polares, no espaço temos o mesmo para coordenadas cartesianas e coordenadas cilíndricas. Nas coordenadas cilíndricas, um ponto do espaço é identificado por uma terna  $(r, \theta, z)$  em que  $r \in (0, +\infty)$ ,  $\theta \in (0, 2\pi)$  (ou  $\theta \in (-\pi, \pi)$ ) e  $z \in \mathbb{R}$  de forma tal que a relação entre o sistema de coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$  e as coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  estão relacionadas por

$$x = r \cos(\theta) \quad y = r \sin(\theta) \quad \text{e} \quad z = z.$$

Nesse sentido, a função que faz a mudança de coordenadas polares para cartesianas é um mapa diferenciável e bijetor e pode ser descrito por

$$T(r, \theta, z) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z)$$

Desta forma, se uma região  $U \subset \mathbb{R}^3$  é tal que existe uma região  $V \in (0, +\infty) \times (0, 2\pi)$  satisfazendo

$$T(V) = U$$

podemos aplicar o que vimos para mudança de coordenadas e integrais e obtemos, primeiramente que

$$J_T(r, \theta, z) = \left| \det \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = r$$

Com isto, dada  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  temos que

$$\iiint_U f(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint_V f(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) \, r dr d\theta dz.$$

destacamos aqui duas regiões que podemos encontrar em coordenadas cilíndricas

- **Região de Tipo I:**

Assuma que  $U \subset \mathbb{R}^3$  é um conjunto da forma

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y), (x, y) \in D\}$$

Para  $D$  um conjunto que pode ser parametrizado em coordenadas cilíndricas como

$$D = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2, a \leq r \leq b, g(r) \leq \theta \leq h(r)\}$$

para  $g, h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínuas tais que  $g(r) \leq h(r)$  para todo  $r \in [a, b]$ .

Neste caso, temos

$$\iint_U f(x, y) dA = \int_a^b \left[ \int_{g(r)}^{h(r)} \left( \int_{u_1(r, \theta)}^{u_2(r, \theta)} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) dz \right) d\theta \right] r dr.$$

para

$$u_1(r, \theta) = u_1(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \quad \text{e} \quad u_2(r, \theta) = u_2(r \cos(\theta), r \sin(\theta)).$$

• **Região de Tipo II:**

Assuma que  $U \subset \mathbb{R}^3$  é um conjunto da forma

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y), (x, y) \in D\}$$

Para  $D$  um conjunto que pode ser parametrizado em coordenadas cilíndricas como

$$D = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2, \alpha \leq \theta \leq \beta, g(\theta) \leq r \leq h(\theta)\}$$

para  $g, h: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  contínuas tais que  $g(\theta) \leq h(\theta)$  para todo  $\theta \in [\alpha, \beta]$ .

Neste caso, temos

$$\iiint_U f(x, y) dA = \int_\alpha^\beta \left[ \int_{g(\theta)}^{h(\theta)} \left( \int_{u_1(r, \theta)}^{u_2(r, \theta)} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) dz \right) r dr \right] d\theta.$$

para

$$u_1(r, \theta) = u_1(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \quad \text{e} \quad u_2(r, \theta) = u_2(r \cos(\theta), r \sin(\theta)).$$

■ **Exemplo 14.1**

• Considere a região  $R$  delimitada pelo cilindro de equação  $x^2 + y^2 = 1$  abaixo do plano  $z = 4$  e acima do parabolóide  $z = 1 - x^2 - y^2$ . Vamos calcular a integral de  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Em coordenadas cilíndricas esta região está dada por

$$R = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3, 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 1 - r^2 \leq z \leq 4\}$$

Então

$$\begin{aligned} \iiint_R f(x, y, z) dx dy dz &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{1-r^2}^4 r dz dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 (3 + r^2) dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left( r^3 + \frac{1}{5} r^5 \right) \Big|_0^1 d\theta \\ &= \frac{12}{5} \pi. \end{aligned}$$

- Suponhamos que temos que calcular

$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^4 (x^2 + y^2) \, dz dy dx$$

Se passamos isto a coordenadas cilíndricas temos

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^4 (x^2 + y^2) \, dz dy dx &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_r^4 r^2 \, rdz dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^3(4-r) dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left. r^4 - \frac{r^5}{5} \right|_0^2 d\theta \\ &= \frac{96}{5} \pi. \end{aligned}$$

■

Em elaboração

## 15. Integrais triplas em coordenadas esféricas

Outro sistema de coordenadas para o espaço é o sistema de coordenadas esféricas. Neste sistema de coordenadas um ponto do espaço é identificado por uma terna  $(r, \theta, \phi)$  em que  $r \in (0, +\infty)$ ,  $\theta \in (0, 2\pi)$  (ou  $\theta \in (-\pi, \pi)$ ) e  $\phi \in (0, \pi)$  de forma tal que a relação entre o sistema de coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$  e as coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  estão relacionadas por

$$x = r \cos(\theta) \sin(\phi) \quad y = r \sin(\theta) \sin(\phi) \quad \text{e} \quad z = r \cos(\phi).$$

Nesse sentido, a função que faz a mudança de coordenadas polares para cartesianas é um mapa diferenciável e bijetor e pode ser descrito por

$$T(r, \theta, \phi) = (r \cos(\theta) \sin(\phi), r \sin(\theta) \sin(\phi), r \cos(\phi))$$

Desta forma, se uma região  $U \subset \mathbb{R}^3$  é tal que existe uma região  $V \in (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi)$  satisfazendo

$$T(V) = U$$

podemos aplicar o que vimos para mudança de coordenadas e integrais e obtemos, primeiramente que

$$J_T(r, \theta, \phi) = \left| \det \begin{pmatrix} \cos(\theta) \sin(\phi) & -r \sin(\theta) \sin(\phi) & r \cos(\theta) \cos(\phi) \\ \sin(\theta) \sin(\phi) & r \cos(\theta) \sin(\phi) & r \sin(\theta) \cos(\phi) \\ \cos(\phi) & 0 & -r \sin(\phi) \end{pmatrix} \right| = r^2 \sin(\phi)$$

Com isto, dada  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  temos que

$$\iiint_U f(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint_V f(r \cos(\theta) \sin(\phi), r \sin(\theta) \sin(\phi), r \cos(\phi)) \, r^2 \sin(\phi) \, dr d\theta d\phi.$$

Assim como acontece com coordenadas cartesianas, assumamos que  $U \subset \mathbb{R}^3$  é um conjunto que pode ser descrito, em coordenadas esféricas, na forma

$$U = \{(r, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3, a \leq r \leq b, g_1(r) \leq \theta \leq g_2(r), k_1(r, \theta) \leq \phi \leq k_2(r, \theta)\}$$

para  $g_1, g_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínuas tais que  $g_1(x) \leq g_2(x)$  para todo  $x \in [a, b]$  e  $k_1, k_2 : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  contínuas tais que  $k_1(r, \theta) \leq k_2(r, \theta)$  para todo  $(r, \theta) \in V$ .

Então

$$\iiint_U f(x, y, z) \, dV = \int_a^b \left[ \int_{g_1(r)}^{g_2(r)} \left( \int_{k_1(r, \theta)}^{k_2(r, \theta)} f(r, \theta, \phi) r^2 \sin(\phi) \, d\phi \right) d\theta \right] dr.$$

Analogamente, podem ser tratados os outros casos.

■ **Exemplo 15.1** • Vamos calcular o volume da esfera

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}.$$

Para isto utilizamos coordenadas esféricas. Em coordenadas esféricas temos que

$$B = \{(r, \theta, \phi), \theta \in [0, 2\pi], \phi \in [0, \pi], 0 \leq r \leq a\}$$

Portanto, o volume é dado por

$$\begin{aligned} \iiint_B dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^\pi r^2 \sin(\phi) \, d\phi dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^a r^2 (-\cos(\phi)) \Big|_0^\pi dr d\theta \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} r^3 \Big|_0^a d\theta \\ &= \frac{4}{3} \pi a^3. \end{aligned}$$

• Vamos calcular

$$\iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \, dV$$

onde

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Para isto utilizamos coordenadas esféricas. Em coordenadas esféricas temos que

$$B = \{(r, \theta, \phi), \theta \in [0, 2\pi], \phi \in [0, \pi], 0 \leq r \leq 1\}$$

e a integral fica,

$$\begin{aligned} \iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \, dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^\pi e^{r^3} r^2 \sin(\phi) \, d\phi dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{r^3} r^2 (-\cos(\phi)) \Big|_0^\pi dr d\theta \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} e^{r^3} \Big|_0^1 d\theta \\ &= \frac{4}{3} (e - 1) \pi. \end{aligned}$$

• Vamos calcular o volume do sólido  $S$  delimitado pelo cone

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

e pela esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = z.$$

Em coordenadas esféricas podemos escrever as equações que delimitam o sólido como

$$\tan(\phi) = 1 \quad \Rightarrow \quad \phi = \pi/4$$

e

$$r^2 = r \cos(\phi) \quad \Rightarrow \quad r = \cos(\phi).$$

Assim, o sólido é definido por

$$S = \{(r, \theta, \phi), \theta \in [0, 2\pi], \phi \in [0, \pi/4], 0 \leq r \leq \cos(\phi)\}$$

e a integral fica,

$$\begin{aligned} \iiint_S dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\cos(\phi)} r^2 \sin(\phi) dr d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \left. \frac{r^3}{3} \right|_0^{\cos(\phi)} \sin(\phi) d\phi d\theta \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \cos^3(\phi) \sin(\phi) d\phi d\theta \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \left. \frac{-1}{4} \cos^4(\phi) \right|_0^{\pi/4} d\phi d\theta \\ &= \frac{1}{16} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

■

Em elaboração

## 16. Integral ao longo de curvas

Em muitos problemas práticos, como calcular o trabalho realizado por uma força ao longo de um caminho ou a circulação de um campo vetorial, é necessário somar valores de uma função não apenas sobre um intervalo, mas ao longo de uma curva no espaço. Para isso, utilizamos as integrais ao longo de curvas (ou integrais de linha).

Essas integrais generalizam a ideia da integral definida de funções reais para trajetórias mais gerais, permitindo a análise de fenômenos que dependem do caminho percorrido, não apenas dos pontos finais.

Historicamente, as integrais de linha surgiram no século XVIII, com trabalhos de matemáticos como Euler e Green, e foram formalizadas no contexto do cálculo vetorial para tratar problemas da física, como eletromagnetismo e mecânica dos fluidos. Elas são fundamentais para o desenvolvimento de teoremas centrais do cálculo multivariado, como os teoremas de Green, Stokes e da divergência.

Assim, as integrais ao longo de curvas são ferramentas poderosas para conectar geometria, análise e física, possibilitando a modelagem e a solução de problemas reais que envolvem movimentos, forças e fluxos em trajetórias curvas.

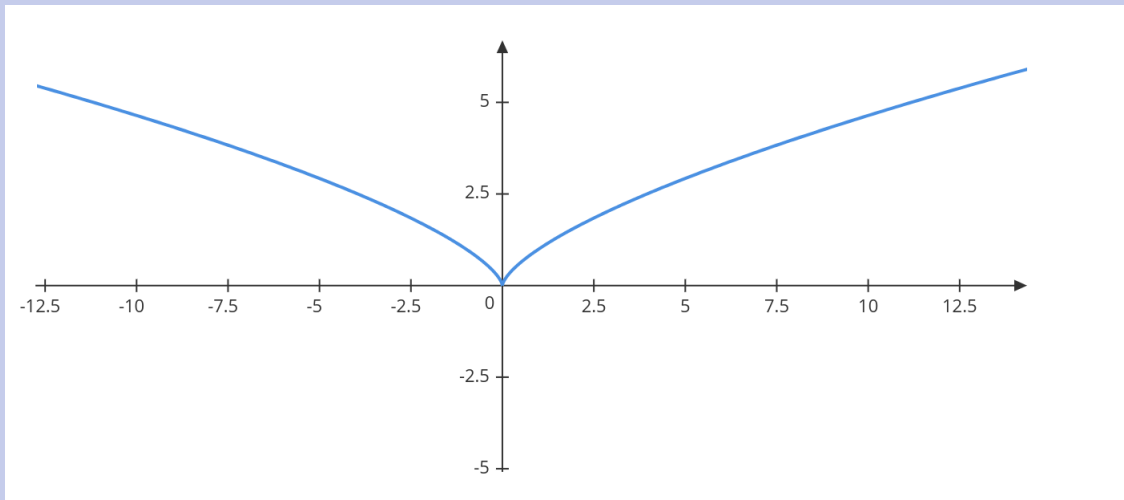
Começamos lembrando algumas definições básicas de curvas. Dado  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo, uma curva em  $\mathbb{R}^n$  é uma função  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ . O traço da curva é o conjunto imagem de  $\gamma$  e que, em particular, a curva  $\gamma$  é dita fechada se  $\gamma(a) = \gamma(b)$  e simples se não existem  $a < x_1 \neq x_2 < b$  tais que  $\gamma(x_1) = \gamma(x_2)$  isto é, não há autointerseções.

Alem disto, a derivada da função  $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  no ponto  $s$ , que denotamos por  $\gamma'(s)$ , é chamado de vetor tangente à curva  $\gamma$  no ponto  $\gamma(s)$ .

■ **Exemplo 16.1** • Considere a curva  $C$  parametrizada por  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$\gamma(t) = (t^3, t^2) \Rightarrow \gamma'(t) = (3t^2, 2t)$$

Neste caso,  $C$  é simples mas não é fechada. O seu gráfico é

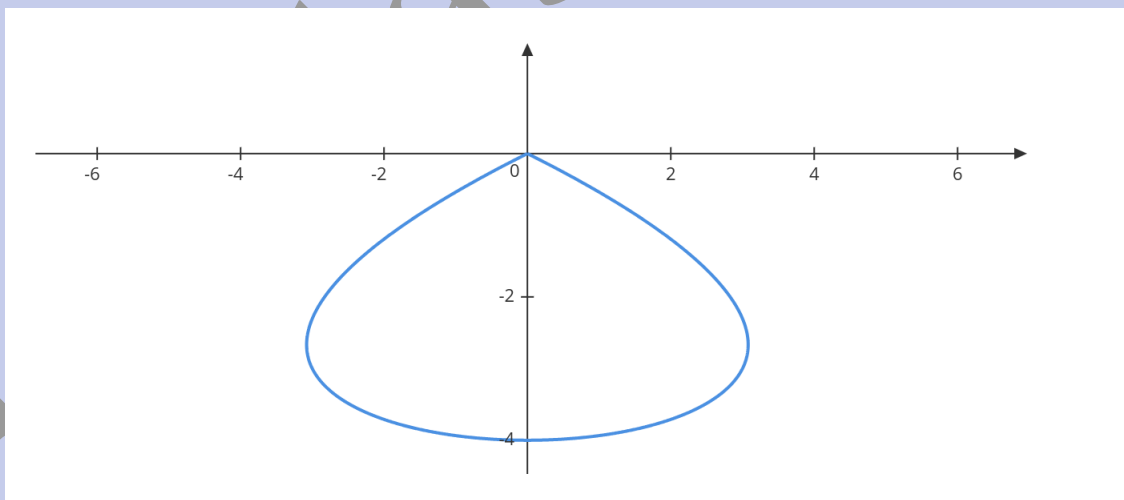


Observamos que  $\gamma'(0) = 0$ .

- Considere a curva  $C$  parametrizada por  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$\gamma(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4) \Rightarrow \gamma'(t) = (3t^2, 2t)$$

Neste caso,  $C$  não é simples. O seu gráfico é

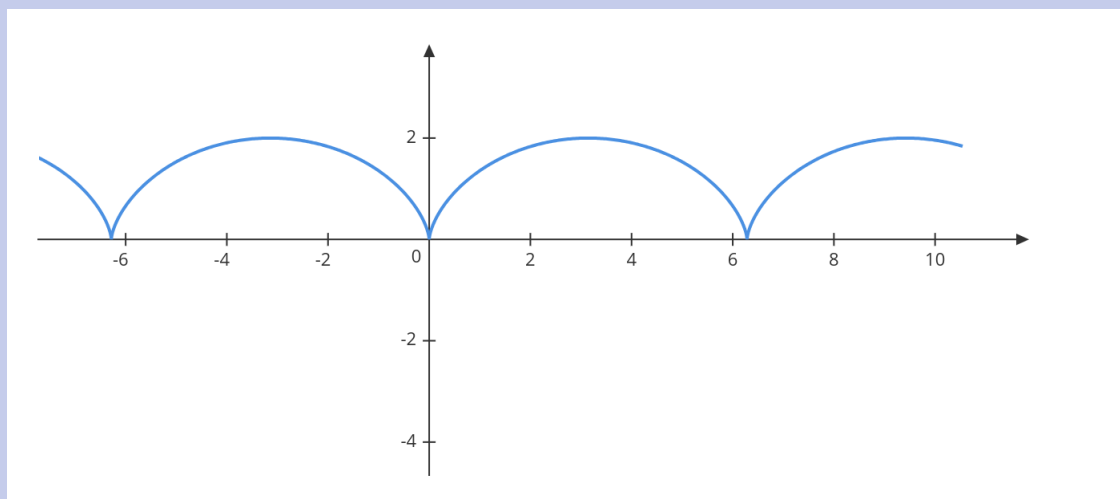


Observamos que  $\gamma'(t) \neq 0$  para todo  $t$ .

- Considere a curva  $C$  parametrizada por  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$\gamma(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t)) \Rightarrow \gamma'(t) = (1 - \cos(t), \sin(t))$$

Esta curva recebe o nome de **Ciclóide** e é a curva obtida ao descrever o movimento de um ponto fixo sobre um disco que roda, sem escorregar, ao longo do eixo  $\hat{x}$ . Neste caso,  $C$  é simples. O seu gráfico é



Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto,  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma curva tal que  $\gamma([a, b]) \subset U$  e  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. Considere uma partição

$$P: a \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

Denotamos por

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1},$$

e definimos a **amplitude da partição**  $P$  por

$$\Delta = \sup\{\Delta t_i, 0 \leq i \leq n\}.$$

Observamos que pedir

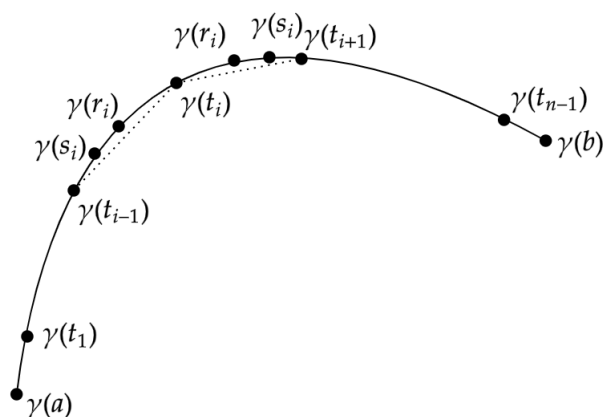
$$\Delta \rightarrow 0 \quad \text{é equivalente a pedir } \Delta t_i \rightarrow 0.$$

Considere uma família de pontos

$$Z = \{s_i \in [t_{i-1}, t_i], i = 1 \dots n\}.$$

Definimos a **soma de Riemann de  $f$  relativa a partição  $P$  e aos pontos  $s_i$**  pela expressão.

$$S(f, P, Z) = \sum_{i=1}^n f(\gamma(s_i)) d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1})).$$



Observamos que existe um  $r_i \in [t_{i-1}, t_i]$

$$d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1})) = \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \simeq \|\gamma'(r_i)\|(t_i - t_{i-1})$$

e, portanto, quando  $\Delta \ll 1$  temos que

$$S(f, P, Z) = \sum_{i=1}^n f(\gamma(s_i)) \|\gamma'(r_i)\| (t_i - t_{i-1}) \simeq \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n f(\gamma(s_i)) \|\gamma'(s_i)\| (t_i - t_{i-1})$$

Por lo que vimos em cálculo de uma variável temos que quando  $\Delta \rightarrow 0$  tal que

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\gamma(s_i)) \|\gamma'(r_i)\| (t_i - t_{i-1}) \simeq \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n f(\gamma(s_i)) \|\gamma'(s_i)\| (t_i - t_{i-1}) = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt.$$

**Definição 16.1** Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto, e  $C$  uma curva em  $U$  parametrizada por  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , isto é,  $\gamma([a, b]) = C \subset U$  e  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. Definimos a **integral de  $f$  ao longo da curva  $C$**  como sendo

$$\int_C f d\gamma = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt,$$

quando a integral existe.

Em particular, o **comprimento de arco da curva  $C$** , que denotamos por  $\ell(C)$ , é dado pela integral da função constante  $f = 1$ , isto é,

$$\ell(C) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

■ **Exemplo 16.2** • Seja  $C$  uma curva parametrizada por  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$\gamma(t) = (t, f(t))$$

em que  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável. Então

$$\gamma'(t) = (1, f'(t))$$

e, portanto,

$$\ell(C) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt.$$

• Considere a curva  $C$  parametrizada por  $\gamma: [-b, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

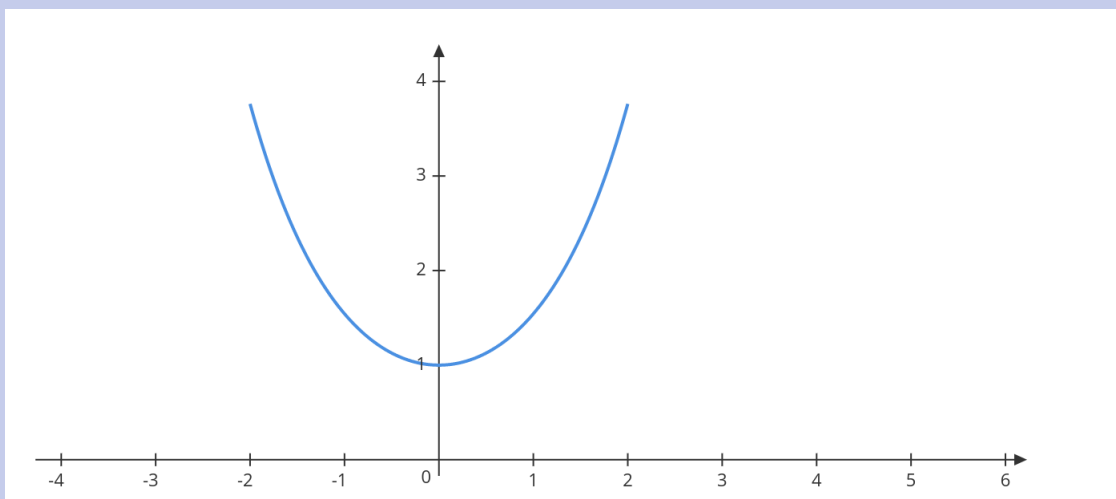
$$\gamma(t) = (t, a \cosh(t/a)) \Rightarrow \gamma'(t) = (1, \sinh(t/a))$$

Esta curva recebe o nome de **Catenária** e é a curva descrita por uma corda suspensa que está amarrada nos extremos. Neste caso,  $\gamma$  é simples.

Por exemplo, o gráfico da catenária  $\gamma[-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  quando  $a = 1$ , isto é,

$$\gamma(t) = (t, \cosh(t))$$

é dado por



Vamos calcular o comprimento de arco. Observamos que

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + \sinh(t/a)^2} = \cosh(t/a).$$

Portanto,

$$\ell(C) = \int_{-b}^b \cosh(t/a) dt = 2 \sinh(b/a)$$

- Seja  $C$  uma curva parametrizada por  $\gamma: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$\gamma(t) = (a \cos(t), a \sin(t), bt) \Rightarrow \gamma'(t) = (-a \sin(t), a \cos(t), b)$$

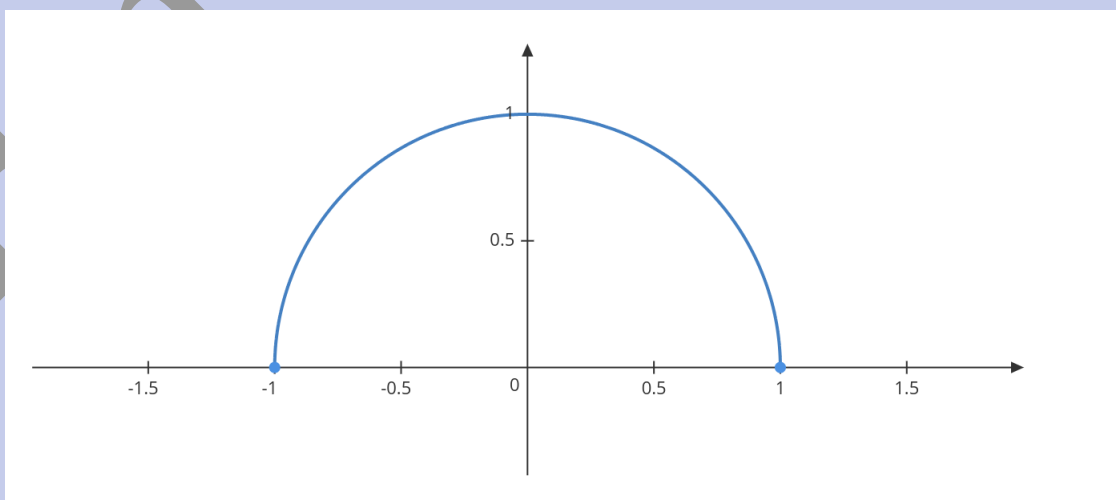
Esta curva é a **Hélice** e é uma curva simples. Vamos calcular o comprimento de arco. Observamos que

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Portanto,

$$\ell(C) = \int_0^T \sqrt{a^2 + b^2} dt = T\sqrt{a^2 + b^2}$$

- Seja  $C$  uma curva parametrizada por  $\gamma$  que é dada pela metade superior do círculo unitário de equação  $x^2 + y^2 = 1$ .



Vamos calcular a integral

$$\int_C (2 + x^2 y) d\gamma$$

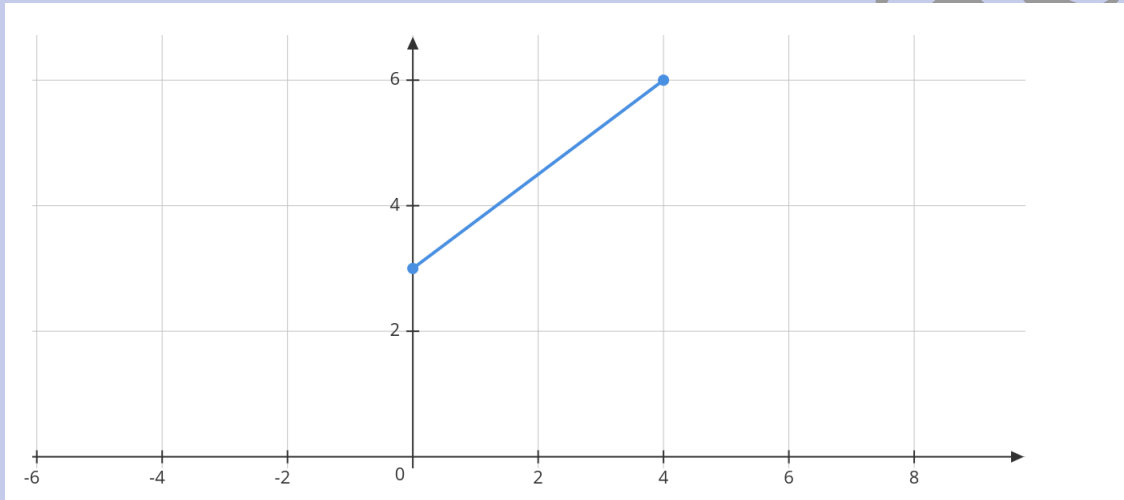
Observamos que

$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)) \quad t \in [0, \pi] \Rightarrow \gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t)) \quad \text{e} \quad \|\gamma'(t)\| = 1.$$

Com isto

$$\begin{aligned} \int_C (2 + x^2 y) \, ds &= \int_0^\pi (2 + \cos(t)^2 \sin(t)) \, dt \\ &= 2t - \frac{1}{3} \cos(t)^3 \Big|_0^\pi \\ &= 2\pi + \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

- Seja  $C$  uma curva parametrizada por  $\gamma$  que é dada pelo segmento de linha que une os pontos  $(0, 3)$  e  $(4, 6)$ .



Vamos calcular a integral

$$\int_C (x \sin(y)) \, d\gamma$$

Observamos que

$$\gamma(t) = t(4, 6) + (1-t)(0, 3) = (4t, 3t+3) \quad t \in [0, 1] \Rightarrow \gamma'(t) = (4, 3) \quad \text{e} \quad \|\gamma'(t)\| = 5.$$

Com isto

$$\begin{aligned} \int_C (x \sin(y)) \, d\gamma &= \int_0^1 4t \sin(3t+3) \cdot 5 \, dt \\ &= 20 \left[ \frac{1}{9} \sin(3t+3) - \frac{t}{3} \cos(3t+3) \right]_0^1 \\ &= \frac{20}{9} [\sin(6) - 3 \cos(6) - \sin(3)]. \end{aligned}$$

**Definição 16.2** Uma curva  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  é dita uma **curva suave por partes** se existe uma partição

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

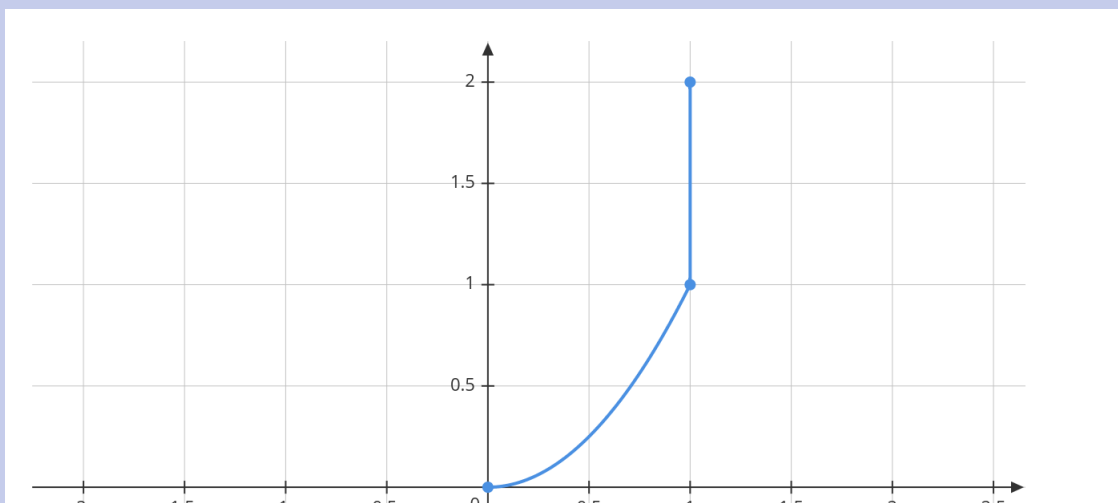
e funções  $\gamma_i: [t_{i-1}, t_i] \rightarrow \mathbb{R}^n$  tais que  $\gamma_i(t_i) = \gamma_{i+1}(t_i)$  tais que

$$\gamma(t) = \gamma_i(t) \quad \text{se} \quad t \in [t_{i-1}, t_i].$$

Para o caso de curvas suaves por partes definimos a **integral de  $f$  ao longo da curva  $C$  que está parametrizada por  $\gamma$**  como

$$\int_C f \, d\gamma = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\gamma_i(t)) \|\gamma_i'(t)\| \, dt,$$

- **Exemplo 16.3** • Seja  $C$  uma curva parametrizada por  $\gamma$  que é dada pelo arco da parábola de equação  $y = x^2$  entre o ponto  $(0,0)$  e  $(1,1)$  seguido pelo segmento de reta vertical que une os pontos  $(1,1)$  e  $(1,2)$ .



Vamos calcular a integral

$$\int_C (2x) d\gamma$$

Observamos que

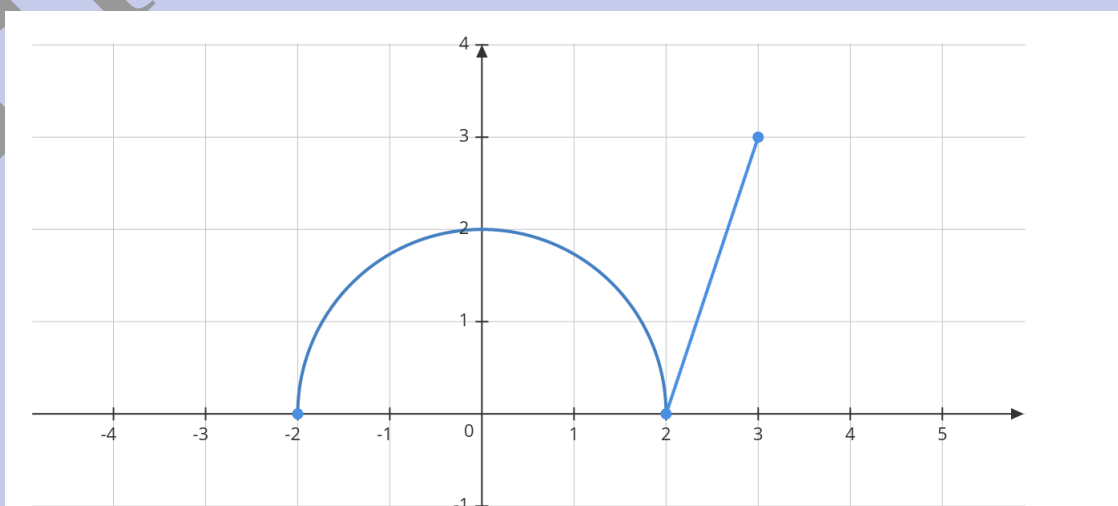
$$\gamma(t) = \begin{cases} (t, t^2) & \text{se } t \in [0, 1] \\ (1, t) & \text{se } t \in [1, 2] \end{cases} \Rightarrow \gamma'(t) = \begin{cases} (1, 2t) & \text{se } t \in [0, 1] \\ (0, 1) & \text{se } t \in [1, 2] \end{cases}$$

$$\text{e } \|\gamma'(t)\| = \begin{cases} \sqrt{1+4t^2} & \text{se } t \in [0, 1] \\ 1 & \text{se } t \in [1, 2] \end{cases}.$$

Com isto

$$\begin{aligned} \int_C (2x) ds &= \int_0^1 (2t) \sqrt{1+4t^2} dt + \int_1^2 2 dt \\ &= \frac{1}{6} \sqrt{(1+4t^2)^3} \Big|_0^1 + 2t \Big|_1^2 \\ &= \frac{5\sqrt{5}}{6} - \frac{1}{6} + 4 - 2 \\ &= \frac{5\sqrt{5}}{6} + \frac{11}{6}. \end{aligned}$$

- Seja  $C$  uma curva parametrizada por  $\gamma$  que é dada pela parte de cima da circunferência  $x^2 + y^2 = 4$  e o segmento de reta que une os pontos  $(2,0)$  e  $(3,3)$ .



Vamos calcular a integral

$$\int_C xy \, d\gamma$$

Observamos que

$$\gamma(t) = \begin{cases} (-2\cos(\pi t), 2\sin(\pi t)) & \text{se } t \in [0, 1] \\ (1+t, 3t-3) & \text{se } t \in [1, 2] \end{cases} \Rightarrow \gamma'(t) = \begin{cases} (2\pi\sin(\pi t), 2\pi\cos(\pi t)) & \text{se } t \in [0, 1] \\ (1, 3) & \text{se } t \in [1, 2] \end{cases}$$

$$\text{e } \|\gamma'(t)\| = \begin{cases} 2\pi & \text{se } t \in [0, 1] \\ \sqrt{10} & \text{se } t \in [1, 2] \end{cases}.$$

Com isto

$$\begin{aligned} \int_C (xy) \, d\gamma &= \int_0^1 (-4\cos(\pi t)\sin(\pi t)) 2\pi \, dt + \int_1^2 (3(t^2-1)) \sqrt{10} \, dt \\ &= 8\cos(\pi t)^2 \Big|_0^1 + \sqrt{10}(t^3-3t) \Big|_1^2 \\ &= 4\sqrt{10}. \end{aligned}$$

**Corolário 16.1** Seja  $C$  uma curva parametrizada por  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  que é uma função suave por partes e considere a parametrização na direção contrária  $\gamma^{-1}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por

$$\gamma^{-1}(t) = \gamma(b+a-t)$$

Então, se  $C = \text{Img}(\gamma) \subset U$ , e  $C^{-1}$  denota a curva  $C$  com a parametrização contrária  $\gamma^{-1}$ , para toda função  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  temos que

$$\int_C f \, d\gamma = - \int_{C^{-1}} f \, d\gamma^{-1}.$$

**Corolário 16.2** Sejam  $\gamma_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\gamma_2: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$  duas curvas suaves por partes tais que  $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$ . Considere  $\tilde{\gamma}: [a, b] \cup [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por

$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{se } t \in [a, b] \\ \gamma_2(t) & \text{se } t \in [c, d] \end{cases}$$

Então, se  $\text{Img}(\tilde{\gamma}) \subset U$ , para toda função  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  temos que

$$\int f \, d\tilde{\gamma} = \int f \, d\gamma_1 + \int f \, d\gamma_2.$$

*Demonstração.* Considere

$$t(s) = (d-c)s + c - b(d-c).$$

Observamos que  $u$  é diferenciável e que

$$u(b) = c, \quad u(b+1) = d \quad \text{e} \quad u[b, b+1] = [c, d],$$

em particular

$$dt = (d-c) \, ds$$

e

$$\frac{d}{ds} \gamma_2(t(s)) = \gamma_2'(t(s))(d-c) \Rightarrow \|\gamma_2'(t(s))\| = \frac{1}{d-c} \left\| \frac{d}{ds} \gamma_2(t(s)) \right\|.$$

$$\begin{aligned}
\int f d\gamma_2 &= \int_c^d f(\gamma_2(t)) \|\gamma_2'(t)\| dt \\
&= \int_b^{b+1} f(\gamma_2(t(s))) \frac{1}{d-c} \left\| \frac{d}{ds} \gamma_2(t(s)) \right\| (d-c) ds. \\
&= \int_b^{b+1} f(\gamma_2(t(s))) \left\| \frac{d}{ds} \gamma_2(t(s)) \right\| ds.
\end{aligned}$$

Com isto, temos que se

$$\tilde{\gamma}_2(t) = \gamma_2((d-c)t + c - b(d-c)) \quad \text{para } t \in [b, b+1]$$

então

$$\int f d\gamma_2 = \int f d\tilde{\gamma}_2.$$

Portanto se

$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{se } t \in [a, b] \\ \tilde{\gamma}_2(t) & \text{se } t \in [b, b+1] \end{cases}$$

então

$$\begin{aligned}
\int f d\gamma &= \int f d\gamma_1 + \int f d\tilde{\gamma}_2 \\
&= \int f d\gamma_1 + \int f d\gamma_2.
\end{aligned}$$

■

Em elaboração

## 17. Superfícies parametrizadas

Vamos estudar agora o conceito de superfícies parametrizadas. Estas são uma ferramenta fundamental na análise de formas tridimensionais no cálculo vetorial. Assim como curvas no espaço podem ser descritas por funções vetoriais de uma variável, superfícies podem ser descritas por funções vetoriais de duas variáveis. A parametrização nos permite estudar propriedades geométricas das superfícies, como área, orientação e fluxos de campos vetoriais, além de preparar o terreno para aplicações mais avançadas, como integrais de superfície e o Teorema de Stokes e Gauss.

**Definição 17.1** Uma **superfície parametrizada**  $S$  é o conjunto imagem de uma função injetora  $\phi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , isto é,  $\phi(U) = S$ . Neste caso a função  $\phi$  recebe o nome de **parametrização** pois descreve a superfície em função de parâmetros.

A superfície é dita **superfície regular** se  $\phi$  for diferenciável.

Uma superfície  $S$  é dita uma **superfície regular por partes** se  $S$  pode ser escrita como uma união de superfícies regulares, isto é,  $S = S_1 \cup \dots \cup S_n$  com  $S_i$  superfície regular para  $i = 1 \dots, n$ , de forma tal que

$$S_i \cap S_j = \begin{cases} \emptyset & \text{ou} \\ \text{Curva parametrizada} \end{cases}$$

■ **Exemplo 17.1** • Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável. Então, se  $U = \text{Dom}(f)$ , podemos definir a superfície parametrizada

$$\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \phi(x, y) = (x, y, f(x, y)).$$

Observamos que, neste caso,  $\phi(U) = S = \text{Graf}(f)$ .

Alguns exemplos destas pode ser

– Um plano  $\pi : ax + by + d = z$ , onde  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e

$$\phi(x, y) = (x, y, ax + by + d).$$

– a calota superior da esfera

$$\phi : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 1\} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \phi(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}).$$

– o parabolóide  $\phi : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 1\} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \phi(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$

- O Toro é a superfície

$$T^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z^2 = r^2 - (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2\}.$$

Ela pode ser parametrizada por

$$\phi : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 1\} \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$\phi(u, v) = ((r \cos(u) + a) \cos(v), (r \cos(u) + a) \sin(v), r \sin(u)).$$

- A catenoide é uma superfície gerada pela revolução de uma catenária, no plano  $x = 0$ , em torno do eixo  $\hat{z}$ . Ela pode ser parametrizada por

$$\phi : [-b, b] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \phi(u, v) = (a \cosh(u/a) \cos v, a \cosh(u/a) \sin v, u)$$

- A esfera pode ser vista como superfície parametrizada de várias formas:

- A função  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$\phi(u, v) = \frac{1}{1 + u^2 + v^2} (2u, 2v, u^2 + v^2 - 1),$$

descreve uma superfície parametrizada, neste caso, a esfera

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

Esta forma de descrever a esfera como superfície parametrizada recebe o nome de **Projeção estereográfica**.

- A função  $\phi : (0, 2\pi) \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$\phi(u, v) = (\cos(u) \sin(v), \sin(u) \sin(v), \cos(v)).$$

■

Para entendermos a geometria de uma superfície no espaço, é essencial saber como ela "aponta" ou se orienta em cada ponto. Isso nos leva à noção de vetor normal.

Se a superfície for um plano é fácil saber qual é o vetor normal à superfície pois, neste caso, é o próprio vetor normal ao plano.

Se a superfície tiver curvatura, a noção de vetor normal pode não ficar tão clara. Podemos pensar que o normal à superfície deve ser um vetor ortogonal as direções tangentes à superfície no ponto. Diferente do que acontece nas curvas, que têm uma única direção em cada ponto, uma superfície tem infinitas direções tangentes — e elas ficam acumuladas na noção de plano tangente.

Assim podemos definir o **vetor normal a uma superfície  $S$  num ponto  $p$**  como o vetor perpendicular ao plano tangente a  $S$  no ponto  $p$ .

Agora vamos estudar como caracterizar o vetor normal em termos da parametrização. Lembramos que o plano tangente à gráfica de uma função  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  é o plano  $\pi \subset \mathbb{R}^3$  tal que

- $p \in \pi$
- para toda curva  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$  tal que  $\gamma(0) = (x_0, y_0)$  temos que  $(\gamma, f \circ \gamma)'(0)$  é paralelo a  $\pi$ .

Portanto, o plano tangente é paralelo aos vetores

$$\partial_1 \phi(x, y) = (1, 0, \partial_1 f(x, y)) \quad \text{e} \quad \partial_2 \phi(x, y) = (0, 1, \partial_2 f(x, y))$$

ou, equivalentemente, tinha como vetor normal a

$$\eta = \frac{1}{\|\partial_1 \phi(x, y) \times \partial_2 \phi(x, y)\|} \partial_1 \phi(x, y) \times \partial_2 \phi(x, y) = \frac{1}{\|(\nabla f(x, y), -1)\|} (\nabla f(x, y), -1)$$

Utilizando esta ideia, queremos estender esta noção ao caso de superfícies. Assuma que  $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$\phi(x, y) = (\phi_1(x, y), \phi_2(x, y), \phi_3(x, y))$$

e seja  $S$  a superfície parametrizada. Seja  $a = (x_0, y_0)$  um ponto de  $U$  e considere uma curva diferenciável  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \quad \text{e tal que} \quad \gamma'(0) = (v_1, v_2).$$

Então

$$(\phi \circ \gamma)'(0) = (\partial_1 \phi_1(x_0, y_0)v_1 + \partial_2 \phi_1(x_0, y_0)v_2, \partial_1 \phi_2(x_0, y_0)v_1 + \partial_2 \phi_2(x_0, y_0)v_2, \partial_1 \phi_3(x_0, y_0)v_1 + \partial_2 \phi_3(x_0, y_0)v_2)$$

Se denotamos

$$\partial_1 \phi(x, y) = (\partial_1 \phi_1(x, y), \partial_1 \phi_2(x, y), \partial_1 \phi_3(x, y))$$

$$\partial_2 \phi(x, y) = (\partial_2 \phi_1(x, y), \partial_2 \phi_2(x, y), \partial_2 \phi_3(x, y))$$

Então, temos que

$$(\phi \circ \gamma)'(0) = v_1 \partial_1 \phi(x_0, y_0) + v_2 \partial_2 \phi(x_0, y_0).$$

Portanto, para toda curva  $\gamma$  teremos que  $\phi \circ \gamma$  terá um vetor tangente a  $S$  em  $p$  que é combinação linear dos vetores  $\{\partial_1 \phi(x_0, y_0), \partial_2 \phi(x_0, y_0)\}$  e, conseqüentemente, o plano tangente deve ser paralelo a estes mesmos vetores. Com isto, temos que o vetor normal do plano tangente será

$$\eta = \frac{1}{\|\partial_1 \phi(x_0, y_0) \times \partial_2 \phi(x_0, y_0)\|} \cdot \partial_1 \phi(x_0, y_0) \times \partial_2 \phi(x_0, y_0).$$

**Definição 17.2** Seja  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $S = \phi(U)$  uma superfície parametrizada,  $(x_0, y_0) \in U$  e  $(a, b, c) = \phi(x_0, y_0) \in S$  um ponto. Assuma que

$$\{\partial_1 \phi(x_0, y_0), \partial_2 \phi(x_0, y_0)\}$$

é um conjunto linearmente independente. O **plano tangente a  $S$  em  $p$**  é o plano definido pela equação a seguir

$$\mathbf{n}(x_0, y_0) \cdot (x - a, y - b, z - c) = 0 \quad \text{onde} \quad \mathbf{n}(x_0, y_0) = \partial_1 \phi(x_0, y_0) \times \partial_2 \phi(x_0, y_0).$$

O **vetor normal a  $S$  no ponto  $p = (a, b, c)$**  é dado por

$$\eta(x_0, y_0) = \frac{1}{\|\mathbf{n}(x_0, y_0)\|} \mathbf{n}(x_0, y_0).$$

**Obs.**

A definição de vetor normal dada acima, como depende de um produto vetorial, depende da ordem em que é feito o produto. Temos, portanto, duas possíveis orientações para o vetor normal sendo uma um múltiplo por  $-1$  da outra.

■ **Exemplo 17.2** • Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável e considere a superfície parametrizada

$$\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \phi(x, y) = (x, y, f(x, y)).$$

Neste caso

$$\partial_1 \phi(x, y) = (1, 0, \partial_1 f(x, y)) \quad \text{e} \quad \partial_2 \phi(x, y) = (0, 1, \partial_2 f(x, y))$$

Então

$$\partial_1 \phi(x, y) \times \partial_2 \phi(x, y) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \partial_1 f(x, y) \\ 0 & 1 & \partial_2 f(x, y) \end{vmatrix} = (-\partial_1 f(x, y), -\partial_2 f(x, y), 1)$$

Portanto

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial_1 f(x, y))^2 + (\partial_2 f(x, y))^2}} (-\partial_1 f(x, y), -\partial_2 f(x, y), 1)$$

Por exemplo, no caso da esfera, temos

$$f(x, y) = \pm \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

Portanto, utilizando que  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , temos que

$$\eta = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}) = (x, y, z).$$

- No caso do Toro, temos

$$\phi : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 1\} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \phi(u, v) = ((r \cos(u) + a) \cos(v), (r \cos(u) + a) \sin(v), r \sin(u)).$$

Neste caso

$$\partial_1 \phi(u, v) = (-r \sin(u) \cos(v), -r \sin(u) \sin(v), r \cos(u)) \quad \text{e}$$

$$\partial_2 \phi(u, v) = (-(r \cos(u) + a) \sin(v), (r \cos(u) + a) \cos(v), 0)$$

Então

$$\begin{aligned} \partial_1 \phi(u, v) \times \partial_2 \phi(u, v) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -r \sin(u) \cos(v) & -r \sin(u) \sin(v) & r \cos(u) \\ -(r \cos(u) + a) \sin(v) & (r \cos(u) + a) \cos(v) & 0 \end{vmatrix} \\ &= -((r \cos(u) + a) r \cos(v) \cos(u), (r \cos(u) + a) r \sin(v) \cos(u), (r \cos(u) + a) r \sin(u)) \\ &= -[(r \cos(u) + a) r] (\cos(v) \cos(u), \sin(v) \cos(u), \sin(u)). \end{aligned}$$

Portanto

$$\eta = -(\cos(v) \cos(u), \sin(v) \cos(u), \sin(u)).$$

- No caso da catenoide parametrizada por

$$\phi : [-b, b] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \phi(u, v) = (a \cosh(u/a) \cos v, a \cosh(u/a) \sin v, u)$$

Temos

$$\partial_1 \phi(u, v) = (\sinh(u/a) \cos(v), \sinh(u/a) \sin(v), 1) \quad \text{e}$$

$$\partial_2 \phi(u, v) = (-a \cosh(u/a) \sin(v), a \cosh(u/a) \cos(v), 0)$$

Então

$$\begin{aligned} \partial_1 \phi(u, v) \times \partial_2 \phi(u, v) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \sinh(u/a) \cos(v) & \sinh(u/a) \sin(v) & 1 \\ -a \cosh(u/a) \sin(v) & a \cosh(u/a) \cos(v) & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-a \cosh(u/a) \cos(v), -a \cosh(u/a) \sin(v), a \sinh(u/a) \cosh(u/a)) \\ &= -a \cosh(u/a) (\cos(v), \sin(v), -\sinh(u/a)) \end{aligned}$$

Portanto

$$\eta = \frac{1}{\cosh(u/a)} (-\cos(v), -\sin(v), \sinh(u/a)).$$

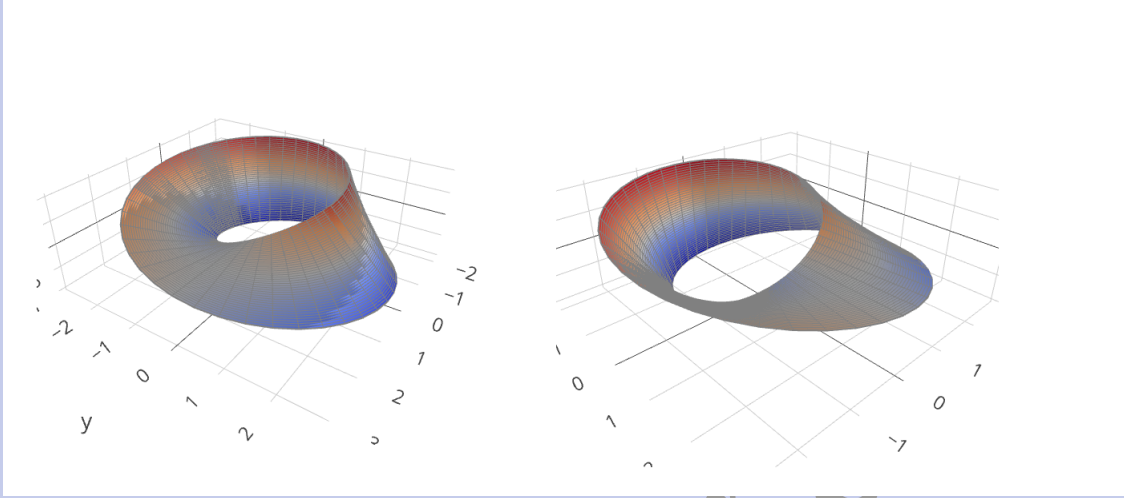
Onde temos utilizado que

$$\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1.$$

■ **Exemplo 17.3** Faixa de Möbius e calcular vetor normal. Neste caso  $\phi : [0, 2\pi] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  é definida por

$$\phi(u, v) = ((2 + v \cos(u/2)) \cos(u), (2 + v \cos(u/2)) \sin(u), v \sin(u/2))$$

Cuja gráfica é



Observe que uma curva parametrizada por  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  é da forma

$$\gamma(t) = \phi(1, 2t\pi) \rightarrow \gamma(0) = (3, 0, 0) \text{ e } \gamma(1) = (1, 0, 0)$$

Portanto não é fechada. Mas a curva parametrizada por  $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  da forma

$$\tilde{\gamma}(t) = \phi(0, 2t\pi) \rightarrow \tilde{\gamma}(0) = (2, 0, 0) = \tilde{\gamma}(1)$$

é fechada.

Vamos ver outra peculiaridade referente ao vetor normal.

$$\partial_u \phi(u, v) = \left( -\frac{v}{2} \sin(u/2) \cos(u) - (2 + v \cos(u/2)) \sin(u), -\frac{v}{2} \sin(u/2) \sin(u) + (2 + v \cos(u/2)) \cos(u), \frac{v}{2} \cos(u/2) \right)$$

$$\partial_v \phi(u, v) = (\cos(u/2) \cos(u), \cos(u/2) \sin(u), \sin(u/2))$$

e observamos que

$$\begin{aligned} (\partial_u \times \partial_v)(u, v) &= v \cdot \left( \frac{\sin(u) + \sin(u) \cos(u)}{2}, \frac{\cos(u) + \sin^2(u)}{2}, \cos^2(u/2) \right) \\ &\quad + 2(\cos(u) \sin(u/2), \sin(u) \sin(u/2), -\cos(u/2)) \end{aligned}$$

Observamos que os pontos

$$\phi(0, 0) = (2, 0, 0) = \phi(0, 2\pi)$$

no entanto

$$(\partial_u \times \partial_v)(0, 0) = (0, 0, -2) \text{ e } (\partial_u \times \partial_v)(0, 2\pi) = (0, 0, 2)$$

Vemos, então, que na faixa de Möbius, ao movimentarmos um ponto com um vetor normal ao longo da superfície, após uma volta completa, o vetor normal retorna invertido em relação à sua posição original. Isso mostra que não há uma maneira consistente de definir um vetor normal em todos os pontos da superfície de forma contínua. ■

Para descartar casos como o da faixa de Möbius, damos a seguinte definição:

**Definição 17.3** Seja  $S$  uma superfície parametrizada regular. Dizemos que  $S$  é uma **superfície orientada** se admite uma escolha contínua do vetor normal em toda a superfície. Em outras palavras, conseguimos definir um mapa contínuo

$$\eta : S \rightarrow \mathbb{R}^3$$

em que  $\eta(p)$  é o vetor normal a  $S$  em  $p$ .

Em elaboração

## 18. Integrais de superfície

As integrais de superfície surgem naturalmente quando queremos somar valores de uma função ao longo de uma superfície, ao invés de apenas uma curva ou intervalo. Elas são essenciais para calcular, por exemplo, o fluxo de um campo vetorial através de uma superfície — algo fundamental em física para descrever o fluxo de fluidos, campos elétricos e magnéticos.

Essas integrais ampliam o conceito de integrais duplas e integrais de linha, permitindo uma análise detalhada de fenômenos distribuídos sobre superfícies curvas no espaço tridimensional.

Historicamente, o desenvolvimento das integrais de superfície está ligado aos trabalhos de Gauss e Stokes no século XIX, que estabeleceram bases para os teoremas que relacionam integrais de superfície e integrais de linha, como o Teorema de Stokes. Essas ferramentas são fundamentais para o cálculo vetorial e têm amplo uso em engenharia, física e outras ciências aplicadas.

Portanto, as integrais de superfície são uma extensão natural das integrais em regiões do plano, possibilitando estudar e resolver problemas que envolvem grandezas distribuídas sobre superfícies complexas.

Seja  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $S = \phi(U)$  uma superfície parametrizada,  $(x_0, y_0) \in U$  e  $(a, b, c) = \phi(x_0, y_0) \in S$  um ponto. Assuma que

$$\{\partial_1 \phi(x, y), \partial_2 \phi(x, y)\}$$

é um conjunto linearmente independente para todo  $(x, y) \in U$ . Por simplicidade vamos assumir que  $U = (a, b) \times (c, d)$  e consideremos as seguintes partições

$$P_1 : a < x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \quad \text{e} \quad P_2 : c < y_0 < y_1 < \dots < y_m = d,$$

e, com estas partições, criamos uma partição de  $U$  em pequenos retângulos

$$P := P_1 \times P_2 = \{R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]\}$$

Denotamos por

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad \text{e} \quad \Delta y_j = y_j - y_{j-1} \quad \forall 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m,$$

e definimos a **amplitude da partição**  $P$  por

$$\Delta = \sup\{\Delta x_i, \Delta y_j, 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m\}.$$

Observamos, assim como feito anteriormente, que pedir

$$\Delta \rightarrow 0 \quad \text{é equivalente a pedir } \Delta x_i \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \Delta y_j \rightarrow 0.$$

Observamos que a partição  $P$  define uma partição de  $S$  em retalhos

$$\tilde{P} = \{S_{ij} = \phi(R_{ij}), 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m\}.$$

Seja  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e considere agora uma família de pontos

$$Z = \{z_{ij} = (x_i, y_j) \in R_{ij}, 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m\}$$

e defina

$$\tilde{Z} = \{p_{ij} = \phi(z_{ij}), 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m\} \subset S, \quad \text{e} \quad A_{ij} = \text{Area}(S_{ij})$$

Definimos **soma de Riemann de  $f$  relativa a partição  $\tilde{P}$  e aos pontos  $p_{ij}$**  pela expressão.

$$S(f, \tilde{P}, Z) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n f(p_{ij}) A_{ij}$$

Se a partição  $P$  tiver  $\Delta \ll 1$  então podemos assumir que  $S_{ij}$  pode ser aproximado por um retângulo no plano tangente definido pelo ponto  $\phi(x_{i-1}, y_{j-1})$  e lados dados pelos vetores

$$v_1 = \partial_1 \phi(x_{i-1}, y_{j-1}) \Delta x_i \quad \text{e} \quad v_2 = \partial_2 \phi(x_{i-1}, y_{j-1}) \Delta y_j.$$

Do que vimos em geometria analítica, este retângulo tem área dada por

$$\tilde{A}_{ij} = \|\partial_1 \phi(x_{i-1}, y_{j-1}) \times \partial_2 \phi(x_{i-1}, y_{j-1})\| \Delta x_i \Delta y_j$$

Com isto, a soma de Riemann pode ser escrita

$$S(f, \tilde{P}, Z) \simeq \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n f(\phi(z_{ij})) \|\partial_1 \phi(x_{i-1}, y_{j-1}) \times \partial_2 \phi(x_{i-1}, y_{j-1})\| \Delta x_i \Delta y_j$$

Logo, considerando uma sequência de partições  $\{P_k\}$  cujas amplitudes  $\Delta_k$  converge para zero, junto a uma família de pontos  $Z_k \in P_k$ , , teremos que

$$S(f, \tilde{P}_k, Z_k) \rightarrow \iint_U (f \circ \phi)(x, y) \|\partial_1 \phi(x, y) \times \partial_2 \phi(x, y)\| \, dx dy.$$

Isto motiva a seguinte definição

**Definição 18.1** Seja  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $S = \phi(U)$  uma superfície parametrizada. Assuma que

$$\{\partial_1 \phi(x, y), \partial_2 \phi(x, y)\}$$

é um conjunto linearmente independente para todo  $(x, y) \in U$ . Seja  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. Definimos a **integral de  $f$  sobre a superfície  $S$**  como

$$\iint_S f(x, y, z) \, d\mathbf{A} = \iint_U (f \circ \phi)(x, y) \|\partial_1 \phi(x, y) \times \partial_2 \phi(x, y)\| \, dx dy.$$

Em particular, a **Área de  $S$**  é definida como a integral de  $f \equiv 1$  sobre a superfície  $S$ , isto é

$$\text{Area}(S) = \iint_U \|\partial_1 \phi(x, y) \times \partial_2 \phi(x, y)\| \, dx dy.$$

■ **Exemplo 18.1** • Seja  $S$  uma superfície que é gráfico de uma função  $g : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Neste caso,

$$\phi(x, y) = (x, y, g(x, y)),$$

e, calculando, temos

$$\partial_x \phi(x, y) = (1, 0, \partial_x g(x, y)) \quad \text{e} \quad \partial_y \phi(x, y) = (0, 1, \partial_y g(x, y)),$$

de onde

$$(\partial_x \phi \times \partial_y \phi)(x, y) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \partial_x g(x, y) \\ 0 & 1 & \partial_y g(x, y) \end{vmatrix} = (-\partial_x g(x, y), -\partial_y g(x, y), 1)$$

Então

$$\|(\partial_x \phi \times \partial_y \phi)(x, y)\| = \sqrt{\partial_x g(x, y)^2 + \partial_y g(x, y)^2 + 1},$$

Portanto, se  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função temos que

$$A = \iint_U f(x, y) \sqrt{1 + \partial_x g(x, y)^2 + \partial_y g(x, y)^2} dA.$$

- Considere a esfera de raio  $a$  descrita por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$$

Podemos parametrizá-la pela função  $\phi : (0, 2\pi) \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$\phi(u, v) = (a \cos(u) \sin(v), a \sin(u) \sin(v), a \cos(v)).$$

Calculamos

$$\partial_u \phi(u, v) = (-a \sin(u) \sin(v), a \cos(u) \sin(v), 0)$$

$$\partial_v \phi(u, v) = (a \cos(u) \cos(v), a \sin(u) \cos(v), -a \sin(v))$$

Com isto,

$$\begin{aligned} (\partial_u \phi \times \partial_v \phi)(u, v) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a \sin(u) \sin(v) & a \cos(u) \sin(v) & 0 \\ a \cos(u) \cos(v) & a \sin(u) \cos(v) & -a \sin(v) \end{vmatrix} \\ &= (-a^2 \cos(u) \sin(v)^2, -a \sin(u) \sin(v)^2, -a^2 \sin(v) \cos(v)) \end{aligned}$$

Então

$$\|(\partial_u \phi \times \partial_v \phi)(u, v)\| = a^2 \sin(v).$$

Com isto,

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi a^2 \sin(v) dv du \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} (-\cos(v)) \Big|_0^\pi du \\ &= 2a^2 (\theta)_0^{2\pi} = 4a^2 \pi \end{aligned}$$

- O Toro é a superfície

$$T^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z^2 = r^2 - (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2\}.$$

Ela pode ser parametrizada por

$$\phi : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 1\} \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$\phi(u, v) = ((r \cos(u) + a) \cos(v), (r \cos(u) + a) \sin(v), r \sin(u)).$$

$$\begin{aligned} (\partial_u \phi \times \partial_v \phi)(u, v) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -r \sin(u) \cos(v) & -r \sin(u) \sin(v) & r \cos(u) \\ -(r \cos(u) + a) \sin(v) & (r \cos(u) + a) \cos(v) & 0 \end{vmatrix} \\ &= -((r \cos(u) + a) r \cos(v) \cos(u), (r \cos(u) + a) r \sin(v) \cos(u), (r \cos(u) + a) r \sin(u)) \\ &= -(r \cos(u) + a) r (\cos(v) \cos(u), \sin(v) \cos(u), \sin(u)) \\ ||(\partial_u \phi \times \partial_v \phi)(u, v)|| &= (r \cos(u) + a) r. \end{aligned}$$

Com isto,

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (r \cos(u) + a) r \, du \, dv \\ &= \int_0^{2\pi} (r^2 \sin(u) + ar) \Big|_0^{2\pi} \, dv \\ &= 4\pi^2 ar = (2\pi a) \cdot (2\pi r). \end{aligned}$$

- A catenoide é uma superfície gerada pela revolução de uma catenária, no plano  $x = 0$ , em torno do eixo  $\hat{z}$ . Ela pode ser parametrizada por

$$\phi : [-b, b] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \phi(u, v) = (a \cosh(u/a) \cos v, a \cosh(u/a) \sin v, u)$$

$$\begin{aligned} (\partial_u \phi \times \partial_v \phi)(u, v) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \sinh(u/a) \cos v & \sinh(u/a) \sin v & 1 \\ -a \cosh(u/a) \sin v & a \cosh(u/a) \cos v & 0 \end{vmatrix} \\ &= -(a \cosh(u/a) \cos v, a \cosh(u/a) \sin v, -a \cosh(u/a) \sinh(u/a)) \\ &= -a \cosh(u/a) (\cos v, \sin v, -\sinh(u/a)) \\ ||(\partial_u \phi \times \partial_v \phi)(u, v)|| &= a \cosh(u/a)^2. \end{aligned}$$

Com isto,

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \int_{-b}^b a \cosh(u/a)^2 \, du \, dv \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{au}{2} + \frac{a^2 \sinh(2u/a)}{2} \right) \Big|_{-b}^b \, dv \\ &= 2\pi a^2 \sinh\left(\frac{2b}{a}\right). \end{aligned}$$

- Calculamos a integral de superfície

$$\iint_S x^2 \, dS$$

onde  $S$  é a esfera unitária. Neste caso, substituímos  $a = 1$  no item acima, e obtemos que  $\phi : (0, 2\pi) \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$\phi(u, v) = (\cos(u) \sin(v), \sin(u) \sin(v), \cos(v)).$$

Então

$$||(\partial_u \phi \times \partial_v \phi)(u, v)|| = \sin(v).$$

Com isto,

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\cos(u) \sin(v))^2 \sin(v) \, dv \, du \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos(u)^2 \sin(v)^3 \, dv \, du \\ &= \frac{4}{3} \pi \end{aligned}$$

- Calculamos a integral de superfície

$$\iint_S y \, dS$$

onde  $S$  é a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = x + y^2, (x, y) \in [0, 1] \times [0, 2]\}.$$

Com isto, a parametrização fica definida por

$$\phi(x, y) = (x, y, x + y^2)$$

Calculamos

$$\begin{aligned} (\partial_x \phi \times \partial_y \phi)(x, y) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} \\ &= (-1, -2y, 1) \end{aligned}$$

Então

$$\|(\partial_x \phi \times \partial_y \phi)(x, y)\| = \sqrt{2 + 4y^2}.$$

Com isto,

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \int_0^2 y \sqrt{2 + 4y^2} \, dy dx \\ &= \left( \frac{1}{12} (2 + 4y^2)^{3/2} \right) \Big|_0^2 \\ &= \frac{1}{12} (54\sqrt{2} - 2\sqrt{2}) \\ &= \frac{13}{3} \sqrt{2}. \end{aligned}$$

■

Em elaboração



# Cálculo Vetorial

19	Campos vetoriais .....	159
20	Integrais de linha de campos vetoriais	167
21	Integrais de superfície de campos vetoriais	175
22	Rotacional e Divergente .....	183
23	Operadores em coord. cilíndricas e esféricas .....	195
23.1	Coordenadas Cilíndricas	
23.2	Coordenadas Esféricas	
24	Teorema de Green .....	209
25	Teorema de Stokes .....	223
26	Teorema da divergência .....	231

Em elaboração

## 19. Campos vetoriais

Começamos agora a estudar a teoria de Campos vetoriais. Os campos vetoriais surgem com Newton (século XVII) na formulação da gravitação e das leis do movimento. Ele introduz a ideia de forças agindo ponto a ponto no espaço — ainda não formalizadas como "campos vetoriais", mas já no espírito da coisa. Mais tarde, Faraday (século XIX) introduziu o conceito de linhas de força para descrever campos elétricos e magnéticos, uma ideia muito próxima da noção moderna de campo vetorial. Mais ou menos na mesma época, Maxwell formalizou as leis do eletromagnetismo em termos de equações diferenciais envolvendo campos vetoriais, consolidando-os como ferramenta central na física.

Mais tarde, Gauss, Green e Kelvin desenvolveram os fundamentos matemáticos dos campos vetoriais, com teoremas que relacionam fluxos e derivadas (divergente, rotacional, etc. e que veremos depois).

A grosso modo, os campos vetoriais são funções que atribuem um vetor a cada ponto de um determinado espaço. Em termos simples, um campo vetorial associa uma "seta" (com direção, sentido e intensidade) a cada ponto de uma região do espaço. Passamos às definições formais.

**Definição 19.1** Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  uma região de  $\mathbb{R}^n$ . Um **campo vetorial sobre  $U$**  é uma função  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  da forma

$$F(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)).$$

O campo vetorial  $F$  será dito contínuo se  $F$  for contínua, e será dito de classe  $C^r$  se  $F$  for de classe  $C^r$ .

Obs.

- Pela forma que escrevemos acima, vemos que, nas primeiras  $n$  coordenadas de  $F(x_1, \dots, x_n)$  aparece simplesmente as coordenadas  $(x_1, \dots, x_n)$ . Isto é importante porque, de alguma forma, indica o lugar do campo vetorial (veja que são as coordenadas do ponto onde a função assume valores), no entanto, sobrecarrega bastante a notação. Desta forma, e por convenção, vamos nos referir à função do campo vetorial  $F$  a partir das últimas  $n$  coordenadas. Desta forma, e por abuso de notação, vamos dizer que um campo vetorial é uma função  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por

$$F(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)).$$

Mas vamos entender que estamos falando explicitamente que o campo vetorial  $F$  se corresponde a uma função  $\tilde{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  da forma

$$\tilde{F}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$$

onde, suas últimas  $n$  coordenadas são precisamente as que definem  $F(x_1, \dots, x_n)$ .

Esta notação condensada permite a seguinte representação gráfica. Por exemplo se  $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é um campo vetorial definido para  $(a, b) \in U$  por

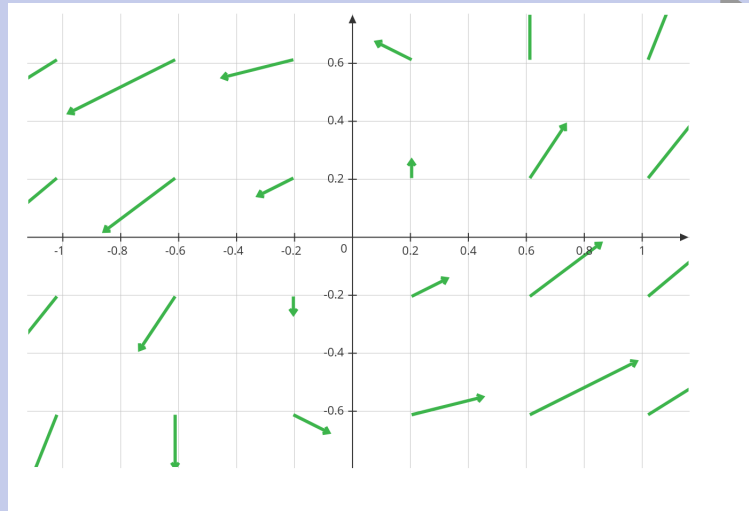
$$F(a, b) = (f_1(a, b), f_2(a, b))$$

Portanto, se queremos representar o campo vetorial, temos que pensar em desenhar a função

$$\tilde{F}(a, b) = (a, b, f_1(a, b), f_2(a, b)) \in \mathbb{R}^4.$$

o que é impossível. No entanto, podemos fazer o seguinte, em cada ponto  $(a, b) \in U$  traçamos um vetor correspondente a um vetor de coordenadas  $F(a, b) = (f_1(a, b), f_2(a, b))$  com origem no ponto  $(a, b)$ .

Por exemplo, se  $F(x, y) = (x - y, x)$  teremos que



- Se definimos sobre  $\mathbb{R}^n$  os vetores canônicos  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  sobre  $\mathbb{R}^n$  tais que

$$\mathbf{e}_i = (0, \dots, 0, \overbrace{1}^i, 0, \dots, 0).$$

Então

$$F(x_1, \dots, x_n) = (F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_n(x_1, \dots, x_n)) = \sum_{i=1}^n F_i(x_1, \dots, x_n) \mathbf{e}_i$$

Em particular,

– em  $\mathbb{R}^2$  tal que

$$\mathbf{i} = (1, 0) \quad \text{e} \quad \mathbf{j} = (0, 1).$$

Temos que

$$F(x, y) = F_1(x, y)\mathbf{i} + F_2(x, y)\mathbf{j}.$$

– em  $\mathbb{R}^3$  tal que

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0) \quad \text{e} \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1).$$

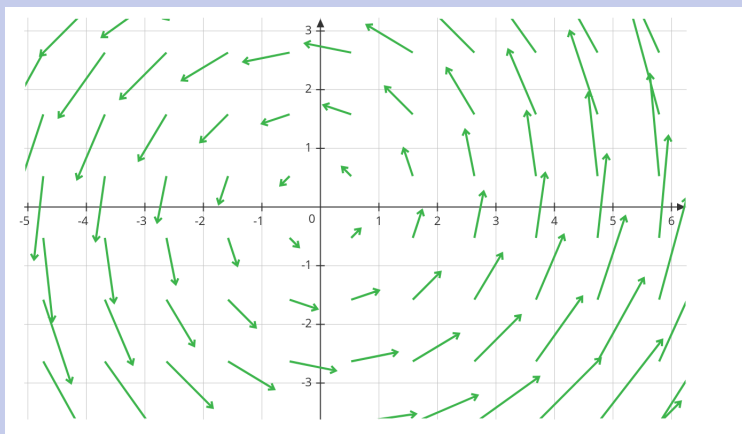
Temos que

$$F(x, y, z) = F_1(x, y, z)\mathbf{i} + F_2(x, y, z)\mathbf{j} + F_3(x, y, z)\mathbf{k}.$$

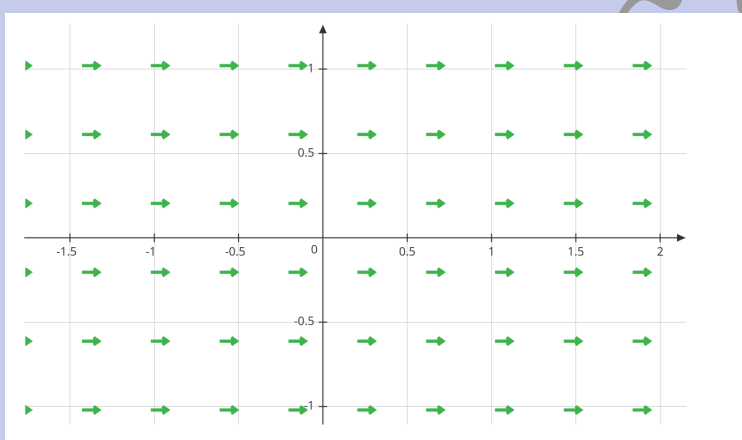
### ■ Exemplo 19.1

- As seguintes funções descrevem campos vetoriais

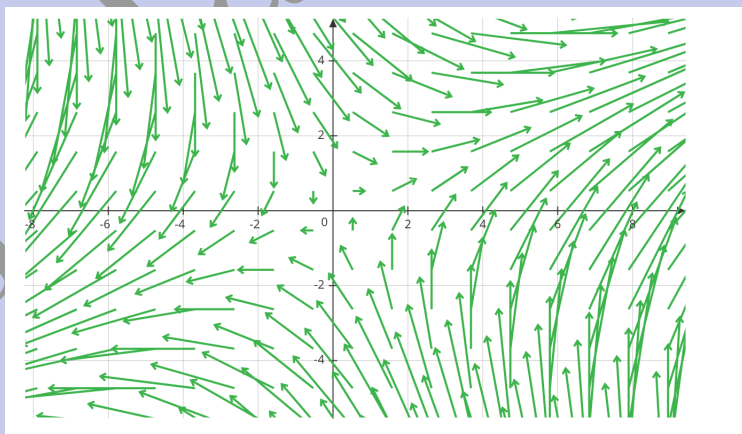
–  $F(x, y) = (-y, x)$  Gráficamente podemos ver este campo vetorial como



–  $F(x, y) = (1, 0)$  Gráficamente podemos ver este campo vetorial como



–  $F(x, y) = (x + y, x - y)$  Gráficamente podemos ver este campo vetorial como



- $F(x, y, z) = (x, y, z)$
- $F(x, y, z) = (-y, x, z)$

**Definição 19.2** Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  uma região do plano e considere os campos vetoriais  $F, F_1, F_2 : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

- A norma do campo vetorial  $F = (f_1, \dots, f_n)$  no ponto  $(x_1, \dots, x_n)$  é definida por

$$\|F\|(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{\sum_{i=1}^n f_i^2(x_1, \dots, x_n)}$$

- O produto interno entre  $F_1 = (f_1, \dots, f_n)$  e  $F_2 = (\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n)$  é definido por

$$F_1(x_1, \dots, x_n) \cdot F_2(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n f_i(x_1, \dots, x_n) \cdot \tilde{f}_i(x_1, \dots, x_n).$$

- O ângulo entre os campos vetoriais  $F_1$  e  $F_2$  é a função  $\theta : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \pi]$  tal que

$$\cos(\theta) = \frac{F_1(x_1, \dots, x_n) \cdot F_2(x_1, \dots, x_n)}{\|F_1(x_1, \dots, x_n)\| \|F_2\|}$$

em particular,  $F_1$  e  $F_2$  são ditos ortogonais se  $\theta(x_1, \dots, x_n) = \pi/2$  para todo  $(x_1, \dots, x_n) \in U$ .

■ **Exemplo 19.2** Seja  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  um campo vetorial dado por

$$F(x, y, z) = (y, x, 1 + x^2)$$

O campo vetorial  $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  um campo vetorial dado por

$$G(x, y, z) = (-x, y, 0)$$

é ortogonal a  $F$ . ■

**Definição 19.3** Dada  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função o **campo vetorial gradiente de  $f$** , que denotamos por  $\nabla f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , é um campo vetorial dado pela função

$$\nabla f(x_1, \dots, x_n) = (\partial_1 f(x_1, \dots, x_n), \dots, \partial_n f(x_1, \dots, x_n)).$$

Um campo vetorial  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  é dito **conservativo** se existe uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$F(x_1, \dots, x_n) = \nabla f(x_1, \dots, x_n).$$

■ **Exemplo 19.3** • Seja  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y, z) = x + \cos(yz),$$

então

$$\nabla f(x, y, z) = F(x, y, z) = (1, -z \sin(yz), -y \sin(yz))$$

é um campo vetorial conservativo.

- Seja  $G : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$G(x, y, z) = \frac{\gamma}{r(x, y, z)},$$

em que  $r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Então

$$\nabla G(x, y, z) = \left( \frac{-\gamma x}{r(x, y, z)^3}, \frac{-\gamma y}{r(x, y, z)^3}, \frac{-\gamma z}{r(x, y, z)^3} \right) = -\frac{\gamma}{r(x, y, z)^3} (x, y, z).$$

Determinar se um campo é conservativo ou não pode ser um trabalho bastante difícil. De fato, por exemplo, em dimensão 2, se queremos saber se

$$F(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$$

é conservativo, devemos analisar se existe uma função  $f$  tal que  $\nabla f = F$ , ou seja, se existe uma função  $f$  tal que

$$\partial_x f(x, y) = f_1(x, y) \quad \text{e} \quad \partial_y f(x, y) = f_2(x, y).$$

Isto pode ser um trabalho bem difícil.

- **Exemplo 19.4** • O campo vetorial  $F(x, y) = (ye^{xy}, xe^{xy} + 2y)$  é conservativo. De fato, vamos achar  $f$  tal que

$$\partial_x f(x, y) = ye^{xy} \Rightarrow \text{propomos } f(x, y) = e^{xy} + g(y)$$

$$\partial_y f(x, y) = xe^{xy} + 2y \Rightarrow \partial_y g(y) = 2y$$

Segue disto que

$$f(x, y) = e^{xy} + y^2 + c$$

é uma função tal que  $\nabla f = F$ .

- O campo vetorial  $F(x, y, z) = (yz, xz, xy)$  é conservativo. De fato, vamos achar  $f$  tal que

$$\partial_x f(x, y, z) = yz \Rightarrow \text{propomos } f(x, y, z) = xyz + g(y, z)$$

$$\partial_y f(x, y, z) = xz \Rightarrow \partial_y g(y, z) = 0 \Rightarrow g(y, z) = g(z),$$

$$\partial_z f(x, y, z) = xy \Rightarrow \partial_z g(z) = 0 \Rightarrow g(z) = c.$$

Segue disto que

$$f(x, y) = xyz + c$$

é uma função tal que  $\nabla f = F$ .

- O campo

$$F(x, y) = (xy, y)$$

não pode ser conservativo. De fato, se por exemplo existe  $f$  tal que  $\nabla f = F$  então

$$\partial_x f(x, y) = xy \Rightarrow \text{propomos } f(x, y) = \frac{1}{2}x^2y + g(y)$$

$$\partial_y f(x, y) = \frac{1}{2}x^2y + g'(y) = y \quad \text{o que é impossível.}$$

Vamos ver agora um critério que nos permite determinar quando o campo vetorial não é conservativo:

**Teorema 19.1** Seja  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetorial conservativo. Então, se

$$F(x_1, \dots, x_n) = (F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_n(x_1, \dots, x_n)),$$

temos que

$$\partial_j F_i(x_1, \dots, x_n) = \partial_i F_j(x_1, \dots, x_n) \quad \forall i, j = 1 \dots n.$$

Em particular, se  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo vetorial conservativo. Então, se

$$F(x, y) = F_1(x, y)\mathbf{i} + F_2(x, y)\mathbf{j}$$

temos que

$$\partial_y F_1 = \partial_x F_2.$$

*Demonstração.* De fato, seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$F(x_1, \dots, x_n) = \nabla f(x_1, \dots, x_n) \Rightarrow \partial_i f(x_1, \dots, x_n) = F_i(x_1, \dots, x_n) \quad \text{para todo } i = 1, \dots, n.$$

Como, pelo teorema de Clairaut, temos

$$\partial_j F_i(x_1, \dots, x_n) = \partial_i \partial_j f(x_1, \dots, x_n) = \partial_i \partial_j f(x_1, \dots, x_n) = \partial_i F_j(x_1, \dots, x_n).$$

**Obs.** Observamos que se  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetorial

$$F(x_1, \dots, x_n) = (F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_n(x_1, \dots, x_n)),$$

que satisfaz

$$\partial_j F_i(x_1, \dots, x_n) = \partial_i F_j(x_1, \dots, x_n) \quad \forall i, j = 1 \dots n.$$

Não necessariamente ele é conservativo. De fato, por exemplo, seja  $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dado por

$$F(x, y) = \left( -\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

Observamos que  $F_1(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$ ,  $F_2(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$  e que

$$\partial_x F_2(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} = \partial_y F_1(x, y)$$

No entanto,  $F$  não é conservativo. De fato se existe  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\nabla f = F$  então

$$\partial_x f(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \Rightarrow f(x, y) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + C_1$$

$$\partial_y f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \Rightarrow f(x, y) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + C_2$$

mas esta função

$$g(x, y) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$$

não está definida para o eixo  $y = 0$ , portanto, não impõem as constantes escolhidas, não existe função  $f$  tal que  $\nabla f = F$  para todo  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

O caso acima motiva a seguinte discussão.

**Definição 19.4** Uma região  $U \subset \mathbb{R}^2$  é dita **simplesmente conexa** se dados dois pontos de  $U$  eles podem ser conectados dentro de  $U$  e para toda curva fechada em  $U$  a região por ela delimitada está completamente contida em  $U$ .

**Teorema 19.2** Seja  $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo vetorial conservativo onde  $U$  é uma região simplesmente conexa. Então, se

$$F(x_1, \dots, x_n) = (F_1(x_1, \dots, x_n), F_2(x_1, \dots, x_n)),$$

tal que

$$\partial_2 F_1(x_1, x_2) = \partial_1 F_2(x_1, x_2).$$

Então  $F$  é conservativo.

*Demonstração.* A demonstração é omitida pois precisamos mais ferramentas matemáticas das que dispomos. ■

■ **Exemplo 19.5** • Vamos ver, utilizando o resultado acima, que o campo

$$F(x, y) = (xy, y)$$

não pode ser conservativo. De fato, pelo teorema anterior, como

$$\partial_y(xy) = x \neq 0 = \partial_x y.$$

temos que  $F$  não pode ser conservativo.

- O campo vetorial

$$F(x, y, z) = (0, \cos(xz), -\sin(xy))$$

não pode ser conservativo. De fato, como

$$F_1(x, y, z) = 0 \quad \text{e} \quad F_2(x, y, z) = \cos(xz)$$

e

$$\partial_y(0) = 0 \neq -z \sin(xz) = \partial_x(\cos(xz)),$$

o teorema anterior garante que  $F$  não pode ser conservativo. ■

Em elaboração

## 20. Integrais de linha de campos vetoriais

A ideia de integrar um campo vetorial ao longo de uma curva surgiu naturalmente a partir do estudo do trabalho realizado por uma força sobre um corpo em movimento. Na Física sabemos que dada uma força  $F$  agindo sobre uma partícula que se movimenta ao longo de uma reta

$$r(t) = x_0 + tv$$

onde  $x_0, v \in \mathbb{R}^3$ , temos que o trabalho da força  $F$  para movimentar a partícula de  $r(0)$  a  $r(T)$  era dado pela fórmula

$$W = F \cdot (r(T) - r(0)) = T(F \cdot v)$$

Podemos considerar a força  $F$  como um campo vetorial e a reta  $r$  como uma curva. Então cabe a pergunta, como generalizar isto a um contexto mais geral? Nesse sentido que surge a ideia da integral de linha.

Esse tipo de integral é fundamental para entender fenômenos em diversas áreas da matemática, física e engenharia, e também é um passo essencial para o estudo dos grandes teoremas do cálculo vetorial, como os teoremas de Green, Stokes e Gauss.

Historicamente, essas ideias começaram a tomar forma nos trabalhos de Isaac Newton e Gottfried Leibniz com o desenvolvimento do cálculo, mas foi no século XVIII que matemáticos como Joseph-Louis Lagrange e Pierre-Simon Laplace formalizaram o uso de campos vetoriais em mecânica e fluídos. No século XIX, com a formulação da eletrodinâmica por James Clerk Maxwell, as integrais de linha tornaram-se ferramentas centrais para descrever campos elétricos e magnéticos.

Formalizamos então a ideia da integral de linha. Seja  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma curva e seja  $U$  um aberto tal que  $\text{Im}(\gamma) \subset U$  e considere um campo vetorial  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

$$P: \quad a \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

Denotamos por

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$$

e definimos a **amplitude da partição**  $P$  por

$$\Delta = \sup\{\Delta t_i, 0 \leq i \leq n\}.$$

Observamos que pedir

$$\Delta \rightarrow 0 \quad \text{é equivalente a pedir } \Delta t_i \rightarrow 0.$$

Observamos que unindo os pontos  $\{\gamma(t_i)\}_{0 \leq i \leq n}$  por retas temos uma curva, que denotamos  $\gamma_n$  que aproxima a curva  $\gamma$  no sentido de que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n(t) = \gamma(t) \quad \forall t \in [a, b].$$

Definimos a **integral de linha de  $F$  ao longo de  $\gamma_n$**  pela expressão.

$$W(F, \gamma_n) = \sum_{i=1}^n F(\gamma(t_{i-1})) \cdot (\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})).$$

Observamos que, aplicando o teorema do valor médio no intervalo  $[t_{i-1}, t_i]$  à função

$$g(t) = F(\gamma(t_{i-1})) \cdot (\gamma(t) - \gamma(t_{i-1}))$$

temos que existe um  $r_i \in [t_{i-1}, t_i]$

$$g(t_i) - g(t_{i-1}) = g'(r_i)(t_i - t_{i-1}) \quad \text{isto é} \quad F(\gamma(t_{i-1})) \cdot (\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})) = F(\gamma(t_{i-1})) \cdot \gamma'(r_i)(t_i - t_{i-1})$$

e, portanto, quando  $\Delta \ll 1$  temos que

$$W(F, \gamma_n) = \sum_{i=1}^n F(\gamma(t_{i-1})) \cdot (\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})) \simeq \sum_{i=1}^n F(\gamma(t_{i-1})) \cdot \gamma'(r_i)(t_i - t_{i-1})$$

Por lo que vimos em cálculo de uma variável temos que quando  $\Delta \rightarrow 0$  tal que

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\gamma(s_i)) \|\gamma'(r_i)\| (t_i - t_{i-1}) \simeq \sum_{i=1}^n F(\gamma(t_{i-1})) \cdot \gamma'(r_i)(t_i - t_{i-1}) = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

**Definição 20.1** Seja  $C$  uma curva parametrizada por  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  e seja  $U$  um aberto tal que  $\text{Im}(\gamma) = C \subset U$  e considere um campo vetorial  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Definimos a **integral de linha de  $F$  ao longo da curva  $\gamma$**  como sendo

$$\oint_C F \cdot d\gamma = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt,$$

quando a integral existe.

■ **Exemplo 20.1** • Seja  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  o campo vetorial definido por

$$F(x, y) = (x^2, -xy),$$

e considere a curva  $C$  parametrizada por  $\gamma: [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$$

Então

$$F(\gamma(t)) = (\cos^2(t), -\cos(t)\sin(t)), \quad \gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$$

$$\Rightarrow F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = -2\sin(t)\cos^2(t)$$

$$\begin{aligned} \oint_C F \cdot d\gamma &= \int_0^{\pi/2} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= -\int_0^{\pi/2} 2\sin(t)\cos^2(t) dt \\ &= \left( \frac{2}{3} \cos(t)^3 \right) \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

- Seja  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  o campo vetorial definido por

$$F(x, y) = (x^2, xy),$$

e  $C$  a parábola  $y = x^2$  de  $(0, 0)$  a  $(1, 1)$ .

Parametrizamos

$$\gamma(t) = (t, t^2), \quad t \in [0, 1].$$

$$F(\gamma(t)) = (t^2, t^3), \quad \gamma'(t) = (1, 2t)$$

$$\Rightarrow F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = (t^2 + 2t^4)$$

$$\begin{aligned} \oint_C F \cdot d\gamma &= \int_0^1 (t^2 + 2t^4) dt \\ &= \left[ \frac{t^3}{3} + \frac{2t^5}{5} \right]_0^1 = \frac{11}{15} \end{aligned}$$

- Seja  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  o campo vetorial definido por

$$F(x, y, z) = (z, yx, y^2),$$

e considere a curva  $C$  parametrizada por  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$\gamma(t) = (t, -t, t^2)$$

Então

$$F(\gamma(t)) = (t^2, -t^2, t^2), \quad \gamma'(t) = (1, -1, 2t)$$

$$\Rightarrow F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 2t^3 + 2t^2$$

$$\begin{aligned} \oint_C F \cdot d\gamma &= \int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_0^1 (2t^3 + 2t^2) dt \\ &= \left[ \frac{1}{2}t^4 + \frac{2}{3}t^3 \right]_0^1 = \frac{7}{6}. \end{aligned}$$

- Seja  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  o campo vetorial definido por

$$F(x, y, z) = (yz, xz, xy)$$

e considere a hélice  $C$  parametrizada por

$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t), \quad t \in [0, \pi].$$

Então

$$F(\gamma(t)) = (t \sin(t), t \cos(t), \sin(t) \cos(t)), \quad \gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1)$$

$$\Rightarrow F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \cos(2t) \frac{1}{2} \sin(2t)$$

$$\begin{aligned} \oint_C F \cdot d\gamma &= \int_0^\pi t \cos(2t) dt + \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin(2t) dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

- Seja  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  o campo vetorial definido por

$$F(x, y) = (-y, x)$$

e  $C$  o círculo  $x^2 + y^2 = 1$ .

Parametrizamos  $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . Então

$$F(\gamma(t)) = (-\sin(t), \cos(t)), \quad \gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$$

$$\Rightarrow F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 1$$

$$\oint_C F \cdot d\gamma = \int_0^{2\pi} 1 \, dt = 2\pi$$

**Corolário 20.1** Seja  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma curva suave por partes e considere  $\gamma^{-1} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\gamma^{-1}(t) = \gamma(b + a - t)$$

Então, se  $\text{Img}(\gamma) \subset U$ , para todo campo vetorial  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  temos que

$$\oint_{\gamma} F \cdot d\gamma = - \oint_{\gamma^{-1}} F \cdot d\gamma^{-1}.$$

■ **Exemplo 20.2** Seja  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  o campo vetorial definido por

$$F(x, y, z) = (z, yx, y^2),$$

e considere a curva  $C$  parametrizada por  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$\gamma(t) = (t, -t, t^2)$$

Então

$$\gamma^{-1}(t) = \gamma(1 - t) = (1 - t, -1 + t, (1 - t)^2)$$

$$F(\gamma^{-1}(t)) = ((1 - t)^2, -(1 - t)^2, (1 - t)^2), \quad \gamma'(t) = (-1, 1, -2(1 - t))$$

$$\Rightarrow F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = -2(1 - t)^3 - 2(1 - t)^2$$

$$\begin{aligned} \oint_C F \cdot d\gamma &= \int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt \\ &= \int_0^1 [-2(1 - t)^3 - 2(1 - t)^2] \, dt \\ &= - \int_0^1 2s^3 + 2s^2 \, ds \\ &= - \left( \frac{1}{2}s^4 + \frac{2}{3}s^3 \right) \Big|_0^1 = -\frac{7}{6}. \end{aligned}$$

■ **Corolário 20.2** Sejam  $C_1$  e  $C_2$  duas curvas suaves por partes e parametrizadas por  $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$  respectivamente. Considere  $\tilde{\gamma} : [a, b] \cup [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por

$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{se } t \in [a, b] \\ \gamma_2(t) & \text{se } t \in [c, d] \end{cases}$$

Então, se  $C = \text{Im}g(\tilde{\gamma}) \subset U$ , para todo campo vetorial  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  temos que

$$\oint_C F \cdot \tilde{\gamma} = \oint_{C_1} F \cdot d\gamma_1 + \oint_{C_2} F \cdot d\gamma_2.$$

*Demonstração.* Considere

$$t(s) = (d-c)s + c - b(d-c).$$

Observamos que  $u$  é diferenciável e que

$$u(b) = c, \quad u(b+1) = d \quad \text{e} \quad u[b, b+1] = [c, d],$$

em particular

$$dt = (d-c) ds$$

e

$$\frac{d}{ds} \gamma_2(t(s)) = \gamma_2'(t(s))(d-c)$$

$$\begin{aligned} \oint_{C_2} F d\gamma_2 &= \int_c^d F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) dt \\ &= \int_b^{b+1} F(\gamma_2(t(s))) \cdot \left( \frac{1}{d-c} \frac{d}{ds} \gamma_2(t(s)) \right) (d-c) ds. \\ &= \int_b^{b+1} F(\gamma_2(t(s))) \cdot \frac{d}{ds} \gamma_2(t(s)) ds. \end{aligned}$$

Com isto, temos que se

$$\tilde{\gamma}_2(t) = \gamma_2((d-c)t + c - b(d-c)) \quad \text{para } t \in [b, b+1]$$

então

$$\oint_{C_2} F \cdot d\gamma_2 = \oint_{C_2} F \cdot d\tilde{\gamma}_2.$$

Portanto se

$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{se } t \in [a, b] \\ \tilde{\gamma}_2(t) & \text{se } t \in [b, b+1] \end{cases}$$

então

$$\begin{aligned} \oint_C F \cdot d\gamma &= \oint_{C_1} F \cdot d\gamma_1 + \oint_{C_2} F \cdot d\tilde{\gamma}_2 \\ &= \oint_{C_1} F \cdot d\gamma_1 + \oint_{C_2} F \cdot d\gamma_2. \end{aligned}$$

■

### ■ Exemplo 20.3

Seja  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  o campo vetorial definido por

$$F(x, y, z) = (z, x, y)$$

e  $C$  o caminho poligonal em  $\mathbb{R}^3$  definido pela união de segmentos:  $\ell_1$  de  $(0, 0, 0)$  a  $(1, 0, 0)$ ,  $\ell_2$  de  $(1, 0, 0)$  a  $(1, 1, 0)$  e  $\ell_3$  de  $(1, 1, 0)$  a  $(1, 1, 1)$ .

Parametrizamos este caminho como

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t, 0, 0) & \text{se } t \in [0, 1] \\ (1, t-1, 0) & \text{se } t \in [1, 2] \\ (1, 1, t-2) & \text{se } t \in [2, 3] \end{cases} \Rightarrow \gamma'(t) = \begin{cases} (1, 0, 0) & \text{se } t \in [0, 1] \\ (0, 1, 0) & \text{se } t \in [1, 2] \\ (0, 0, 1) & \text{se } t \in [2, 3] \end{cases}$$

Então

$$F(\gamma(t)) = \begin{cases} (0, t, 0) & \text{se } t \in [0, 1] \\ (0, 1, t-1) & \text{se } t \in [1, 2] \\ (t-2, 1, 1) & \text{se } t \in [2, 3] \end{cases} \quad F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \in [0, 1] \\ 1 & \text{se } t \in [1, 2] \\ 1 & \text{se } t \in [2, 3] \end{cases}$$

Calculamos

$$\oint_C F \cdot d\gamma = 0 + \int_0^1 1 dt + \int_0^1 1 dt = 2$$

**Teorema 20.1 — da independência do caminho.** Seja  $U$  um aberto e  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetorial sobre  $U$ . Então, para toda curva  $C$  diferenciável por partes e fechada  $\gamma : [a, b] \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$  temos

$$\oint_C F \cdot d\gamma = 0,$$

se, e somente se, para todo par de curvas diferenciáveis por partes  $C_1$  e  $C_2$  parametrizadas por  $\gamma_1 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\gamma_2 : [r, s] \rightarrow \mathbb{R}^n$  respectivamente e tais que

$$\gamma_1(c) = p = \gamma_2(r) \quad \text{e} \quad \gamma_1(d) = q = \gamma_2(s)$$

temos

$$\oint_{C_1} F \cdot d\gamma_1 = \oint_{C_2} F \cdot d\gamma_2.$$

*Demonstração.* Assumimos, sem perder generalidade que  $[c, d]$  e  $[r, s]$  são intervalos disjuntos ou que  $d = r$ . Caso contrário, podemos reparametrizar as curvas para levá-las neste contexto.

Definimos  $\tilde{\gamma} : [c, d] \cup [r, s] \rightarrow \mathbb{R}^n$  por

$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{se } t \in [c, d] \\ \gamma_2^{-1}(t)(t) & \text{se } t \in [r, s] \end{cases}$$

Observamos que esta curva é fechada, visto que

$$\gamma_1(c) = p = \gamma_2^{-1}(s) \quad \text{e} \quad \gamma_1(d) = q = \gamma_2^{-1}(r).$$

Então

$$\begin{aligned} \oint_C F \cdot d\tilde{\gamma} &= \oint_{C_1} F \cdot d\gamma_1 + \oint_{C_2^{-1}} F \cdot d\gamma_2^{-1} \\ &= \oint_{C_1} F \cdot d\gamma_1 - \oint_{C_2} F \cdot d\gamma_2. \end{aligned}$$

Portanto, se

$$\oint_C F \cdot d\tilde{\gamma} = 0 \Rightarrow \oint_{C_1} F \cdot d\gamma_1 = \oint_{C_2} F \cdot d\gamma_2,$$

para quais que par de curvas diferenciáveis satisfazendo as hipóteses. Por outro lado, se  $\gamma$  é uma curva fechada e  $c \in (a, b)$ , então podemos particionar  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  como uma curva  $\gamma_1 : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\gamma_1(t) = \gamma(t)$ , e outra curva  $\gamma_2 : [c, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\gamma_2(t) = \gamma(t)$  de forma tal que  $\alpha\gamma_1$  e  $\gamma_2$  formem uma curva fechada. Considere  $\gamma_2^{-1}$ , então

$$\oint_{C_1} F \cdot d\gamma_1 = \oint_{C_2^{-1}} F \cdot d\gamma_2^{-1} = - \oint_{C_2} F \cdot d\gamma_2,$$

portanto

$$\oint_C F \cdot d\gamma = \oint_{C_1} F \cdot d\gamma_1 + \oint_{C_2} F \cdot d\gamma_2 = 0.$$

A seguir veremos o Teorema Fundamental das Integrais de Linha que é uma generalização do Teorema Fundamental do Cálculo para o contexto de campos vetoriais. Este resultado é fundamental porque conecta diretamente campos vetoriais com funções escalares potenciais e fornece uma ferramenta poderosa para simplificar cálculos e compreender propriedades geométricas e físicas, como o trabalho realizado por uma força conservativa.

**Teorema 20.2 — Fundamental das integrais de linha.** Seja  $C$  uma curva parametrizada por  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  e seja  $U$  um aberto tal que  $C \subset U$  e considere um campo vetorial conservativo  $\nabla f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , então

$$\oint_C \nabla f \cdot d\gamma = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

*Demonstração.* Seja  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  e um campo vetorial conservativo  $\nabla f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  como no enunciado.

Observamos que, da regra da cadeia, temos

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) = df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

Calculamos então

$$\begin{aligned} \oint_C \nabla f \cdot d\gamma &= \int_a^b \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) dt \\ &= f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)), \end{aligned}$$

como queríamos mostrar.

**Obs.**

Historicamente, esse teorema foi formulado com base nas ideias desenvolvidas por Newton e Leibniz no cálculo de uma variável, e sua generalização para várias variáveis foi consolidada no século XIX com o avanço da análise vetorial e da física clássica.

**Corolário 20.3** Seja  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetorial conservativo. Sejam  $C_1$  e  $C_2$  duas curvas diferenciáveis por partes parametrizadas por  $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$  respectivamente e tais que

$$\gamma_1(a) = p = \gamma_2(a) \quad \text{e} \quad \gamma_1(b) = q = \gamma_2(b).$$

Então

$$\oint_{C_1} \nabla f \cdot d\gamma_1 = f(q) - f(p) = \oint_{C_2} \nabla f \cdot d\gamma_2$$

**Corolário 20.4** Seja  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetorial conservativo e  $C$  uma curva diferenciável por partes parametrizada por  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  e tal que  $\gamma(a) = \gamma(b)$ . Então

$$\oint_C \nabla f \cdot d\gamma = 0.$$

■ **Exemplo 20.4** • Vamos calcular  $\int_C F \cdot d\gamma$ , onde  $F(x, y) = (2x + y, x + 3y^2)$  e  $C$  é uma curva suave de  $(0, 0)$  a  $(1, 2)$ .

Observamos primeiramente que  $F$  é conservativo. De fato se

$$f(x, y) = \int (2x + y) dx = x^2 + xy + h(y).$$

Derivando em relação a  $y$ :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + h'(y) = x + 3y^2 \implies h(y) = y^3 + C.$$

Logo,  $f(x, y) = x^2 + xy + y^3$ .

Pelo teorema fundamental das integrais de linha temos que

$$\int_C F \cdot d\gamma = f(1, 2) - f(0, 0) = (1 + 2 + 8) - 0 = 11.$$

• Vamos calcular  $\int_\gamma F \cdot d\gamma$ , onde  $F(x, y, z) = (yz, xz, xy + 2z)$  e  $C$  é uma curva diferenciável que vai de  $(1, 0, -1)$  a  $(2, 2, 3)$ .

Observamos primeiramente que  $F$  é conservativo. De fato se

$$f(x, y, z) = xyz + z^2 + c \implies \nabla f(x, y, z) = F(x, y, z).$$

Pelo teorema fundamental das integrais de linha temos que

$$\int_C F \cdot d\gamma = f(2, 2, 3) - f(1, 0, -1) = (12 + 9) - (0 + 1) = 20.$$

• Vamos ver que  $\oint_\gamma F \cdot d\gamma = 0$  para  $F(x, y) = (y^2, 2xy)$  e  $C$  uma curva fechada qualquer.

Observamos primeiramente que  $F$  é conservativo. De fato se

$$f(x, y) = xy^2 \implies \nabla f = F.$$

Logo, se  $\gamma$  é uma curva fechada em  $(p, q)$  temos, pelo teorema fundamental das integrais de linha, que

$$\oint_C F \cdot d\gamma = f(p, q) - f(p, q) = 0.$$

■

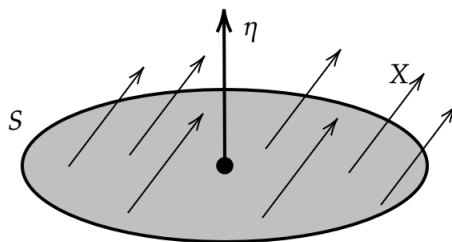
## 21. Integrais de superfície de campos vetoriais

A integral de superfície de um campo vetorial surge da necessidade de quantificar o *fluxo* de um campo através de uma superfície no espaço. Essa noção tem origem em problemas físicos fundamentais: por exemplo, calcular a quantidade de ar que atravessa uma asa de avião ou determinar o fluxo de um campo elétrico através de uma superfície condutora.

Durante o século XIX, no desenvolvimento da teoria eletromagnética e da mecânica dos fluidos, matemáticos e físicos como Gauss, Faraday e Maxwell perceberam a importância de medir como um campo “atravessa” superfícies. Para isso, introduziu-se a noção de *fluxo*, que associa a um campo vetorial  $\vec{F}$  e a uma superfície orientada  $S$  a quantidade de campo que cruza  $S$ .

A noção de fluxo de um campo vetorial segue mais ou menos o seguinte raciocínio: dado um campo vetorial constante  $X$  sobre uma superfície  $S$ , o fluxo de  $X$  sobre  $S$  é dado por

$$F = (X \cdot \eta) \cdot \text{Area}(S).$$



Observamos que, pela fórmula acima, as contribuições do campo que são tangentes à superfície não influenciam no fluxo, somente o faz a componente na direção normal.

Essa ferramenta é essencial na formulação de leis fundamentais da física, como a lei de Gauss para o campo elétrico e a conservação da massa em dinâmica de fluidos. Além disso, fornece o contexto necessário para o estudo de teoremas integrais importantes, como o Teorema da Divergência, que relaciona o fluxo de um campo através da fronteira de uma região ao comportamento interno desse campo.

Temos que generalizar esta ideia para o caso em que o campo vetorial não é constante ao longo da superfície e para o caso em que a superfície não é plana. Nesse sentido vamos a estudar a ideia de fluxo para superfícies parametrizadas.

Seja  $S$  uma superfície parametrizada por  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $S = \phi(U)$ . Assuma que  $S$  está orientada com vetor normal

$$\eta(\phi(u, v)) = \frac{1}{\|\partial_x \phi \times \partial_y \phi\|} (\partial_x \phi \times \partial_y \phi)(u, v)$$

Por simplicidade vamos assumir que  $U = (a, b) \times (c, d)$  e consideremos as seguintes partições

$$P_1 : a < x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \quad \text{e} \quad P_2 : c < y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d,$$

e, com estas partições criamos uma partição de  $U$  em pequenos retângulos

$$P := P_1 \times P_2 = \{R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]\}$$

Denotamos por

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad \text{e} \quad \Delta y_j = y_j - y_{j-1} \quad \forall 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m,$$

e definimos a **amplitude da partição**  $P$  por

$$\Delta = \sup\{\Delta x_i, \Delta y_j, 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m\}.$$

Observamos, assim como feito anteriormente, que pedir

$$\Delta \rightarrow 0 \quad \text{é equivalente a pedir} \quad \Delta x_i \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \Delta y_j \rightarrow 0.$$

A partição  $P$  define uma partição de  $S$  em retalhos

$$\tilde{P} = \{S_{ij} = \phi(R_{ij}), 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m\}.$$

Considere uma família de pontos

$$Z = \{z_{ij} = (u_i, v_j) \in R_{ij}, 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m\}$$

e defina

$$\tilde{Z} = \{p_{ij} = \phi(z_{ij}), 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m\} \subset S, \quad \text{e} \quad A_{ij} = \text{Area}(S_{ij})$$

e o normal

$$\eta_{ij} = \frac{\partial_1 \phi \times \partial_2 \phi}{\|\partial_1 \phi \times \partial_2 \phi\|}(p_{ij})$$

Dado um campo vetorial  $F : V \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , onde  $S \subset V$ , temos que podemos aproximar o fluxo de  $F$  a travez da superfície  $S$  pela expressão

$$S(F, \tilde{P}, Z) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (F(p_{ij}) \cdot \eta_{ij}) \cdot A_{ij}$$

**Obs.**

A soma  $S(F, \tilde{P}, Z)$  acima representa o calculo de fluxo aproximado onde estamos assumindo que o campo vetorial  $F$  é constante ao longo de cada retalho  $S_{ij}$  e, mais ainda, que o vetor normal ao longo do retalho aponta na mesma direção também. Embora as  $S_{ij}$  não sejam completamente planas, a soma  $S(F, \tilde{P}, Z)$  é como se fosse o fluxo a travez de um poliedro que aproxima a  $S$  e cujas faces são dadas pelas  $S_{ij}$ .

Se a partição  $P$  tiver  $\Delta \ll 1$  então podemos assumir que  $S_{ij}$  pode ser aproximado por um retângulo no plano tangente definido pelo ponto  $\phi(u_{i-1}, v_{j-1})$  e lados dados pelos vetores

$$v_1 = \partial_1 \phi(u_{i-1}, v_{j-1}) \Delta x_i \quad \text{e} \quad v_2 = \partial_2 \phi(u_{i-1}, v_{j-1}) \Delta y_j.$$

Do que vimos em geometria analítica, este retângulo tem área dada por

$$\tilde{A}_{ij} = \|\partial_1 \phi(u_{i-1}, v_{j-1}) \times \partial_2 \phi(u_{i-1}, v_{j-1})\| \Delta u_i \Delta v_j$$

Com isto, a soma de Riemann pode ser escrita

$$\begin{aligned} S(F, \tilde{P}, Z) &\simeq \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (F(p_{ij}) \cdot \eta_{ij}) \|\partial_1 \phi(u_{i-1}, v_{j-1}) \times \partial_2 \phi(u_{i-1}, v_{j-1})\| \Delta u_i \Delta v_j \\ &\simeq \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n [F(p_{ij}) \cdot (\partial_1 \phi(u_{i-1}, v_{j-1}) \times \partial_2 \phi(u_{i-1}, v_{j-1}))] \Delta u_i \Delta v_j \end{aligned}$$

Logo, considerando uma sequência de partições  $\{P_k\}$  cujas amplitudes  $\Delta_k$  converge para zero, teremos que

$$S(F, \tilde{P}_k, Z_k) \rightarrow \iint_U X(u, v) \cdot (\partial_1 \phi(u, v) \times \partial_2 \phi(u, v)) \, dudv.$$

Isto motiva a seguinte definição

**Definição 21.1** Seja  $S$  uma superfície parametrizada por  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $S = \phi(U)$ . Assuma que  $S$  está orientada com vetor normal

$$\eta(\phi(u, v)) = \frac{1}{\|\partial_x \phi \times \partial_y \phi\|} (\partial_x \phi \times \partial_y \phi)(u, v).$$

Definimos o **fluxo de  $X$  sobre  $S$**  como sendo

$$\iint_S F \cdot d\mathbf{A} = \iint_S (F \cdot \eta) \, dA = \iint_U F(u, v) \cdot (\partial_1 \phi(u, v) \times \partial_2 \phi(u, v)) \, dudv.$$

Se  $S$  é uma superfície parametrizada por partes e  $S = S_1 \cup \dots \cup S_n$  tal que  $S_i \cap S_j$  são conjuntos de medida nula para todo  $i \neq j$ , definimos

$$\iint_S F \cdot d\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \iint_{S_i} F \cdot d\mathbf{A}.$$

**Obs.** Na definição estamos assumindo que a superfície  $S$  que está parametrizada por  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $S = \phi(U)$  tem orientação igual a induzida pela carta pois estamos assumindo que o vetor normal é dado

$$\eta(\phi(u, v)) = \frac{1}{\|\partial_u \phi \times \partial_v \phi\|} (\partial_u \phi \times \partial_v \phi)(u, v).$$

No entanto pode ocorrer que, ao fazermos a parametrização da superfície, a orientação induzida pela parametrização não seja a mesma que a orientação pedida para a superfície. Como há duas alternativas para a orientação (pois estamos assumindo que  $S$  é conexa e orientável) e as duas alternativas diferem num sinal, o que estaria acontecendo é que a orientação induzida pela carta está na direção contrária da orientação pedida da superfície. Por isso, caso isto ocorra consideramos

$$\tilde{\eta}(\phi(u, v)) = \frac{1}{\|\partial_v \phi \times \partial_u \phi\|} (\partial_v \phi \times \partial_u \phi)(u, v) = -\eta(\phi(u, v)).$$

Obs.

Assuma que a superfície  $S$ , parametrizada por  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $S = \phi(U)$ , tem orientação igual a induzida pela carta, isto é, que o vetor normal é dado

$$\eta(\phi(u, v)) = \frac{1}{\|\partial_u \phi \times \partial_v \phi\|} (\partial_u \phi \times \partial_v \phi)(u, v).$$

Do que vimos de derivada direccional, temos que, para uma função  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\nabla f \cdot \eta = D_\eta f := \frac{\partial f}{\partial \eta}$$

Então, podemos escrever

$$\iint_S \nabla f \cdot d\mathbf{A} = \iint_S \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) d\mathbf{A} = \iint_U \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) (\phi(u, v)) \|\partial \phi_u \times \partial \phi_v\|(u, v) \, dudv.$$

- **Exemplo 21.1** • Vamos calcular o fluxo de  $F(x, y, z) = (0, 0, z)$  através do plano  $z = 2x + y$  limitado por  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 2 - 2x$ . Assumimos a orientação em que o vetor normal aponta para cima do plano. Primeiramente parametrizamos a superfície por

$$\phi(x, y) = (x, y, 2x + y)$$

Então

$$\partial_x \phi(x, y) = (1, 0, 2), \quad \partial_y \phi(x, y) = (0, 1, 1)$$

Com isto

$$(\partial_x \phi \times \partial_y \phi)(x, y) = (-2, -1, 1)$$

e observamos que este vetor gera um vetor normal que aponta para cima do plano pois a última coordenada é positiva. Portanto é a orientação correta.

Logo, calculamos

$$\iint_S F \cdot d\mathbf{A} = \int_0^1 \int_0^{2-2x} (2x + y) \, dy dx = \frac{4}{3}$$

- Vamos calcular o fluxo de  $F(x, y, z) = (x, y, 0)$  através do cilindro  $x^2 + y^2 = 4$  entre  $z = 0$  e  $z = 5$ . Assumimos a orientação de cada parte do cilindro como sendo aquela em que o vetor normal aponta para fora.

Primeiramente parametrizamos a superfície por

$$\phi(\theta, z) = (2\cos(\theta), 2\sin(\theta), z) \quad (\theta, z) \in [0, 2\pi] \times [0, 5]$$

E as tampas são parametrizadas por

$$\psi_1(r, \theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), 0) \quad \psi_2(r, \theta) = (r\sin(\theta), r\cos(\theta), 5) \quad (r, \theta) \in [0, 1] \times [0, 2\pi].$$

Com isto, no corpo do cilindro temos

$$(\partial_x \phi \times \partial_y \phi)(\theta, z) = (2\cos(\theta), 2\sin(\theta), 0)$$

e nas tampas

$$(\partial_x \psi_1 \times \partial_y \psi_1)(r, \theta) = (0, 0, 1) = -(\partial_x \psi_2 \times \partial_y \psi_2)(r, \theta)$$

Observamos que, em cada caso, o vetor gera um vetor normal que aponta para fora do cilindro.

Como em cada tampa temos que

$$F(\psi_i(x, y)) \cdot ((\partial_x \psi_1 \times \partial_y \psi_1) = 0$$

temos que o fluxo de  $F$  sobre as tampas é zero. Com isto, só nos fica calcular o fluxo no corpo do cilindro. Logo,

$$\iint_S F \cdot d\mathbf{A} = \int_0^{2\pi} \int_0^5 (4 \cos^2(\theta) + 4 \sin^2(\theta)) dz d\theta = 40\pi$$

- Vamos calcular o fluxo de

$$F(x, y, z) = \frac{K}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x, y, z)$$

através da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = R$  com a orientação que dá o vetor normal apontando para fora da esfera. Primeiramente parametrizamos a superfície por

$$\psi(\theta, \phi) = (R \sin(\phi) \cos(\theta), R \sin(\phi) \sin(\theta), R \cos(\phi)), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \phi \leq \pi$$

Calculamos

$$\partial_\theta \psi(\theta, \phi) = (-R \sin(\phi) \sin(\theta), R \sin(\phi) \cos(\theta), 0) \quad \partial_\phi \psi(\theta, \phi) = (R \cos(\phi) \cos(\theta), R \cos(\phi) \sin(\theta), -R \sin(\phi))$$

Com isto,

$$(\partial_\theta \psi \times \partial_\phi \psi)(\theta, \phi) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -R \sin(\phi) \sin(\theta) & R \sin(\phi) \cos(\theta) & 0 \\ R \cos(\phi) \cos(\theta) & R \cos(\phi) \sin(\theta) & -R \sin(\phi) \end{vmatrix} \quad (21.1)$$

$$= R^2(-\sin^2(\phi) \cos(\theta), -\sin^2(\phi) \sin(\theta), -\sin(\phi) \cos(\phi)). \quad (21.2)$$

O vetor que obtivemos aponta para dentro portanto, para considerar um vetor que aponte na mesma direção que o vetor normal, consideramos o vetor que aponta na direção contrária

$$(\partial_\phi \psi \times \partial_\theta \psi)(\theta, \phi) = R^2(\sin^2(\phi) \cos(\theta), \sin^2(\phi) \sin(\theta), \sin(\phi) \cos(\phi)).$$

Então

$$F(\psi(\theta, \phi)) = \frac{K}{R^3} R(\sin(\phi) \cos(\theta), \sin(\phi) \sin(\theta), \cos(\phi))$$

$$F(\psi(\theta, \phi)) \cdot (\partial_\phi \psi \times \partial_\theta \psi)(\theta, \phi) = K \sin(\phi)$$

Logo

$$\iint_S F \cdot d\mathbf{A} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi K \sin(\phi) d\phi d\theta = 4K\pi.$$

- Vamos calcular o fluxo de  $F(x, y, z) = (x, y, z)$  através da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  com a orientação na qual o vetor normal aponta para dentro  
Primeiramente parametrizamos a superfície por

$$\psi(\theta, \phi) = (3 \sin(\phi) \cos(\theta), 3 \sin(\phi) \sin(\theta), 3 \cos(\phi)), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \phi \leq \pi$$

$$\partial_\theta \psi(\theta, \phi) = (-3 \sin(\phi) \sin(\theta), 3 \sin(\phi) \cos(\theta), 0) \quad \partial_\phi \psi(\theta, \phi) = (3 \cos(\phi) \cos(\theta), 3 \cos(\phi) \sin(\theta), -3 \sin(\phi))$$

Com isto,

$$(\partial_\theta \psi \times \partial_\phi \psi)(\theta, \phi) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 \sin(\phi) \sin(\theta) & 3 \sin(\phi) \cos(\theta) & 0 \\ 3 \cos(\phi) \cos(\theta) & 3 \cos(\phi) \sin(\theta) & -3 \sin(\phi) \end{vmatrix} \quad (21.3)$$

$$= (-9 \sin^2(\phi) \cos(\theta), -9 \sin^2(\phi) \sin(\theta), -9 \sin(\phi) \cos(\phi)). \quad (21.4)$$

Observamos que, neste caso, a orientação induzida pela parametrização é a correta.

Com isto

$$F(\psi(\theta, \phi)) = (3 \sin(\phi) \cos(\theta), 3 \sin(\phi) \sin(\theta), 3 \cos(\phi))$$

$$F(\psi(\theta, \phi)) \cdot (\partial_\theta \psi \times \partial_\phi \psi)(\theta, \phi) = -27 \sin(\phi)$$

Logo

$$\iint_S F \cdot d\mathbf{A} = - \int_0^{2\pi} \int_0^\pi 27 \sin(\phi) d\phi d\theta = -108\pi.$$

- Vamos calcular o fluxo de  $F(x, y, z) = (y, -x, z^2)$  através do parabolóide  $z = x^2 + y^2$  limitado por  $z \leq 4$ . Assumimos que a orientação é aquela em que o vetor normal aponta para dentro do parabolóide. Primeiramente parametrizamos a superfície por

$$\phi(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), r^2) \quad (r, \theta) \in [0, 2] \times [0, 2\pi],$$

Com isto

$$(\partial_x \phi \times \partial_y \phi)(r, \theta) = (-2r^2 \cos(\theta), -2r^2 \sin(\theta), r)$$

Observamos que o vetor normal induzido pela parametrização coincide com o pedido. Logo calculamos

$$\iint_S F \cdot d\mathbf{A} = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (-2r^3 \sin^2 \theta - 2r^3 \cos^2 \theta + r^5) dr d\theta = \frac{32\pi}{3}$$

- Vamos calcular o fluxo de  $F(x, y, z) = (x, y, 0)$  através do cone  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  entre  $z = 0$  e  $z = 3$ . A orientação do cone será aquela em que o vetor normal aponta para fora do cone. Primeiramente parametrizamos a superfície por

$$\phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, r) \quad (r, \theta) \in [0, 3] \times [0, 2\pi],$$

Com isto

$$(\partial_r \phi \times \partial_\theta \phi)(r, \theta) = (-r \cos(\theta), -r \sin(\theta), r)$$

Neste caso, a orientação induzida pela carta é contrária a orientação pedida, portanto revertemos a orientação da carta.

$$(\partial_\theta \phi \times \partial_r \phi)(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), -r)$$

Logo calculamos

$$\iint_S F \cdot d\mathbf{A} = \int_0^{2\pi} \int_0^3 (r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\theta)) dr d\theta = 18\pi.$$

Poderíamos ter parametrizado a superfície por

$$\phi(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2}) \quad (x, y) \in B(0, 3),$$

Com isto

$$(\partial_x \phi \times \partial_y \phi)(x, y) = (-r \cos(\theta), -r \sin(\theta), r)$$

Neste caso, a orientação induzida pela carta é contrária a orientação pedida, portanto reverteremos a orientação da carta.

$$(\partial_x \phi \times \partial_y \phi)(r, \theta) = \left( -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right)$$

Neste caso, a orientação induzida pela carta é contrária a orientação pedida, portanto reverteremos a orientação da carta.

$$(\partial_y \phi \times \partial_x \phi)(r, \theta) = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -1 \right)$$

Logo calculamos

$$\iint_S F \cdot d\mathbf{A} = \iint_{B(0,3)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^3 (r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\theta)) dr d\theta = 18\pi.$$

■

Em elaboração

## 22. Rotacional e Divergente

Ao estudar campos vetoriais, surge naturalmente a pergunta: como podemos descrever localmente o comportamento de um campo vetorial? Ou seja, se temos um campo de forças (como um campo elétrico, magnético, ou de velocidade de um fluido), como podemos entender o que ele está fazendo em cada ponto do espaço?

Foi tentando responder a perguntas desse tipo que nasceram duas ferramentas fundamentais do cálculo vetorial: o divergente e o rotacional.

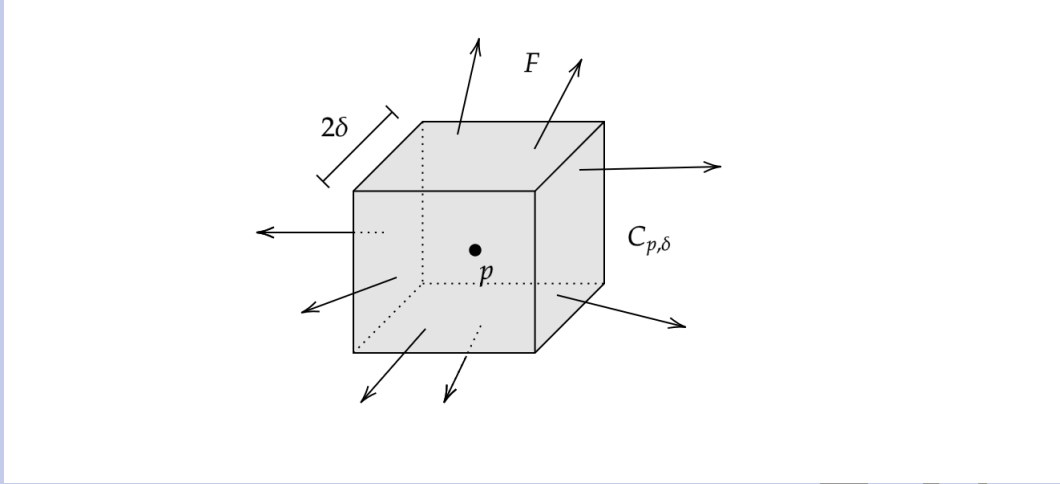
- **Divergente:** Imagine um campo vetorial  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que representa a velocidade de um fluido (água ou ar, por exemplo). Em certos pontos, o fluido pode estar "saindo" (como se houvesse uma fonte) ou "entrando" (como um ralo). O divergente é a ferramenta que mede quantitativamente esse comportamento: ele indica se, naquele ponto, há mais fluido entrando ou saindo isto é, o divergente mede fontes e sumidouros.

Nesse sentido, para mensurar se um ponto é fonte ou sumidouro vamos ver como se comporta o fluxo médio deste campo vetorial  $F$  numa caixa de lado  $2\delta$  centrada em  $p$ . Logo, como queremos ver o que acontece no ponto, vamos considerar o limite  $\delta \rightarrow 0$  para ver o resultado:

Seja então  $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $p = (p_1, p_2, p_3) \in U$  um ponto e considere, para  $\delta > 0$  suficientemente pequeno, o cubo

$$C_{p,\delta} = [p_1 - \delta, p_1 + \delta] \times [p_2 - \delta, p_2 + \delta] \times [p_3 - \delta, p_3 + \delta],$$

de modo tal que  $C_{p,\delta} \subset U$ .



Seja  $S_\delta = \partial C_{p,\delta}$ . Vamos calcular

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\text{Vol}(C_{p,\delta})} \iint_{S_\delta} F \cdot d\mathbf{A}.$$

Como  $S_\delta$  é a união das faces do cubo, calculamos para duas faces paralelas, para as outras a conta é similar. Considere então

$$S_1 = \{p_1 - \delta\} \times [p_2 - \delta, p_2 + \delta] \times [p_3 - \delta, p_3 + \delta]$$

$$\text{e } S_2 = \{p_1 + \delta\} \times [p_2 - \delta, p_2 + \delta] \times [p_3 - \delta, p_3 + \delta]$$

Nestes casos temos que  $n_1 = (-1, 0, 0)$  é o normal a  $S_1$  e  $n_2 = (1, 0, 0)$  é o normal a  $S_2$ . Então,

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} F \cdot d\mathbf{A} &= - \int_{-\delta}^{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} F_1(p_1 - \delta, p_2 + y, p_3 + z) dy dz \\ &= -F_1(p_1 - \delta, q_2, q_3)(2\delta)^2 \end{aligned}$$

Onde, na última linha, temos utilizado duas vezes o teorema do valor médio para integrais. Segue desta a existência dos pontos  $q_2 \in [p_2 - \delta, p_2 + \delta]$  e  $q_3 \in [p_3 - \delta, p_3 + \delta]$ . Análogamente:

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} F \cdot d\mathbf{A} &= \int_{-\delta}^{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} F_1(p_1 + \delta, p_2 + y, p_3 + z) dy dz \\ &= F_1(p_1 + \delta, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3)(2\delta)^2 \end{aligned}$$

Com isto, temos que

$$\iint_{S_1} F \cdot d\mathbf{A} + \iint_{S_2} F \cdot d\mathbf{A} = F_1(p_1 + \delta, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3) - F_1(p_1 - \delta, q_2, q_3)(2\delta)^2$$

Análogamente, calculando do mesmo modo com as outras faces ( $S_3, S_4$  perpendiculares a  $(0, 1, 0)$  e  $S_5, S_6$  perpendiculares a  $(0, 0, 1)$ ) temos

$$\iint_{S_3} F \cdot d\mathbf{A} + \iint_{S_4} F \cdot d\mathbf{A} = F_2(\tilde{q}_1, p_2 + \delta, \tilde{q}_3) - F_2(q_1, p_2 - \delta, q_3)(2\delta)^2$$

e

$$\iint_{S_5} F \cdot d\mathbf{A} + \iint_{S_6} F \cdot d\mathbf{A} = F_3(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, p_3 + \delta) - F_3(q_1, q_2, p_3 - \delta)(2\delta)^2$$

Com isto, temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{Vol}(C_{p,\delta})} \iint_{S_\delta} F \cdot d\mathbf{A} &= \frac{1}{(2\delta)^3} \iint_{S_\delta} F \cdot d\mathbf{A} \\ &= \frac{F_1(p_1 + \delta, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3) - F_1(p_1 - \delta, q_2, q_3)}{2\delta} \\ &\quad + \frac{F_2(\tilde{q}_1, p_2 + \delta, \tilde{q}_3) - F_2(q_1, p_2 - \delta, q_3)}{(2\delta)} \\ &\quad + \frac{F_3(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, p_3 + \delta) - F_3(q_1, q_2, p_3 - \delta)}{2\delta} \end{aligned}$$

Agora, fazendo  $\delta \rightarrow 0$  e utilizando que  $q_i, \tilde{q}_i \rightarrow p_i$  temos que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\text{Vol}(C_{p,\delta})} \iint_{S_\delta} F \cdot d\mathbf{A} = (\partial_1 F_1 + \partial_2 F_2 + \partial_3 F_3)(p_1, p_2, p_3).$$

**Definição 22.1** Seja  $U$  um aberto de  $\mathbb{R}^3$  e considere um campo vetorial  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  que escrevemos

$$F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

e assumimos que as funções  $P, Q$ , e  $R$  são diferenciáveis.

O **Divergente de  $F$**  é a função  $\text{div}(F) : U \rightarrow \mathbb{R}$  definida pela expressão.

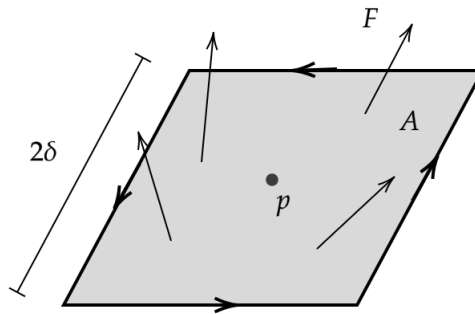
$$\text{div}(F) = \partial_1 P + \partial_2 Q + \partial_3 R.$$

Historicamente, esse conceito surgiu no contexto da equação da continuidade na física, que descreve a conservação da massa (ou carga, energia, etc.) em sistemas dinâmicos. O divergente aparece naturalmente na forma local dessa lei.

- **Rotacional:** Este operador mede a tendência de giro. Agora imagine o mesmo campo de velocidades, mas você coloca uma pequena pá de moinho em um ponto. A pá gira? Se sim, em que direção e com que intensidade? O rotacional é o operador que responde a essa pergunta: ele mede a tendência de rotação local de um campo vetorial.

Para mensurar a tendência de rotação em um ponto  $p$  a ideia é calcular a da integral de linha do campo vetorial  $F$  ao longo de uma curva fechada  $C$ , que é a fronteira de uma superfície  $A$  de raio  $\delta$  e logo ver o que acontece no limite em que  $\delta \rightarrow 0$ , isto é

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{A} \oint_C F \cdot d\gamma$$



Seja então  $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $p = (p_1, p_2, p_3) \in U$  um ponto e considere, para  $\delta > 0$  suficientemente

pequeno, o cubo

$$C_{p,\delta} = [p_1 - \delta, p_1 + \delta] \times [p_2 - \delta, p_2 + \delta] \times [p_3 - \delta, p_3 + \delta],$$

de modo tal que  $C_{p,\delta} \subset U$ . Em particular

$$A_1^\delta : \{p_1\} \times [p_2 - \delta, p_2 + \delta] \times [p_3 - \delta, p_3 + \delta],$$

é a parte do plano  $\hat{x} : x = p_1$  que está dentro do cubo  $C_{p,\delta}$ . Observaos que a fronteira de  $\partial A_1^\delta$  está formada por quatro arestas que parametrizamos por

$$\ell_1 : (p_1, p_2 + s, p_3 - \delta) \quad s \in [-\delta, \delta] \quad \ell_2 : (p_1, p_2 + \delta, p_3 + s) \quad s \in [-\delta, \delta]$$

$$\ell_3 : (p_1, p_2 - s, p_3 + \delta) \quad s \in [-\delta, \delta] \quad \ell_4 : (p_1, p_2 - \delta, p_3 - s) \quad s \in [-\delta, \delta]$$

e denotamos por  $\gamma_1 = \partial A_1^\delta = \ell_1 \cup \ell_2 \cup \ell_3 \cup \ell_4$ . Calculamos agora,

$$\begin{aligned} \oint_{\partial A_1^\delta} F \cdot d\gamma_1 &= \int_{-\delta}^{\delta} F_2(p_1, p_2 + s, p_3 - \delta) ds + \int_{-\delta}^{\delta} F_3(p_1, p_2 + \delta, p_3 + s) ds \\ &\quad - \int_{-\delta}^{\delta} F_2(p_1, p_2 - s, p_3 - \delta) ds - \int_{-\delta}^{\delta} F_3(p_1, p_2 + \delta, p_3 - s) ds \\ &= \int_{-\delta}^{\delta} [F_2(p_1, p_2 + s, p_3 - \delta) - F_2(p_1, p_2 - s, p_3 - \delta)] ds \\ &\quad + \int_{-\delta}^{\delta} [F_3(p_1, p_2 + \delta, p_3 + s) - F_3(p_1, p_2 + \delta, p_3 - s)] ds \\ &= [F_2(p_1, q_2, p_3 - \delta) - F_2(p_1, q_2, p_3 - \delta)](2\delta) \\ &\quad + [F_3(p_1, p_2 + \delta, q_3) - F_3(p_1, p_2 + \delta, q_3)](2\delta) \end{aligned}$$

Onde temos aplicado, nas últimas duas linhas, o teorema do valor médio, por exemplo,

$$F_2(p_1, q_2, p_3 - \delta) = \int_{-\delta}^{\delta} F_2(p_1, p_2 + s, p_3 - \delta) ds \quad \text{para algum } q_2 \in [p_2 - \delta, p_2 + \delta].$$

Com isto, e utilizando o teorema do valor medio na sua forma diferencial, vemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{Area}(A_1^\delta)} \oint_{\partial A_1^\delta} F \cdot d\gamma_1 &= \frac{1}{4\delta^2} \left\{ \frac{[F_2(p_1, q_2, p_3 - \delta) - F_2(p_1, q_2, p_3 - \delta)]}{(2\delta)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{[F_3(p_1, p_2 + \delta, q_3) - F_3(p_1, p_2 + \delta, q_3)]}{(2\delta)} \right\} \\ &= \partial_2 F_3(p_1, \tilde{q}_2, q_3) - \partial_3 F_2(p_1, q_2, \tilde{q}_3) \end{aligned}$$

para  $\tilde{q}_2 \in [q_2 - \delta, q_2 + \delta]$  e  $\tilde{q}_3 \in [q_3 - \delta, q_3 + \delta]$

Agora, como o que queremos ver é o comportamento de  $F$  no ponto  $p$  fazemos  $\delta \rightarrow 0$ . Neste caso, temos que

$$q_2, \tilde{q}_2 \rightarrow p_2, \quad q_3, \tilde{q}_3 \rightarrow p_3$$

e que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\text{Area}(A_1^\delta)} \oint_{\partial A_1^\delta} F \cdot d\gamma = \partial_2 F_3(p_1, p_2, p_3) - \partial_3 F_2(p_1, p_2, p_3)$$

Análogamente, podemos provar algo similar para

$$A_2^\delta : [p_1 - \delta, p_1 + \delta] \times \{p_2\} \times [p_3 - \delta, p_3 + \delta],$$

onde obteremos

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\text{Area}(A_2^\delta)} \oint_{\partial A_2^\delta} F \cdot d\gamma = \partial_3 F_1(p_1, p_2, p_3) - \partial_1 F_3(p_1, p_2, p_3)$$

e para

$$A_3^\delta : [p_1 - \delta, p_1 + \delta] \times [p_2 - \delta, p_2 + \delta] \times \{p_3\},$$

onde obteremos

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\text{Area}(A_3^\delta)} \oint_{\partial A_3^\delta} F \cdot d\gamma = \partial_1 F_2(p_1, p_2, p_3) - \partial_2 F_1(p_1, p_2, p_3)$$

Portanto, para um quadrado plano qualquer  $M^\delta$  de lado  $2\delta$  centrado em  $p$  e de normal  $\eta$ , teremos que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\text{Area}(M^\delta)} \oint_{\partial M^\delta} F \cdot d(\partial M^\delta) = \langle R(p_1, p_2, p_3), \eta \rangle$$

em que

$$R(p_1, p_2, p_3) = (\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2, \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3, \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)(p_1, p_2, p_3).$$

Com isto chegamos à seguinte definição:

**Definição 22.2** Seja  $U$  um aberto de  $\mathbb{R}^3$  e considere um campo vetorial  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  que escrevemos

$$F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

e assumimos que as funções  $P$ ,  $Q$ , e  $R$  são diferenciáveis.

O **Rotacional de  $F$**  é o campo vetorial  $\text{rot}(F) : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  definido pela expressão

$$\text{rot}(F) = (\partial_2 R - \partial_3 R)\mathbf{i} + (\partial_3 P - \partial_1 R)\mathbf{j} + (\partial_1 Q - \partial_2 P)\mathbf{k}.$$

O conceito de rotacional também nasceu de problemas da física, especialmente na mecânica dos fluidos e no eletromagnetismo. Por exemplo, as equações de Maxwell, que descrevem os campos elétrico e magnético, envolvem diretamente o rotacional.

**Obs.**

Lembrar da expressão do rotacional e do divergente pode ser difícil. No entanto, uma regra para lembrar as expressões pode ser obtida utilizando os conceitos de geometria analítica como segue. Reforçamos que a expressão a seguir é meramente formal.

Se denotamos

$$\nabla = \partial_1 \mathbf{i} + \partial_2 \mathbf{j} + \partial_3 \mathbf{k}.$$

Então

$$\text{rot}(F) = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (\partial_2 R - \partial_3 R)\mathbf{i} + (\partial_3 P - \partial_1 R)\mathbf{j} + (\partial_1 Q - \partial_2 P)\mathbf{k}$$

$$\text{div}(F) = \nabla \cdot F = \partial_1 P + \partial_2 Q + \partial_3 R$$

Vamos estudar alguns casos particulares para entender melhor o rotacional e o divergente.

Consideramos, para isto, campos vetoriais da forma  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tais que  $F(x, y, z) = (P(x, y), Q(x, y), 0)$ .

Para estudar estes campos vetoriais podemos representá-lo no plano  $z = k$ . O mesmo comportamento vai se repetir em cada plano. Para estes campos vetoriais temos que

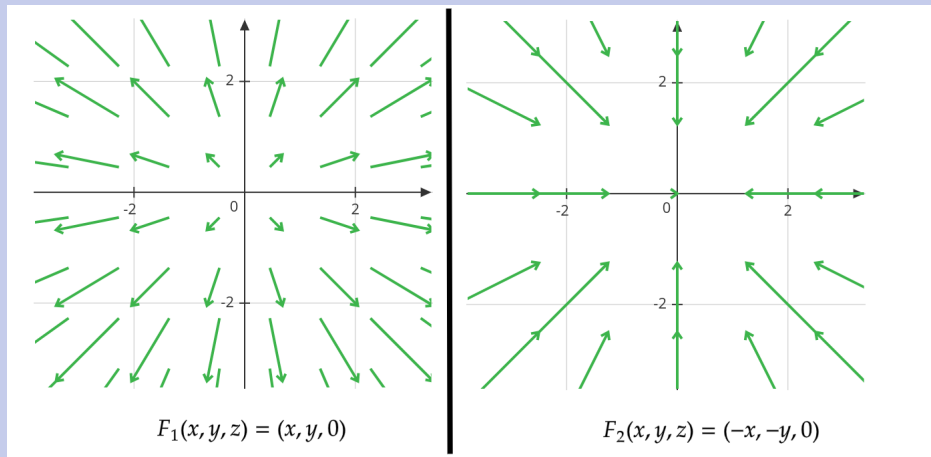
$$\text{div}(F)(x, y) = (\partial_x P + \partial_y Q)(x, y)$$

e

$$\text{rot}(F)(x, y) = (0, 0, \partial_y Q - \partial_x P)(x, y)$$

Vejamos alguns exemplos destes campos vetoriais para entendermos melhor o que "medem" o rotacional e o divergente.

- Considere os campos vetoriais



Observamos que, para os dois casos

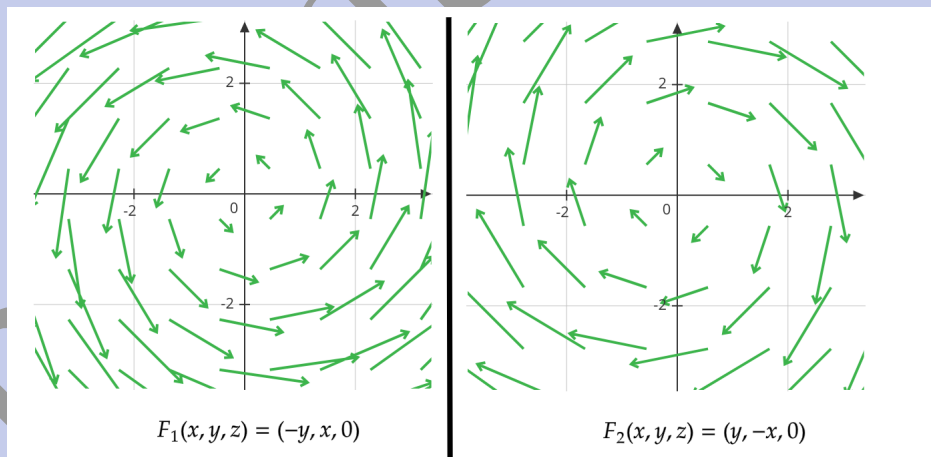
$$\mathbf{rot}(F_1) = (0, 0, 0) = \mathbf{rot}(F_2)$$

o que indica que nenhum dos dois campos tem comportamento de circulação ou rotação. No entanto, ao calcularmos o divergente temos que

$$\mathbf{div}(F_1)(x, y, z) = 2 = -(-2) = \mathbf{div}(F_2)(x, y, z)$$

portanto, o divergente mostra que  $F_1$  tem uma fonte e  $F_2$  um sumidouro.

- Considere os campos vetoriais



Observamos que, para os dois casos  $\mathbf{div}(F_1) = \mathbf{div}(F_2) = 0$  o que indica que nenhum dos dois campos tem fontes nem sumidouros. No entanto, ao calcularmos os rotacionais temos

$$\mathbf{rot}(F_1)(x, y, z) = (0, 0, 2) = -(0, 0, -2) = \mathbf{rot}(F_2)(x, y, z)$$

portanto, o rotacional está "atestando" um comportamento de circulação e o sinal está associado ao sentido de circulação.

■ **Exemplo 22.1** • Seja  $F(x, y, z) = (xyz, 0, -x^2y)$ . Vamos calcular o rotacional e o divergente de  $F$ :

$$\mathbf{div}(F)(x, y, z) = yz + 0 + 0 = yz.$$

$$\mathbf{rot}(F)(x, y, z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ xyz & 0 & -x^2y \end{vmatrix} = (-x^2, xy, -xz).$$

- Seja  $F(x, y, z) = (e^x \sin(y), e^x \cos(y), z)$ . Vamos calcular o rotacional e o divergente de  $F$ :

$$\operatorname{div}(F)(x, y, z) = e^x \sin(y) - e^x \sin(y) + 1 = 1.$$

$$\operatorname{rot}(F)(x, y, z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ e^x \sin(y) & e^x \cos(y) & z \end{vmatrix} = (0, 0, 0).$$

■

**Teorema 22.1** Seja  $U$  um aberto de  $\mathbb{R}^3$ , considere uma função diferenciável  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  e um campo vetorial  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  que escrevemos

$$F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}.$$

Assumimos que as funções  $P$ ,  $Q$ , e  $R$  são diferenciáveis de classe  $C^2$ . Então,

- $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(F)) = 0$
- $\operatorname{rot}(\nabla f) = 0$
- $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(F)) = \nabla \operatorname{div}(F) - \Delta F$

*Demonstração.* Fazemos a conta para cada caso utilizando o teorema de Clairaut

•

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}(F)) = \partial_1(\partial_2 R - \partial_3 Q) + \partial_2(\partial_3 P - \partial_1 R) + \partial_3(\partial_1 Q - \partial_2 P) = 0$$

- Fazemos a conta formal para simplificar

$$\operatorname{rot}(\nabla f) = \operatorname{rot}(F) = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ \partial_1 f & \partial_2 f & \partial_3 f \end{vmatrix} = 0$$

Calculamos

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(F)) =$$

$$(\partial_2(\partial_1 Q - \partial_2 P) - \partial_3(\partial_3 P - \partial_1 R), \partial_3(\partial_2 R - \partial_3 Q) - \partial_1(\partial_1 Q - \partial_2 P), \partial_1(\partial_3 P - \partial_1 R) - \partial_2(\partial_2 R - \partial_3 Q))$$

Agrupando os termos e reorganizando, obtemos:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(F)) = \nabla \operatorname{div}(F) - \Delta F$$

onde:

$$\nabla \operatorname{div}(F) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}, \quad \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

$$\Delta F = (\nabla^2 P, \nabla^2 Q, \nabla^2 R) = \left( \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \right)$$

■

■ **Exemplo 22.2** Seja  $F(x, y, z) = (xy^2, yz^2, zx^2)$ . Como

$$\operatorname{div}(F)(x, y, z) = y^2 + z^2 + x^2 \neq 0,$$

temos que não existe um campo vetorial  $G$  tal que  $\operatorname{rot}(G) = F$ .

■

**Corolário 22.1** Seja  $U$  um aberto de  $\mathbb{R}^3$  e  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  um campo vetorial. Se  $\mathbf{div}(F) \neq 0$  então  $F$  não pode ser rotacional de um outro campo vetorial  $G : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Da mesma forma se  $\mathbf{rot}(F) \neq 0$  então  $F$  não pode ser conservativo.

**Teorema 22.2** Considere um campo vetorial  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que escrevemos

$$F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}.$$

- Assuma que  $\mathbf{div}(F) = 0$ . Então existe um campo vetorial  $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que

$$\mathbf{rot}(H) = F$$

- Assuma que  $\mathbf{rot}(F) = 0$ . Então existe uma função  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\nabla f = F$ .

*Demonstração.* • Seja

$$F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)),$$

e assumamos que  $\mathbf{div}(F) = \partial_x P + \partial_y Q + \partial_z R = 0$ .

Vejam que condições deve satisfazer um campo vetorial  $H(x, y, z) = (H_1(x, y, z), H_2(x, y, z), 0)$  para que  $\mathbf{rot}(H) = F$ . Como

$$\mathbf{rot}(H) = (-\partial_z H_2, \partial_z H_1, \partial_x H_2 - \partial_y H_1)$$

temos que

$$-\partial_z H_2 = P \quad \text{e} \quad \partial_z H_1 = Q$$

Portanto, definimos

$$H_1(x, y, z) = -\int^z P(x, y, u) du + C_1(x, y)$$

e

$$H_2(x, y, z) = \int^z Q(x, y, u) du$$

Portanto, para que tudo funcione, devemos ter que

$$R(x, y, z) = \partial_x H_1(x, y, z) - \partial_y H_2(x, y, z) \quad (22.1)$$

$$= -\int^z [\partial_y Q(x, y, u) + \partial_x P(x, y, u)] du + \partial_x C_1(x, y) \quad (22.2)$$

Portanto, para que tudo funcione, devemos ter que

$$\partial_x C_1(x, y) = R(x, y, z) + \int^z [\partial_y Q(x, y, u) + \partial_x P(x, y, u)] du$$

Mas, primeiramente, devemos ver que o lado direito da equação não depende de  $z$ . Portanto, calculamos

$$\partial_z [R(x, y, z) + \int^z [\partial_y Q(x, y, u) + \partial_x P(x, y, u)] du] = \partial_z R(x, y, z) + \partial_y Q(x, y, z) + \partial_x P(x, y, z) = \mathbf{div}(F) = 0.$$

De onde segue que o lado direito não depende de  $z$ . Portanto

$$C_1(x, y) = \int^x \left[ R(v, y, z) + \int^z [\partial_y Q(v, y, u) + \partial_x P(v, y, u)] du \right] dv.$$

o que prova o resultado.

De forma geral, podemos ver que o campo vetorial

$$H(x, y, z) = \int_0^1 F(tx, ty, tz) \times (tx, ty, tz) dt$$

satisfaz  $\mathbf{rot}(H) = F$  (deixamos como exercício pois é bastante tedioso)

- Seja

$$F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)),$$

e assumamos que  $\text{rot}(F) = 0$ , então temos que

$$\partial_2 R = \partial_3 Q, \quad \partial_1 R = \partial_3 P \quad \text{e} \quad \partial_1 Q = \partial_2 P.$$

Defina

$$f(x, y, z) = \int_0^1 [xP(tx, ty, tz) + yQ(tx, ty, tz) + zR(tx, ty, tz)] dt$$

Calculamos, utilizando as identidades acima, o gradiente de  $f$ . Para isto, temos

$$\begin{aligned} \partial_x f(x, y, z) &= \int_0^1 [P(tx, ty, tz) + xt \partial_1 P(tx, ty, tz) + yt \partial_1 Q(tx, ty, tz) + zt \partial_1 R(tx, ty, tz)] dt \\ &= \int_0^1 [P(tx, ty, tz) + xt \partial_1 P(tx, ty, tz) + yt \partial_2 P(tx, ty, tz) + zt \partial_3 P(tx, ty, tz)] dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} [tP(tx, ty, tz)] dt \\ &= P(x, y, z) \\ \partial_y f(x, y, z) &= \int_0^1 [Q(tx, ty, tz) + xt \partial_2 P(tx, ty, tz) + yt \partial_2 Q(tx, ty, tz) + zt \partial_2 R(tx, ty, tz)] dt \\ &= \int_0^1 [Q(tx, ty, tz) + xt \partial_1 Q(tx, ty, tz) + yt \partial_2 Q(tx, ty, tz) + zt \partial_3 R(tx, ty, tz)] dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} [tQ(tx, ty, tz)] dt \\ &= Q(x, y, z) \\ \partial_z f(x, y, z) &= \int_0^1 [R(tx, ty, tz) + xt \partial_3 P(tx, ty, tz) + yt \partial_3 Q(tx, ty, tz) + zt \partial_3 R(tx, ty, tz)] dt \\ &= \int_0^1 [R(tx, ty, tz) + xt \partial_1 R(tx, ty, tz) + yt \partial_2 R(tx, ty, tz) + zt \partial_3 R(tx, ty, tz)] dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} [tR(tx, ty, tz)] dt \\ &= R(x, y, z) \end{aligned}$$

de onde segue o pedido. ■

Pelo que temos visto acima, tanto o divergente quanto o rotacional nos permitem descrever propriedades locais de um campo vetorial e estudar como o campo vetorial se comporta.

Em particular, quando estudamos como uma função varia em todas as direções do espaço, podemos dar uma descrição do seu comportamento pelo gradiente da função. Ao estudar o gradiente da função vemos que este é um campo vetorial. É fácil ver que não teremos tendência de giro para o gradiente. Isto segue como consequência do resultado anterior. No entanto, o fato de o campo gradiente ser fonte ou sumidouro pode ser mensurada sim. Nesse sentido introduzimos o seguinte operador:

**Definição 22.3** Dada uma função  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  definimos o **operador de Laplace** ou **Laplaciano** como

$$\Delta f = \text{div}(\nabla f) = \partial_1 \partial_1 f + \partial_2 \partial_2 f + \partial_3 \partial_3 f$$

No caso em que  $U$  um aberto de  $\mathbb{R}^3$  e  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  um campo vetorial que escrevemos

$$F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

e assumimos que as funções  $P$ ,  $Q$ , e  $R$  são diferenciáveis, definimos

$$\Delta F(x, y, z) = (\Delta P(x, y, z), \Delta Q(x, y, z), \Delta R(x, y, z))$$

**Obs.**

De forma intuitiva, o Laplaciano mede *quanto o valor de uma função em um ponto difere da média dos seus valores ao redor*. Se essa diferença for zero, o ponto está em equilíbrio, o que justifica seu papel central em equações que descrevem estados estáveis.

O operador Laplaciano recebe esse nome em homenagem ao matemático francês Pierre-Simon Laplace (1749–1827), que o introduziu em seus estudos sobre gravitação e eletrostática. Ele aparece naturalmente na **equação de Laplace**:

$$\Delta f = 0,$$

que modela situações de equilíbrio, como a distribuição estática de temperatura, potenciais elétricos e gravitacionais, e até o comportamento de fluidos em repouso.

Mais tarde, o Laplaciano ganhou destaque na formulação da **equação do calor**, **equação de onda** e outras equações diferenciais parciais fundamentais da física e engenharia. Ele é essencial para entender como quantidades se propagam, se distribuem ou atingem equilíbrio em um meio.

**Corolário 22.2** Sejam  $F, g : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções de classe  $C^2$ . Então

$$\Delta(f \cdot g) = g\Delta f + f \cdot \Delta g + \nabla f \cdot \nabla g$$

*Demonstração.* Primeiramente observamos que

$$\nabla(f \cdot g) = f\nabla g + g\nabla f$$

Logo

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\nabla(f \cdot g)) &= \partial_x(f\partial_x g) + \partial_y(f\partial_y g) + \partial_z(f\partial_z g) \\ &\quad + \partial_x(g\partial_x f) + \partial_y(g\partial_y f) + \partial_z(g\partial_z f) \\ &= f\Delta g + g\Delta f + \partial_x f \partial_x g + \partial_y f \partial_y g + \partial_z f \partial_z g \\ &= f\Delta g + g\Delta f + \nabla f \cdot \nabla g. \end{aligned}$$

■ **Exemplo 22.3** • Vamos estudar agora a solução da equação de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) = \frac{1}{2}\Delta u(x, y, t).$$

Para isto, considere a função

$$u(x, y, t) = \frac{1}{(4\pi t)} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4t}\right)$$

observamos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) &= \left(-\frac{1}{4\pi t^2} + \frac{x^2 + y^2}{16\pi t^3}\right) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4t}\right) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, t) &= -\frac{x}{8\pi t^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4t}\right) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y, t) &= \left(-\frac{1}{8\pi t^2} + \frac{x^2}{16\pi t^3}\right) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4t}\right) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y, t) &= \left(-\frac{1}{8\pi t^2} + \frac{y^2}{16\pi t^3}\right) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4t}\right) \end{aligned}$$

Com isto, vemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta u(x,y,t) &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y,t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y,t) \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4\pi t^2} + \frac{x^2+y^2}{16\pi t^3}\right)\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial t}(x,y,t).\end{aligned}$$

- No eletromagnetismo clássico, os campos elétrico e magnético são descritos por funções vetoriais dependentes do tempo e da posição no espaço:

$$\mathbf{E}(x,y,z,t) = (E_x(x,y,z,t), E_y(x,y,z,t), E_z(x,y,z,t)) \quad \text{e}$$

$$\vec{B}(x,y,z,t) = (B_x(x,y,z,t), B_y(x,y,z,t), B_z(x,y,z,t)).$$

Estes campos, quando estamos num meio sem cargas nem correntes, obedecem as seguintes propriedades:

$$\mathbf{div}(\mathbf{E}) = 0 \quad (\text{Lei de Gauss para o Campo Elétrico})$$

$$\mathbf{div}(\mathbf{B}) = 0 \quad (\text{Lei de Gauss para o Magnetismo})$$

$$\mathbf{rot}(\mathbf{E}) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} \quad (\text{Lei de Faraday da Indução})$$

$$\mathbf{rot}(\mathbf{B}) = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E} \quad (\text{Lei de Ampère-Maxwell})$$

Observamos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{E} &= -c\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{rot}\mathbf{B} \\ &= -c\mathbf{rot}\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}\right) \\ &= -c^2\mathbf{rot}(\mathbf{rot}(\mathbf{E})) \\ &= -c^2(\nabla\mathbf{div}(\mathbf{E})) + c^2\Delta\mathbf{E} \\ &= c^2\Delta\mathbf{E}.\end{aligned}$$

Análogamente, pode ser mostrado que

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{B} = c^2\Delta\mathbf{B}$$

Estas duas equações são conhecidas como equações de onda.

■

Em elaboração

## 23. Operadores em coord. cilíndricas e esféricas

Veremos aqui, brevemente, como escrever os operadores diferenciáveis vistos até agora em coordenadas cilíndricas.

### 23.1 Coordenadas Cilíndricas

Sabemos que o sistema de coordenadas cartesianas e o sistema de coordenadas cilíndricas estão relacionados por

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta) \quad \text{e} \quad z = z$$

onde  $r \in (0, +\infty)$  e  $\theta \in (0, 2\pi)$ .

Segue então que

$$\partial_r x = \cos(\theta) \quad \partial_r y = \sin(\theta)$$

$$\partial_\theta x = -r \sin(\theta) \quad \partial_\theta y = r \cos(\theta).$$

Vamos construir uma base ortonormal  $\{e_r, e_\theta, e_z\}$  adequada às coordenadas cilíndricas. Para isto observamos que se

$$R = (x, y, z) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z)$$

então definimos

$$e_r = \frac{1}{\|\partial_r R\|} \partial_r R \Rightarrow e_r = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0) = \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2$$

$$e_\theta = \frac{1}{\|\partial_\theta R\|} \partial_\theta R \Rightarrow e_\theta = (-\sin(\theta), \cos(\theta), 0) = -\sin(\theta)e_1 + \cos(\theta)e_2$$

e

$$e_z = \frac{1}{\|\partial_z R\|} \partial_z R = (0, 0, 1) = e_3$$

Com isto temos que as coordenadas  $(a_1, a_2, a_3)$  de um vetor na base  $\{e_1, e_2, e_3\}$  terá, na base  $\{e_r, e_\theta, e_z\}$ , coordenadas  $(a_r, a_\theta, a_z)$  relacionadas por

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_r \\ a_\theta \\ a_z \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} a_r \\ a_\theta \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Portanto

$$e_1 = \cos(\theta)e_r - \sin(\theta)e_\theta$$

$$e_2 = \sin(\theta)e_r + \cos(\theta)e_\theta$$

$$e_3 = e_z.$$

Com isto, temos que se  $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função, então

$$\begin{aligned} \nabla f &= (\partial_x f)e_1 + (\partial_y f)e_2 + (\partial_z f)e_3 \\ &= (\cos(\theta)\partial_x f + \sin(\theta)\partial_y f)e_r + (-\sin(\theta)\partial_x f + \cos(\theta)\partial_y f)e_\theta + (\partial_z f)e_z \\ &= (\partial_r f)e_r + \left(\frac{1}{r}\partial_\theta f\right)e_\theta + (\partial_z f)e_z. \end{aligned}$$

Dada  $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^1$ . O gradiente de  $f$  em coordenadas cilíndricas é dado pela expressão

$$\nabla f(r, \theta, z) = (\partial_r f)(r, \theta, z) e_r + \left(\frac{1}{r}\partial_\theta f\right)(r, \theta, z) e_\theta + (\partial_z f)(r, \theta, z) e_z.$$

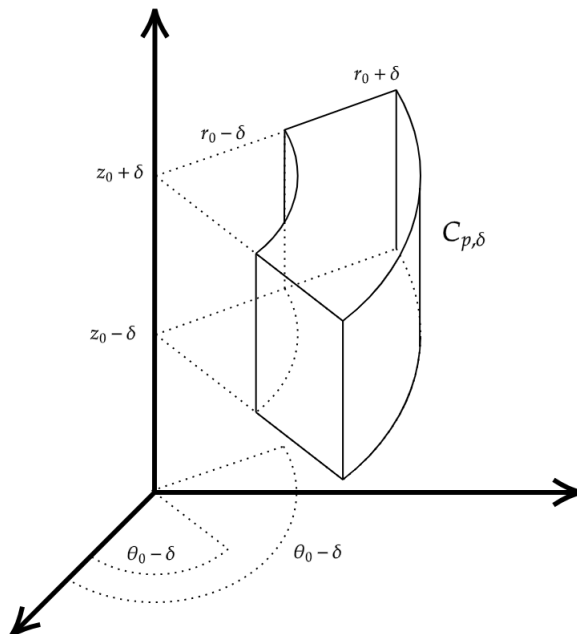
Vamos calcular agora os operadores rotacional e divergente no sistema de coordenadas cilíndricas.

• **Divergente**

Seja  $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um campo vetorial de classe  $C^1$ ,  $p = (r_0, \theta_0, z_0) \in U$  um ponto e considere, para  $\delta > 0$  suficientemente pequeno, o cubo de coordenadas cilíndricas

$$C_{p,\delta} = \{(r, \theta, z), |r_0 - r| \leq \delta, |\theta - \theta_0| \leq \delta, |z - z_0| \leq \delta\},$$

de modo tal que  $C_{p,\delta} \subset U$ .



Seja  $S_\delta = \partial C_{p,\delta}$ . Vamos calcular

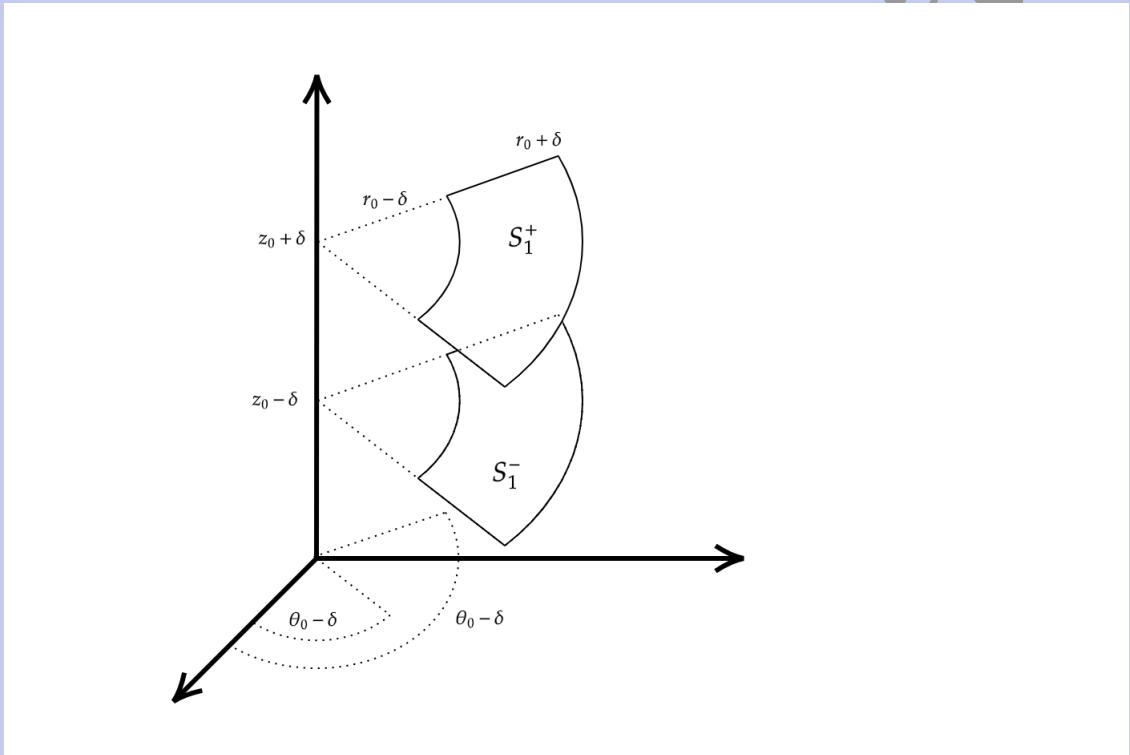
$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\text{Vol}(C_{p,\delta})} \iint_{S_\delta} F \cdot d\mathbf{A}.$$

Como  $S_\delta$  é a união das faces do cubo. Observamos que temos, para este caso, três tipos de faces e parametrizações

– O primeiro tipo é

$$\phi_1^\pm(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), z_0 \pm \delta) \quad (u, v) \in [r_0 - \delta, r_0 + \delta] \times [\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta]$$

$$\partial_u \phi_1^\pm \times \partial_v \phi_1^\pm(u, v) \sim \pm(0, 0, u) = u e_z$$



Então,

$$\begin{aligned} \iint_{S_1^\pm} F \cdot d\mathbf{A} &= \pm \int_{-\delta}^{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} F_z(u, v, z \pm \delta) u du dv \\ &= \pm F_z(u_1, v_1, z_0 \pm \delta) u_1 (2\delta)^2 \end{aligned}$$

para algum

$$(u_1, v_1) \in [r_0 - \delta, r_0 + \delta] \times [\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta]$$

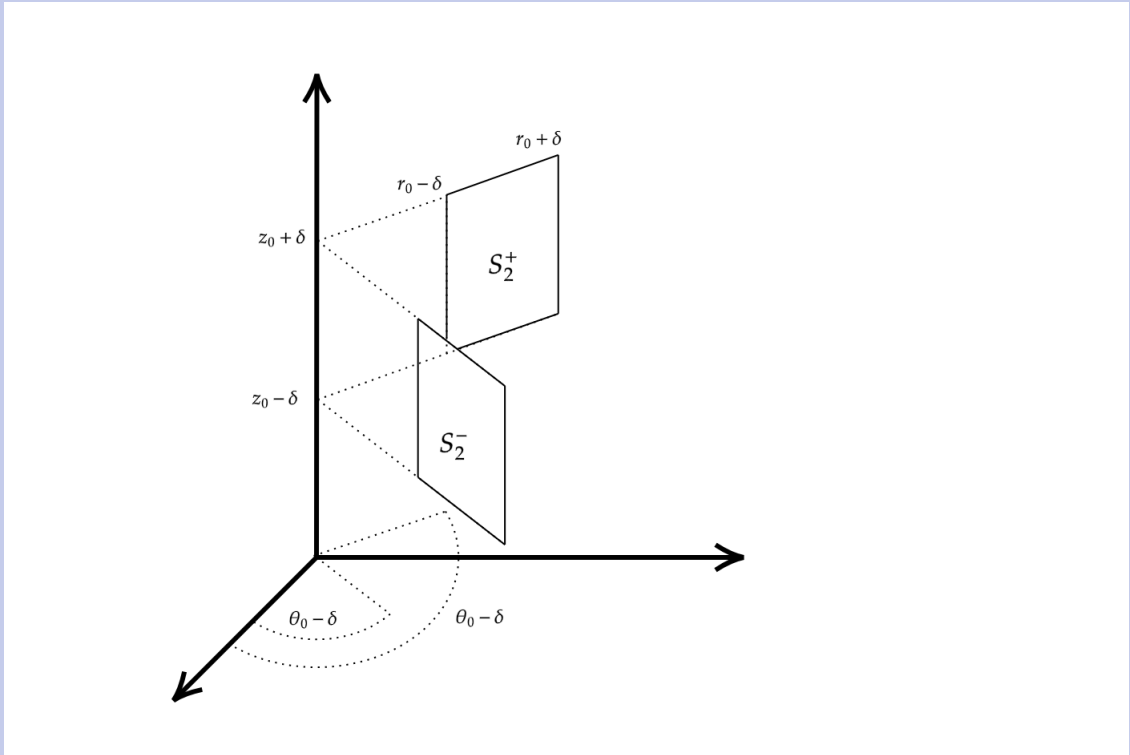
Aqui estamos abusando da notação inferindo que  $(u_1, v_1)$  é o mesmo para o caso da parte + como da parte -. Como vamos fazer  $\delta \rightarrow 0$  isto não faz grande diferença. Com isto, temos que

$$\iint_{S_1^+} F \cdot d\mathbf{A} + \iint_{S_1^-} F \cdot d\mathbf{A} = (F_z(u_1, v_1, z_0 + \delta) - F_z(u_1, v_1, z_0 - \delta)) u_1 (2\delta)^2$$

– O segundo tipo é

$$\phi_2^\pm(u, z) = (u \cos(\theta_0 \pm \delta), u \sin(\theta_0 \pm \delta), z) \quad (u, z) \in [r_0 - \delta, r_0 + \delta] \times [z_0 - \delta, z_0 + \delta]$$

$$\partial_u \phi_2^\pm \times \partial_z \phi_2^\pm(u, z) \sim (\sin(\theta_0 \pm \delta), -\cos(\theta_0 \pm \delta), 0) = e_\theta$$



Então,

$$\begin{aligned} \iint_{S_2^\pm} F \cdot d\mathbf{A} &= \pm \int_{-\delta}^{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} F_\theta(u, \theta_0 \pm \delta, z) du dz \\ &= \pm F_z(u_1, \theta_0 \pm \delta, z_1) (2\delta)^2 \end{aligned}$$

para algum

$$(u_1, z_1) \in [r_0 - \delta, r_0 + \delta] \times [z_0 - \delta, z_0 + \delta]$$

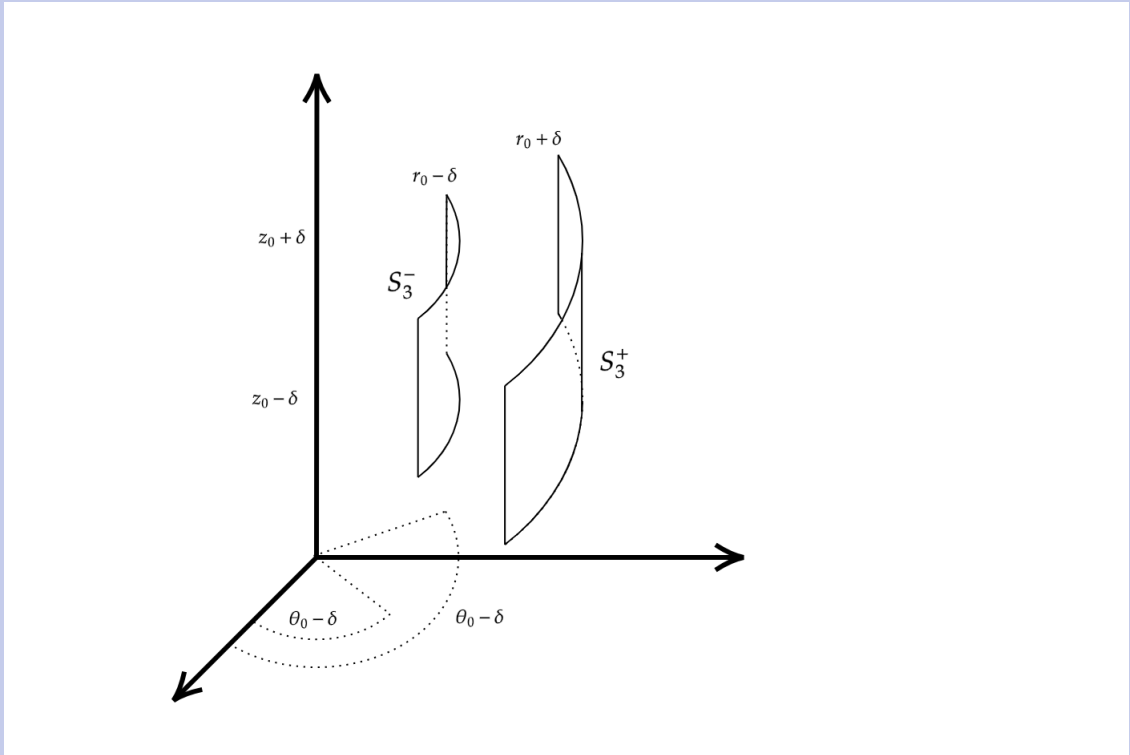
Novamente, aqui estamos abusando da notação inferindo que  $(u_1, z_1)$  é o mesmo para o caso da parte + como da parte -. Como vamos fazer  $\delta \rightarrow 0$  isto não faz grande diferença. Com isto, temos que

$$\iint_{S_2^+} F \cdot d\mathbf{A} + \iint_{S_2^-} F \cdot d\mathbf{A} = (F_\theta(u_1, \theta_0 + \delta, z_1) - F_\theta(u_1, \theta_0 - \delta, z_1)) (2\delta)^2$$

– O terceiro tipo é

$$\phi_3^\pm(v, z) = ((r_0 \pm \delta) \cos(v), (r_0 \pm \delta) \sin(v), z) \quad (v, z) \in [\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta] \times [z_0 - \delta, z_0 + \delta]$$

$$\partial_u \phi_3^\pm \times \partial_z \phi_3^\pm(u, z) \sim (r_0 \pm \delta) (\cos(u), \sin(u), 0) = (r_0 \pm \delta) e_r$$



Então,

$$\begin{aligned} \iint_{S_3^\pm} F \cdot d\mathbf{A} &= \pm \int_{-\delta}^{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} (r_0 \pm \delta) F_r(r_0 \pm \delta, v, z) du dz \\ &= \pm F_z(r_0 \pm \delta, v_1, z_1) (r_0 \pm \delta) (2\delta)^2 \end{aligned}$$

para algum

$$(v_1, z_1) \in [\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta] \times [z_0 - \delta, z_0 + \delta]$$

Novamente, aqui estamos abusando da notação inferindo que  $(v_1, z_1)$  é o mesmo para o caso da parte + como da parte -. Como vamos fazer  $\delta \rightarrow 0$  isto não faz grande diferença. Com isto, temos que

$$\iint_{S_3^+} F \cdot d\mathbf{A} + \iint_{S_3^-} F \cdot d\mathbf{A} = (F_r(r_0 + \delta, v_1, z_1)(r_0 + \delta) - F_r(r_0 - \delta, v_1, z_1)(r_0 - \delta))(2\delta)^2$$

Como

$$\text{Vol}(C_{p,\delta}) = \int_{z_0-\delta}^{z_0+\delta} \int_{\theta_0-\delta}^{\theta_0+\delta} \int_{r_0-\delta}^{r_0+\delta} u \, du \, dv \, dz = (2\delta)^3 r_0$$

Com isto, temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{Vol}(C_{p,\delta})} \iint_{S_\delta} F \cdot d\mathbf{A} &= \frac{1}{(2\delta)^3 r_0} \iint_{S_\delta} F \cdot d\mathbf{A} \\ &= \frac{(F_z(u_1, v_1, z_0 + \delta) - F_z(u_1, v_1, z_0 - \delta)) u_1}{2\delta r_0} \\ &\quad + \frac{F_\theta(u_1, \theta_0 + \delta, z_1) - F_\theta(u_1, \theta_0 - \delta, z_1)}{(2\delta) r_0} \\ &\quad + \frac{(F_r(r_0 + \delta, v_1, z_1)(r_0 + \delta) - F_r(r_0 - \delta, v_1, z_1)(r_0 - \delta))}{2\delta r_0} \end{aligned}$$

Agora, fazendo  $\delta \rightarrow 0$  e utilizando que  $(u_i, v_i) \rightarrow (r_0, \theta_0)$  temos que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\text{Vol}(C_{p,\delta})} \iint_{S_\delta} F \cdot d\mathbf{A} = \left( \frac{1}{r} \partial_r (r F_r) + \frac{1}{r} \partial_\theta F_\theta + \partial_z F_z \right) (r_0, \theta_0, z_0).$$

Seja  $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um campo vetorial de classe  $C^1$ , a expressão do divergente em coordenadas cilíndricas é dado por

$$\operatorname{div}(F)(r, \theta, z) = \left( \frac{1}{r} \partial_r(rF_r) + \frac{1}{r} \partial_\theta F_\theta + \partial_z F_z \right)(r, \theta, z)$$

e, utilizando a expressão do gradiente, temos que a do Laplaciano de uma função  $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^2$ , em coordenadas cilíndricas é

$$\Delta f(r, \theta, z) = \left( \frac{1}{r} \partial_r(r \partial_r f) + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 F_\theta + \partial_z^2 F_z \right)(r, \theta, z)$$

• **Rotacional**

Seja  $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um campo vetorial de classe  $C^1$ ,  $p = (r_0, \theta_0, z_0) \in U$  um ponto e considere  $\delta > 0$ . Neste caso vamos considerar três superfícies parametrizadas que, basicamente, são aquelas que vimos para o caso do divergente.

Para não carregar a notação e como as curvas tem comprimento infinitesimal vamos aproximar para o caso em que  $\gamma \in (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_C F \cdot d\gamma \simeq F(\gamma(\tilde{t})) \cdot \gamma'(\tilde{t})(b-a) \quad \text{para algum } \tilde{t} \in (a, b),$$

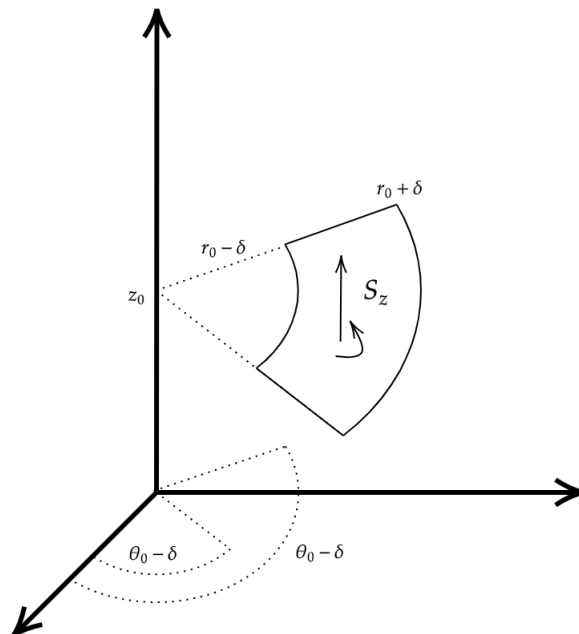
em cada caso particular.

– O primeiro tipo é a superfície  $S_z$

$$\phi_1(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), z_0) \quad (u, v) \in [r_0 - \delta, r_0 + \delta] \times [\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta]$$

onde

$$\partial_u \phi_1 \times \partial_v \phi_1(u, v) \sim (0, 0, u) = u e_z$$



As curvas que formam a fronteira da superfície terão vetor tangente paralelos a  $e_r$  ou  $e_\theta$  Então temos que

$$\oint_{\partial S_z} F \cdot d\gamma = [F_r(u_i, \theta_0 - \delta, z_0) - F_r(u_i, \theta_0 + \delta, z_0)](2\delta) \\ + [F_\theta(r_0 + \delta, v_i, z_0)(r_0 + \delta) - F_\theta(r_0 - \delta, v_i, z_0)(r_0 - \delta)](2\delta)$$

Como

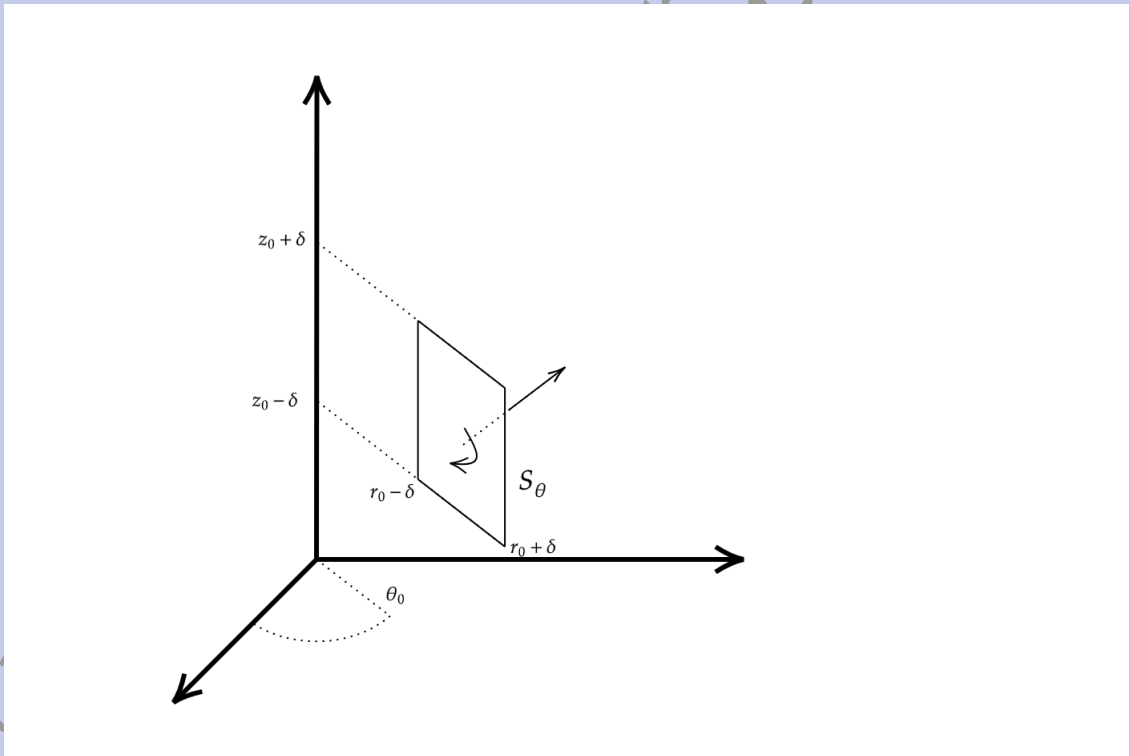
$$Area(S_z) = \int_{r_0 - \delta}^{r_0 + \delta} \int_{\theta_0 - \delta}^{\theta_0 + \delta} u \, du \, dv = r_0(2\delta)^2$$

De onde segue que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{Area(S_z)} \oint_{\partial S_z} F \cdot d\gamma = \left[ \frac{1}{r} (\partial_r(r F_\theta)) - \frac{1}{r} \partial_\theta F_r \right] (r_0, \theta_0, z_0)$$

– O segundo tipo é

$$\phi_2(u, z) = (u \cos(\theta_0), u \sin(\theta_0), z) \quad (u, z) \in [r_0 - \delta, r_0 + \delta] \times [z_0 - \delta, z_0 + \delta] \\ \partial_u \phi_2 \times \partial_z \phi_2(u, z) \sim (\sin(\theta_0), -\cos(\theta_0), 0) = e_\theta$$



As curvas que formam a fronteira da superfície terão vetor tangente paralelos a  $e_r$  ou  $e_z$  Então temos que

$$\oint_{\partial S_\theta} F \cdot d\gamma = [(F_z(u_i, \theta_0, z_0 + \delta) - F_z(u_i, \theta_0, z_0 - \delta))(2\delta)] + [(F_r(r_0 - \delta, \theta_0, z_1) - F_r(r_0 + \delta, \theta_0, z_1))(2\delta)]$$

Como

$$Area(S_\theta) = \int_{r_0 - \delta}^{r_0 + \delta} \int_{z_0 - \delta}^{z_0 + \delta} du \, dz = (2\delta)^2$$

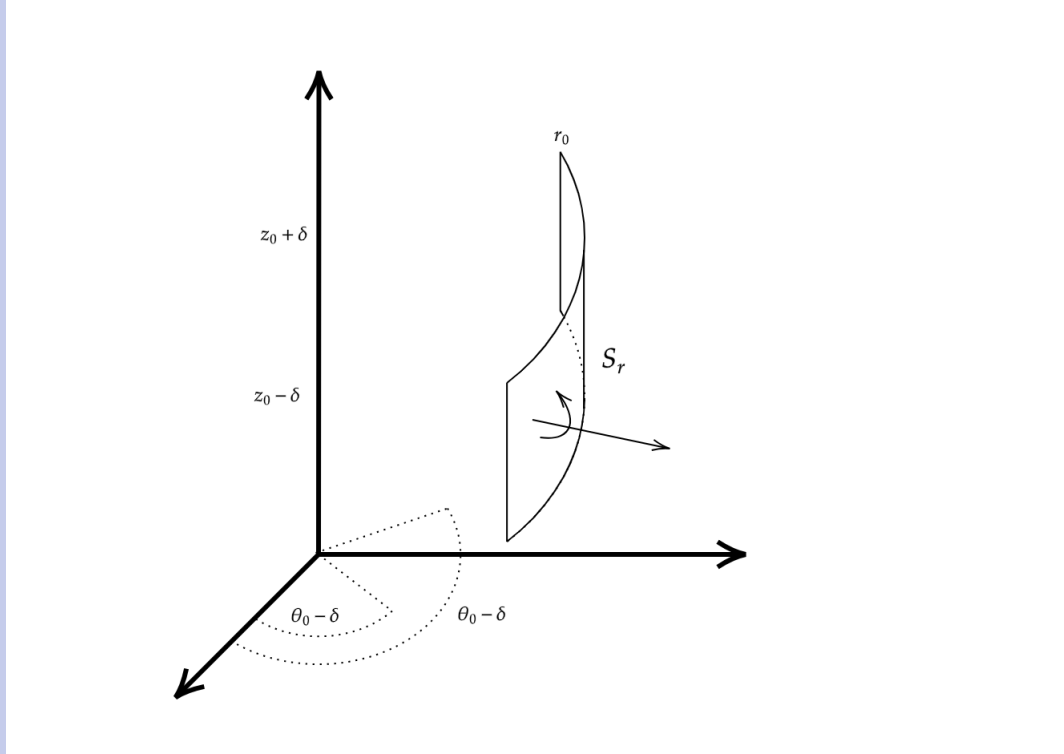
De onde segue que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{Area(S_\theta)} \oint_{\partial S_\theta} F \cdot d\gamma = [\partial_z F_r - \partial_r F_z] (r_0, \theta_0, z_0)$$

– O terceiro tipo é

$$\phi_3(v, z) = (r_0 \cos(v), r_0 \sin(v), z) \quad (v, z) \in [\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta] \times [z_0 - \delta, z_0 + \delta]$$

$$\partial_v \phi_3 \times \partial_z \phi_3(u, z) \sim r_0(\cos(u), \sin(u), 0) = r_0 e_r$$



As curvas que formam a fronteira da superfície terão vetor tangente paralelos a  $e_\theta$  ou  $e_z$ . Então temos que

$$\oint_{\partial S_r} F \cdot d\gamma = [(F_z(r_0, \theta_0 + \delta, z_i) - F_z(r_0, \theta_0 - \delta, z_i))(2\delta)] + [(F_\theta(r_0, v_i, z_0 - \delta) - F_\theta(r_0, v_i, z_0 + \delta))r_0(2\delta)]$$

Como

$$\text{Area}(S_r) = \int_{\theta_0 - \delta}^{\theta_0 + \delta} \int_{z_0 - \delta}^{z_0 + \delta} du dz = r_0(2\delta)^2$$

De onde segue que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\text{Area}(S_r)} \oint_{\partial S_r} F \cdot d\gamma = \left[ \frac{1}{r} \partial_\theta F_z - \partial_z F_\theta \right] (r_0, \theta_0, z_0)$$

Seja  $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um campo vetorial, de classe  $C^1$ , a expressão do rotacional em coordenadas cilíndricas é

$$\text{rot}(F) = \left[ \frac{1}{r} \partial_\theta F_z - \partial_z F_\theta \right] e_r + [\partial_z F_r - \partial_r F_z] e_\theta + \left[ \frac{1}{r} (\partial_r(r F_\theta)) - \frac{1}{r} \partial_\theta F_r \right] e_z$$

## 23.2 Coordenadas Esféricas

Sabemos que o sistema de coordenadas cartesianas e o sistema de coordenadas esféricas estão relacionados por

$$x = r \cos(\theta) \sin(\phi), \quad y = r \sin(\theta) \sin(\phi) \quad \text{e} \quad z = r \cos(\phi)$$

onde

$$r \in (0, +\infty), \quad \theta \in (0, 2\pi) \quad \text{e} \quad \phi \in (0, \pi).$$

Segue então que

$$\partial_r x = \cos(\theta) \sin(\phi) \quad \partial_r y = \sin(\theta) \sin(\phi) \quad \partial_r z = \cos(\phi)$$

$$\partial_\theta x = -r \sin(\theta) \sin(\phi) \quad \partial_\theta y = r \cos(\theta) \sin(\phi) \quad \partial_\theta z = 0.$$

$$\partial_\phi x = r \cos(\theta) \cos(\phi) \quad \partial_\phi y = r \sin(\theta) \cos(\phi) \quad \partial_\phi z = -r \sin(\phi)$$

Vamos construir uma base ortonormal  $\{e_r, e_\theta, e_\phi\}$  adequada às coordenadas cilíndricas. Para isto observamos que se

$$R = (x, y, z) = (r \cos(\theta) \sin(\phi), r \sin(\theta) \sin(\phi), \cos(\phi))$$

então definimos

$$e_r = \frac{1}{\|\partial_r R\|} \partial_r R \Rightarrow e_r = (\cos(\theta) \sin(\phi), \sin(\theta) \sin(\phi), \cos(\phi)) = \cos(\theta) \sin(\phi) e_1 + \sin(\theta) \sin(\phi) e_2 + \cos(\phi) e_3$$

$$e_\theta = \frac{1}{\|\partial_\theta R\|} \partial_\theta R \Rightarrow e_\theta = (-\sin(\theta), \cos(\theta), 0) = -\sin(\theta) e_1 + \cos(\theta) e_2$$

e

$$e_\phi = \frac{1}{\|\partial_\phi R\|} \partial_\phi R \Rightarrow e_\phi = (\cos(\theta) \cos(\phi), \sin(\theta) \cos(\phi), -\sin(\phi)) = \cos(\theta) \cos(\phi) e_1 + \sin(\theta) \cos(\phi) e_2 - \sin(\phi) e_3$$

Com isto temos que as coordenadas  $(a_1, a_2, a_3)$  de um vetor na base  $\{e_1, e_2, e_3\}$  terá, na base  $\{e_r, e_\theta, e_\phi\}$ , coordenadas  $(a_r, a_\theta, a_\phi)$  relacionadas por

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \sin(\phi) & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \cos(\phi) \\ \sin(\theta) \sin(\phi) & \cos(\theta) & \sin(\theta) \cos(\phi) \\ \cos(\phi) & 0 & -\sin(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_r \\ a_\theta \\ a_\phi \end{pmatrix}$$

$$\text{e} \quad \begin{pmatrix} a_r \\ a_\theta \\ a_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \sin(\phi) & \sin(\theta) \sin(\phi) & \cos(\phi) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ \cos(\theta) \cos(\phi) & \sin(\theta) \cos(\phi) & -\sin(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Portanto

$$e_1 = \cos(\theta) \sin(\phi) e_r - \sin(\theta) e_\theta + \cos(\theta) \cos(\phi) e_\phi$$

$$e_2 = \sin(\theta) \sin(\phi) e_r + \cos(\theta) e_\theta + \sin(\theta) \cos(\phi) e_\phi$$

$$e_3 = \cos(\phi) e_r - \sin(\phi) e_\phi.$$

Com isto, temos que se  $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função, então procedendo como no caso de coordenadas cilíndricas temos

$$\begin{aligned} \nabla f &= \partial_x f e_1 + \partial_y f e_2 + \partial_z f e_3 \\ &= (\cos(\theta) \sin(\phi) \partial_x f + \sin(\theta) \sin(\phi) \partial_y f + \cos(\phi) \partial_z f) e_r \\ &\quad + (-\sin(\theta) \partial_x f + \cos(\theta) \partial_y f) e_\theta \\ &\quad + (\cos(\theta) \cos(\phi) \partial_x f + \sin(\theta) \cos(\phi) \partial_y f - \sin(\phi) \partial_z f) e_\phi \\ &= (\partial_r f) e_r + \left( \frac{1}{r \sin(\phi)} \partial_\theta f \right) e_\theta + \left( \frac{1}{r} \partial_\phi f \right) e_\phi \end{aligned}$$

Dada  $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^1$ . O gradiente de  $f$  em coordenadas esféricas é dado pela expressão

$$\nabla f(r, \theta, \phi) = (\partial_r f)(r, \theta, \phi) e_r + \left( \frac{1}{r \sin(\phi)} \partial_\theta f \right) (r, \theta, \phi) e_\theta + \left( \frac{1}{r} \partial_\phi f \right) (r, \theta, \phi) e_\phi$$

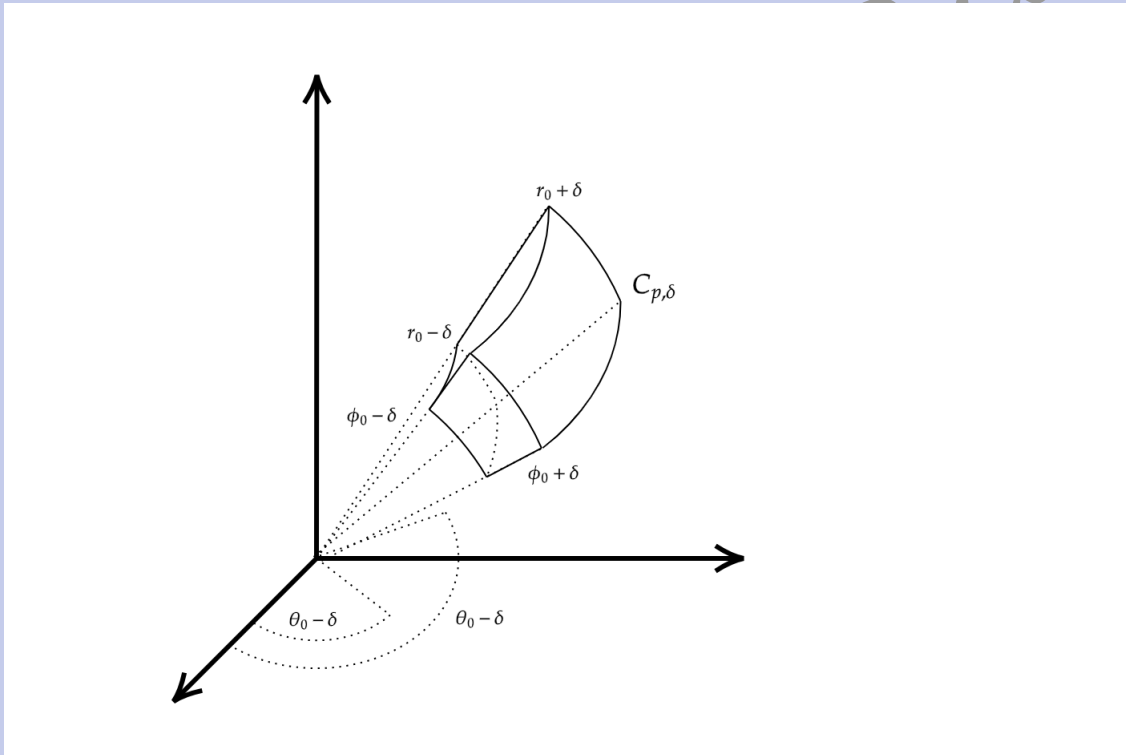
Vamos calcular agora os operadores rotacional e divergente no sistema de coordenadas cilíndricas.

• **Divergente**

Seja  $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um campo vetorial de classe  $C^1$ ,  $p = (r_0, \theta_0, \phi_0) \in U$  um ponto e considere, para  $\delta > 0$  suficientemente pequeno, o cubo de coordenadas esféricas.

$$C_{p,\delta} = \{(r, \theta, \phi), |r_0 - r| \leq \delta, |\theta - \theta_0| \leq \delta, |\phi - \phi_0| \leq \delta\},$$

de modo tal que  $C_{p,\delta} \subset U$ .



Seja  $S_\delta = \partial C_{p,\delta}$ . Vamos calcular

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\text{Vol}(C_{p,\delta})} \iint_{S_\delta} F \cdot d\mathbf{A}.$$

Como  $S_\delta$  é a união das faces do cubo. Observamos que temos, para este caso, três tipos de faces e parametrizações

– O primeiro tipo é

$$\phi_1^\pm(u, v) = (u \cos(v) \sin(\phi_0 \pm \delta), u \sin(v) \sin(\phi_0 \pm \delta), u \cos(\phi_0 \pm \delta)) \quad (u, v) \in [r_0 - \delta, r_0 + \delta] \times [\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta]$$

$$\partial_u \phi_1^\pm \times \partial_v \phi_1^\pm(u, v) \sim u \sin(\phi_0 \pm \delta) e_\phi$$

Então,

$$\begin{aligned} \iint_{S_1^\pm} F \cdot d\mathbf{A} &= \pm \int_{-\delta}^{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} F_\phi(u, v, \phi_0 \pm \delta) u \sin(\phi_0 \pm \delta) du dv \\ &= \pm F_\phi(u_1, v_1, \phi_0 \pm \delta) u_1 \sin(\phi_0 \pm \delta) (2\delta)^2 \end{aligned}$$

para algum

$$(u_1, v_1) \in [r_0 - \delta, r_0 + \delta] \times [\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta]$$

Aqui estamos abusando da notação inferindo que  $(u_1, v_1)$  é o mesmo para o caso da parte + como da parte -. Como vamos fazer  $\delta \rightarrow 0$  isto não faz grande diferença. Com isto, temos que

$$\iint_{S_1^+} F \cdot d\mathbf{A} + \iint_{S_1^-} F \cdot d\mathbf{A} = [F_\phi(u_1, v_1, \phi_0 + \delta)u_1 \sin(\phi_0 + \delta) - F_\phi(u_1, v_1, \phi_0 - \delta)u_1 \sin(\phi_0 - \delta)](2\delta)^2$$

– O segundo tipo é

$$\phi_2^\pm(u, w) = (u \cos(\theta_0 \pm \delta) \sin(w), u \sin(\theta_0 \pm \delta) \sin(w), u \cos(w)) \quad (u, w) \in [r_0 - \delta, r_0 + \delta] \times [\phi_0 - \delta, \phi_0 + \delta]$$

$$\partial_u \phi_2^\pm \times \partial_w \phi_2^\pm(u, w) \sim \pm u e_\theta$$

Então,

$$\begin{aligned} \iint_{S_2^\pm} F \cdot d\mathbf{A} &= \pm \int_{-\delta}^{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} F_\theta(u, \theta_0 \pm \delta, w) du dw \\ &= \pm F_\theta(u_1, \theta_0 \pm \delta, w_1) u_1 (2\delta)^2 \end{aligned}$$

para algum

$$(u_1, w_1) \in [r_0 - \delta, r_0 + \delta] \times [z_0 - \delta, z_0 + \delta]$$

Novamente, aqui estamos abusando da notação inferindo que  $(u_1, w_1)$  é o mesmo para o caso da parte + como da parte -. Como vamos fazer  $\delta \rightarrow 0$  isto não faz grande diferença. Com isto, temos que

$$\iint_{S_2^+} F \cdot d\mathbf{A} + \iint_{S_2^-} F \cdot d\mathbf{A} = [F_\theta(u_1, \theta_0 + \delta, w_1)u_1 - F_\theta(u_1, \theta_0 - \delta, w_1)u_1](2\delta)^2$$

– O terceiro tipo é

$$\phi_3^\pm(v, w) = ((r_0 \pm \delta) \cos(v) \sin(w), (r_0 \pm \delta) \sin(v) \sin(w), (r_0 \pm \delta) \cos(w)) \quad (v, w) \in [\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta] \times [\phi_0 - \delta, \phi_0 + \delta]$$

$$\partial_v \phi_3^\pm \times \partial_w \phi_3^\pm(u, w) \sim (r_0 \pm \delta)(\cos(u) \sin(w), \sin(u) \sin(w), \cos(w)) = (r_0 \pm \delta)^2 \sin(w) e_r$$

Então,

$$\begin{aligned} \iint_{S_3^\pm} F \cdot d\mathbf{A} &= \pm \int_{-\delta}^{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} (r_0 \pm \delta) F_r(r_0 \pm \delta, v, z) dv dz \\ &= \pm F_z(r_0 \pm \delta, v_1, z_1) (r_0 \pm \delta) (2\delta)^2 \end{aligned}$$

para algum

$$(v_1, w_1) \in [\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta] \times [\phi_0 - \delta, \phi_0 + \delta]$$

Novamente, aqui estamos abusando da notação inferindo que  $(v_1, z_1)$  é o mesmo para o caso da parte + como da parte -. Como vamos fazer  $\delta \rightarrow 0$  isto não faz grande diferença. Com isto, temos que

$$\iint_{S_3^+} F \cdot d\mathbf{A} + \iint_{S_3^-} F \cdot d\mathbf{A} = (F_r(r_0 + \delta, v_1, w_1)(r_0 + \delta)^2 \sin(w_1) - F_r(r_0 - \delta, v_1, w_1)(r_0 - \delta)^2 \sin(w_1))(2\delta)^2$$

Como

$$Vol(C_{p,\delta}) = \int_{\phi_0 - \delta}^{\phi_0 + \delta} \int_{\theta_0 - \delta}^{\theta_0 + \delta} \int_{r_0 - \delta}^{r_0 + \delta} u^2 \sin(w) du dv dw$$

$$(2\delta)^2 r_0^2 + (2\delta)^4 (\cos(\phi_0 - \delta) - \cos(\phi_0 + \delta)) \simeq (2\delta)^3 r_0^2 \sin(\phi_0)$$

Com isto, temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{Vol}(C_{p,\delta})} \iint_{S_\delta} F \cdot d\mathbf{A} &= \frac{1}{(2\delta)^3 r_0} \iint_{S_\delta} F \cdot d\mathbf{A} \\ &= \frac{F_\phi(u_1, v_1, \phi_0 + \delta) u_1 \sin(\phi_0 + \delta) - F_\phi(u_1, v_1, \phi_0 - \delta) u_1 \sin(\phi_0 - \delta)}{2\delta r_0^2 \sin(\phi_0)} \\ &\quad + \frac{F_\theta(u_1, \theta_0 + \delta, w_1) u_1 - F_\theta(u_1, \theta_0 - \delta, w_1) u_1}{(2\delta) r_0^2 \sin(\phi_0)} \\ &\quad + \frac{F_r(r_0 + \delta, v_1, w_1) (r_0 + \delta)^2 \sin(w_1) - F_r(r_0 - \delta, v_1, w_1) (r_0 - \delta)^2 \sin(w_1)}{(2\delta) r_0^2 \sin(\phi_0)} \end{aligned}$$

Agora, fazendo  $\delta \rightarrow 0$  e utilizando que  $(u_i, v_i) \rightarrow (r_0, \theta_0)$  temos que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\text{Vol}(C_{p,\delta})} \iint_{S_\delta} F \cdot d\mathbf{A} = \left( \frac{1}{r^2} \partial_r(r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin(\phi)} \partial_\theta F_\theta + \frac{1}{r \sin(\phi)} \partial_\phi(\sin(\phi) F_\phi) \right) (r_0, \theta_0, \phi_0).$$

Seja  $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um campo vetorial de classe  $C^1$ , a expressão do divergente em coordenadas esféricas é dado por

$$\text{div}(F)(r, \theta, \phi) = \left( \frac{1}{r^2} \partial_r(r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin(\phi)} \partial_\theta F_\theta + \frac{1}{r \sin(\phi)} \partial_\phi(\sin(\phi) F_\phi) \right) (r, \theta, \phi)$$

e, utilizando a expressão do gradiente, temos que a do Laplaciano de uma função  $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^2$ , em coordenadas cilíndricas é

$$\Delta f(r, \theta, z) = \left( \frac{1}{r^2} \partial_r(r^2 \partial_r f) + \frac{1}{(r \sin(\phi))^2} \partial_\theta^2 f + \frac{1}{r^2 \sin(\phi)} \partial_\phi(\sin(\phi) \partial_\phi f) \right) (r, \theta, z)$$

#### • Rotacional

Seja  $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um campo vetorial de classe  $C^1$ ,  $p = (r_0, \theta_0, \phi_0) \in U$  um ponto e considere  $\delta > 0$ . Neste caso vamos a considerar três superfícies parametrizadas que, basicamente, são aquelas que vimos para o caso do divergente.

Para não carregar a notação e como as curvas tem comprimento infinitesimal vamos aproximar para o caso em que  $\gamma \in (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_C F \cdot d\gamma \simeq F(\gamma(\tilde{t})) \cdot \gamma'(\tilde{t})(b-a) \quad \text{para algum } \tilde{t} \in (a, b),$$

em cada caso particular.

– O primeiro tipo é a superfície  $S_\phi$

$$\phi_1(u, v) = (u \cos(v) \sin(\phi_0), u \sin(v) \sin(\phi_0), \cos(\phi_0)) \quad (u, v) \in [r_0 - \delta, r_0 + \delta] \times [\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta]$$

onde

$$\partial_u \phi_1 \times \partial_v \phi_1(u, v) \sim (0, 0, u) = u \sin(\phi_0) e_\phi$$

As curvas que formam a fronteira da superfície terão vetor tangente paralelos a  $e_r$  ou  $e_\theta$  Então temos que

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S_z} F \cdot d\gamma &= [F_r(u_i, \theta_0 + \delta, \phi_0) - F_r(u_i, \theta_0 - \delta, \phi_0)] u_i (2\delta) \\ &\quad + [F_\theta(r_0 - \delta, v_i, \phi_0) (r_0 - \delta) - F_\theta(r_0 + \delta, v_i, \phi_0) (r_0 - \delta)] \sin(\phi_0) (2\delta) \end{aligned}$$

Como

$$\text{Area}(S_z) = \int_{r_0 - \delta}^{r_0 + \delta} \int_{\theta_0 - \delta}^{\theta_0 + \delta} u \, du \, dv = r_0^2 \sin(\phi_0) (2\delta)^2$$

De onde segue que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{Area(S_z)} \oint_{\partial S_z} F \cdot d\gamma = \left[ \frac{1}{r \sin(\phi)} \partial_\theta F_r - \frac{1}{r} (\partial_r(r F_\theta)) \right] (r_0, \theta_0, \phi_0)$$

– O segundo tipo é

$$\phi_2(u, \phi) = (u \cos(\theta_0) \sin(w), u \sin(\theta_0) \sin(w), u \cos(w)) \quad (u, w) \in [r_0 - \delta, r_0 + \delta] \times [\phi_0 - \delta, \phi_0 + \delta]$$

$$\partial_u \phi_2 \times \partial_w \phi_2(u, w) \sim (\sin(\theta_0), -\cos(\theta_0), 0) = u e_\theta$$

As curvas que formam a fronteira da superfície terão vetor tangente paralelos a  $e_r$  ou  $e_\phi$ . Então temos que

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S_\theta} F \cdot d\gamma &= [(F_r(u_i, \theta_0, \phi_0 - \delta) - F_r(u_i, \theta_0, \phi_0 + \delta))(2\delta)] \\ &\quad + [(F_\phi(r_0 + \delta, \theta_0, w_1)(r_0 + \delta) - F_\phi(r_0 - \delta, \theta_0, w_1)(r_0 - \delta))(2\delta)] \end{aligned}$$

Como

$$Area(S_\theta) = \int_{r_0 - \delta}^{r_0 + \delta} \int_{\phi_0 - \delta}^{\phi_0 + \delta} u \, du \, dw = r_0 (2\delta)^2$$

De onde segue que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{Area(S_\theta)} \oint_{\partial S_\theta} F \cdot d\gamma = \left[ \frac{1}{r} \partial_r(r F_\phi) - \frac{1}{r} \partial_\phi F_r \right] (r_0, \theta_0, \phi_0)$$

– O terceiro tipo é

$$\phi_3(v, w) = (r_0 \cos(v) \sin(w), r_0 \sin(v) \sin(w), r_0 \cos(w)) \quad (v, w) \in [\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta] \times [\phi_0 - \delta, \phi_0 + \delta]$$

$$\partial_v \phi_3 \times \partial_w \phi_3(u, w) \sim r_0^2 \sin(w) e_r$$

As curvas que formam a fronteira da superfície terão vetor tangente paralelos a  $e_\theta$  ou  $e_\phi$ . Então temos que

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S_r} F \cdot d\gamma &= [(F_\phi(r_0, \theta_0 - \delta, w_i) - F_\phi(r_0, \theta_0 + \delta, w_i)) r_0 (2\delta)] \\ &\quad + [(F_\theta(r_0, v_i, \phi_0 + \delta) \sin(\phi_0 + \delta) - F_\theta(r_0, v_i, \phi_0 - \delta) \sin(\phi_0 - \delta)) r_0 (2\delta)] \end{aligned}$$

Como

$$Area(S_r) = \int_{\theta_0 - \delta}^{\theta_0 + \delta} \int_{\phi_0 - \delta}^{\phi_0 + \delta} r_0^2 \sin(w) \, du \, dw = r_0^2 (2\delta) (\cos(\phi_0 - \delta) - \cos(\phi_0 + \delta)) \simeq r_0^2 \sin(\phi_0) (2\delta)^2$$

De onde segue que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{Area(S_r)} \oint_{\partial S_r} F \cdot d\gamma = \left[ \frac{1}{r \sin(\phi)} \partial_\phi(\sin(\phi) F_\theta) - \frac{1}{r \sin(\phi)} \partial_\theta F_\phi \right] (r_0, \theta_0, \phi_0)$$

Seja  $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um campo vetorial, de classe  $C^1$ , a expressão do rotacional em coordenadas esféricas é

$$\mathbf{rot}(F) = \frac{1}{r \sin(\phi)} [\partial_\phi(\sin(\phi) F_\theta) - \partial_\theta F_\phi] e_r + \frac{1}{r} [\partial_r(r F_\phi) - \partial_\phi F_r] e_\theta + \left[ \frac{1}{r \sin(\phi)} \partial_\theta F_r - \frac{1}{r} (\partial_r(r F_\theta)) \right] e_\phi$$

Em elaboração

## 24. Teorema de Green

Considere um campo vetorial  $F : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definido por  $F(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$  e seja  $U \subset V$  uma região delimitada por uma curva fechada  $C$  e parametrizada por  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Queremos estudar o comportamento de  $F$  em termos dos operadores rotacional e divergente.

Para isto, primeiramente identificamos

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = 0\}$$

e estendendo o campo vetorial  $F$  a um campo vetorial  $\tilde{F} : \tilde{V} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  em que  $\tilde{V} = V \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ , para algum  $\varepsilon > 0$ , e

$$\tilde{F}(x, y, z) = (f_1(x, y), f_2(x, y), 0)$$

Então, temos que

$$\mathbf{div}(\tilde{F})(x, y, z) = (\partial_x f_1 + \partial_y f_2)(x, y)$$

e

$$\mathbf{rot}(\tilde{F})(x, y, z) = (0, 0, (\partial_x f_2 - \partial_y f_1)(x, y))$$

Então, para ter uma informação sobre o comportamento de  $F$  temos que calcular integrais da forma

$$\iint_U \mathbf{div}(\tilde{F})(x, y, z) \, d\mathbf{A} = \int_U (\partial_x f_1 + \partial_y f_2) \, d\mathbf{A}$$

ou

$$\iint_U \mathbf{rot}(\tilde{F})(x, y, z) \cdot d\mathbf{A} = \int_U (\partial_x f_2 - \partial_y f_1) \, d\mathbf{A}$$

Se definirmos  $G(x, y) = (-f_2(x, y), f_1(x, y))$  temos que,

$$\int_U \mathbf{div}(\tilde{F}) \, d\mathbf{A} = \iint_U \mathbf{rot}(\tilde{G}) \cdot d\mathbf{A}$$

e

$$\int_U \mathbf{rot}(\tilde{F}) \cdot d\mathbf{A} = \iiint_U \mathbf{div}(\tilde{G}) d\mathbf{A}.$$

e, portanto, na verdade, precisamos entender como calcular integrais da forma

$$\int_U (\partial_x f_2 - \partial_y f_1) d\mathbf{A}.$$

Assim, vamos nos concentrar em calcular uma só destas integrais. É nesse contexto que aparece o teorema de Green. O teorema de Green é um resultado que relaciona a integral de linha de um campo vetorial ao longo de uma curva fechada e simples  $\gamma$  com a integral dupla de uma função, obtida a partir das funções que definem o campo vetorial, na região  $U$  que é delimitada por  $\gamma$ .

**Definição 24.1** Seja  $U$  uma região que pode ser particionada numa união finita de regiões de tipo I e tipo II. Assuma que  $\partial U$  é parametrizada por uma curva diferenciável por partes e fechada  $\gamma$ . Dizemos que  $\partial U$  tem **orientação positiva respeito de  $\gamma$**  se ao percorrermos a curva  $\gamma$  no sentido da parametrização temos que  $U$  fica a esquerda.

■ **Exemplo 24.1** • Considere o disco

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 4\}$$

sua fronteira é

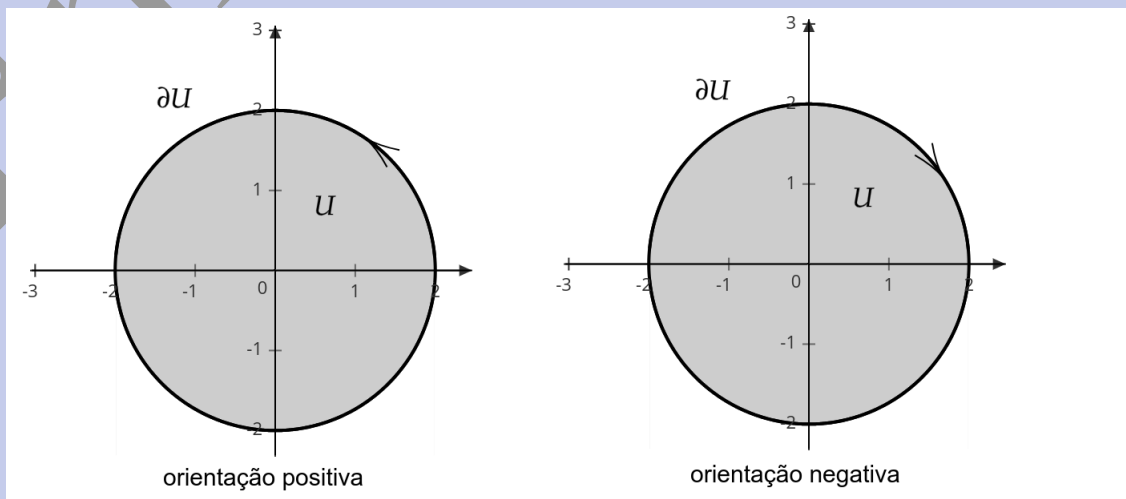
$$\partial U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 4\}$$

Uma parametrização positiva da fronteira é

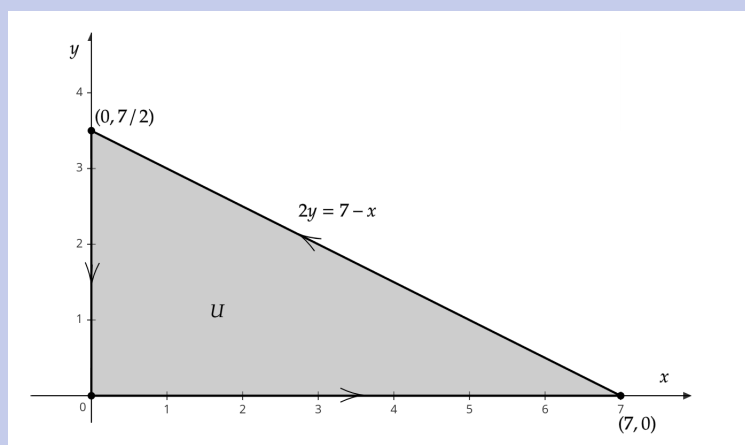
$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)) \quad t \in [0, 2\pi],$$

e uma parametrização negativa da fronteira é

$$\gamma(t) = (\cos(t), -\sin(t)) \quad t \in [0, 2\pi]$$



• Considere o triângulo abaixo.



Uma parametrização positiva da fronteira é, por exemplo, a seguinte

$$\gamma(t) = \begin{cases} (7t, 0) & \text{se } t \in [0, 1] \\ (7(2-t), (7t-7)/2) & \text{se } t \in [1, 2] \\ (0, (21-7t)/2) & \text{se } t \in [2, 3] \end{cases}$$

■

**Teorema 24.1** Seja  $U$  uma região que pode ser particionada numa união finita de regiões de tipo I e tipo II e  $\gamma$  uma curva fechada, simples, diferenciável por partes que parametriza  $\partial U$ . Assuma que  $\partial U$  tem orientação positiva respeito de  $\gamma$ . Se  $F : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $U \subset V$ , é um campo vetorial definido por  $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$  e de classe  $C^1$  então

$$\iint_U (\partial_x Q - \partial_y P) \, d\mathbf{A} := \oint_{\partial U} F \cdot d\gamma.$$

**Obs.** Em alguns textos o teorema de Green aparece como segue

$$\iint_U (\partial_x Q - \partial_y P) \, d\mathbf{A} = \oint P \, dx + Q \, dy$$

De fato, se  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$  então

$$dx = \gamma_1'(t) \, dt \quad dy = \gamma_2'(t) \, dt$$

e

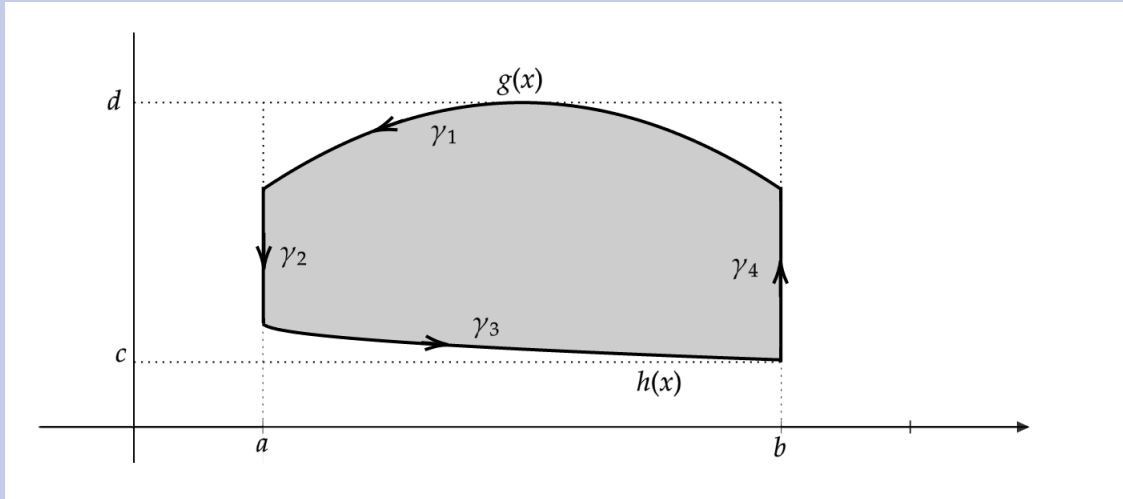
$$\oint P \, dx + Q \, dy = \oint [P(\gamma(t))\gamma_1'(t) + Q(\gamma(t))\gamma_2'(t)] \, dt = \oint (P, Q) \, d\gamma.$$

**Demonstração.** Mostramos o resultado para regiões de Tipo I, o resultado para regiões de Tipo II se mostra de forma similar. Como toda região geral pode ser particionada como união de regiões de tipo I e II temos o resultado.

Assuma que  $U \subset R = [a, b] \times [c, d]$  é um conjunto da forma

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, a \leq x \leq b, h(x) \leq y \leq g(x)\}$$

para  $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínuas tais que  $h(x) \leq g(x)$  para todo  $x \in [a, b]$ .



Sejam  $P, Q : R \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções diferenciáveis. Vamos calcular a integral na região acima de

$$\begin{aligned} \iint_U \partial_y P \, d\mathbf{A} &= \int_a^b \int_{h(x)}^{g(x)} \partial_y P(x, y) \, dy dx \\ &= \int_a^b [P(x, g(x)) - P(x, h(x))] \, dx \end{aligned}$$

Por outro lado, seja  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$  a curva que descreve  $\partial U$ , neste caso

$$\gamma_1(t) = (b-t(b-a), g(b-t(b-a))), \quad \gamma_2(t) = (a, t), \quad \gamma_3(t) = (a-t(a-b), h(a-t(a-b))), \quad \gamma_4(t) = (b, t),$$

temos que

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} (P, 0) \cdot d\gamma &= \oint_{\gamma_1} (0, P) \cdot d\gamma_1 + \int_{\gamma_2} (0, P) \cdot d\gamma_2 + \int_{\gamma_3} (0, P) \cdot d\gamma_3 + \int_{\gamma_4} (0, P) \cdot d\gamma_4 \\ &= \int_0^1 P(b-t(b-a), g(b-t(b-a))) \cdot (-(b-a)) \, dt + \int_{\gamma_2} P(a, t) \cdot 0 \, dt \\ &\quad + \int_0^1 P(a-t(a-b), h(a-t(a-b))) \cdot (-(a-b)) \, dt + \int_{\gamma_4} P(b, t) \cdot (0) \, dt \\ &= \int_b^a P(s, g(s)) \, ds + \int_a^b P(s, h(s)) \, ds \\ &= - \int_a^b [P(s, g(s)) - P(s, h(s))] \, ds. \end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$\iint_U \partial_y P \, d\mathbf{A} = - \oint_{\partial U} (P, 0) \cdot d\gamma.$$

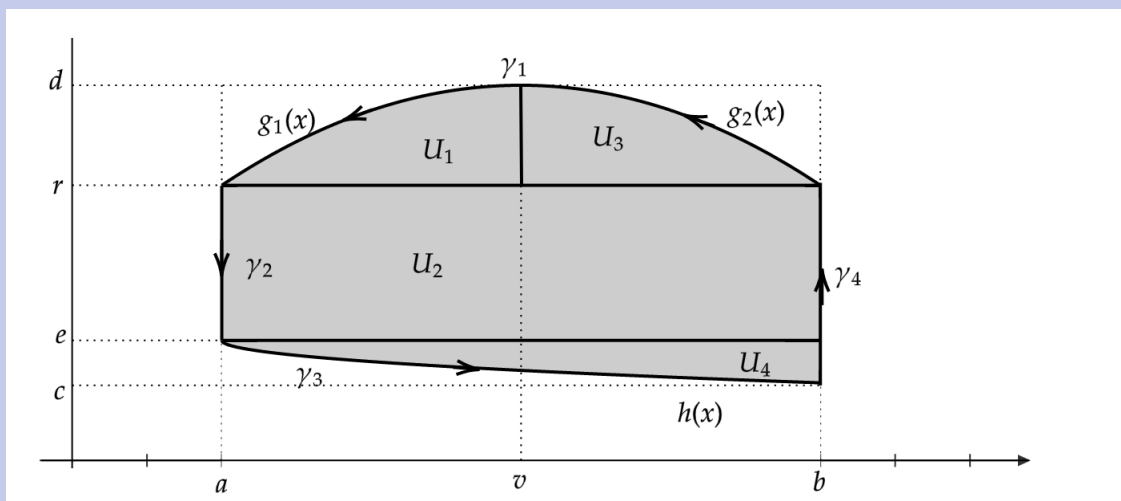
Agora, vamos calcular

$$\iint_U \partial_x Q \, d\mathbf{A}.$$

e

$$\oint_{\partial U} (0, Q) \cdot d\gamma$$

Para isso, particionamos a região como segue:



$$\iint_U \partial_x Q \, d\mathbf{A} = \iint_{U_1} \partial_x Q \, d\mathbf{A} + \iint_{U_2} \partial_x Q \, d\mathbf{A} + \iint_{U_3} \partial_x Q \, d\mathbf{A} + \iint_{U_4} \partial_x Q \, d\mathbf{A}$$

Calculamos cada parte

$$\begin{aligned} \iint_{U_1} \partial_x Q \, d\mathbf{A} &= \int_r^d \int_{g_1^{-1}(y)}^v \partial_x Q(x, y) \, dx dy \\ &= \int_r^d [Q(v, y) - Q(g_1^{-1}(y), y)] \, dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_{U_2} \partial_x Q \, d\mathbf{A} &= \int_e^r \int_a^b \partial_x Q(x, y) \, dx dy \\ &= \int_e^r [Q(b, y) - Q(a, y)] \, dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_{U_3} \partial_x Q \, d\mathbf{A} &= \int_r^d \int_v^{g_2^{-1}(y)} \partial_x Q(x, y) \, dx dy \\ &= \int_r^d [Q(g_2^{-1}(y), y) - Q(v, y)] \, dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_{U_4} \partial_x Q \, d\mathbf{A} &= \int_c^e \int_{h^{-1}(y)}^b \partial_x Q(x, y) \, dx dy \\ &= \int_c^e [Q(b, y) - Q(h^{-1}(y), y)] \, dy \end{aligned}$$

seja  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$  a curva que descreve  $\partial U$ , neste caso

$$\gamma_1(t) = (b - t(b - a), g(b - t(b - a))), \quad \gamma_2(t) = (a, t), \quad \gamma_3(t) = (a - t(a - b), h(a - t(a - b))), \quad \gamma_4(t) = (b, t),$$

temos que

$$\begin{aligned}
 \oint_{\gamma} (0, Q) \cdot d\gamma &= \oint_{\gamma_1} (0, Q) \cdot d\gamma_1 + \int_{\gamma_2} (0, Q) \cdot d\gamma_2 + \int_{\gamma_3} (0, Q) \cdot d\gamma_3 + \int_{\gamma_4} (0, Q) \cdot d\gamma_4 \\
 &= \int_0^1 Q(b-t(b-a), g(b-t(b-a))) \cdot (g'(b-t(b-a)) \cdot (-(b-a))) dt + \int_0^1 Q(a, t) \cdot (-1) dt \\
 &\quad + \int_0^1 Q(a-t(a-b), h(a-t(a-b))) \cdot (h'(a-t(a-b)) \cdot (-(a-b))) dt + \int_0^1 Q(b, t) \cdot (1) dt \\
 &= \int_b^a Q(s, g(s)) g'(s) ds - \int_e^r Q(a, s) ds + \int_a^b Q(s, h(s)) h'(s) ds + \int_c^r Q(b, s) ds \\
 &= \int_v^a Q(s, g_1(s)) g'_1(s) ds + \int_b^v Q(s, g_2(s)) g'_2(s) ds \\
 &\quad - \int_e^r Q(a, s) ds + \int_a^b Q(s, h(s)) h'(s) ds + \int_c^r Q(b, s) ds \\
 &= - \int_r^d Q(g_1^{-1}(y), y) dy + \int_r^d Q(g_2^{-1}(y), y) dy \\
 &\quad - \int_e^r Q(a, s) ds - \int_c^e Q(h^{-1}(y), y) dy + \int_c^r Q(b, s) ds.
 \end{aligned}$$

Onde temos feito as substituições

$$y = g_1(s) \quad y = g_2(s) \quad \text{e} \quad y = h(s).$$

$$\iint_U \partial_x Q \, d\mathbf{A} = \oint_{\partial U} \gamma(0, Q) \cdot d\gamma.$$

Juntando os dois resultados temos que

$$\oint_{\partial U} (P, Q) \cdot d\gamma = \iint_U (\partial_x Q - \partial_y P) \, d\mathbf{A}$$

■

**Obs.** Seja  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma parametrização de uma curva  $C$  orientada no sentido horário e  $F: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $C \subset U$ , é um campo vetorial definido por  $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ . Se queremos utilizar o teorema de Green para calcular

$$\int_C F \cdot d\gamma$$

pois  $C$  é a fronteira de uma região  $R \subset U$  do plano então devemos lembrar que para uma parametrização  $\tilde{\gamma}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  da curva  $C$  orientada no sentido antihorário temos

$$\oint_C F \cdot d\gamma = - \oint_C F \cdot d\tilde{\gamma}$$

Então, se aplicamos o teorema de Green neste último caso temos

$$\oint_C F \cdot d\tilde{\gamma} = \iint_R (\partial_x Q - \partial_y P) \, d\mathbf{A},$$

portanto,

$$\int_C F \cdot d\gamma = - \iint_R (\partial_x Q - \partial_y P) \, d\mathbf{A}.$$

**Corolário 24.1** Seja  $R$  uma região do plano delimitada por uma curva fechada  $C$ . Seja  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma parametrização de  $C$  orientada no sentido antihorário. Então, se  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é o campo vetorial definido por  $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ . Identificando  $R$  com uma superfície de  $\mathbb{R}^3$  sobre o plano  $z = 0$  e com vetor normal  $\eta = (0, 0, 1)$  e estendendo  $F$  para um campo vetorial  $\tilde{F}$  em  $\mathbb{R}^3$  (como visto anteriormente) temos

$$\iint_R \mathbf{rot}(\tilde{F}) \cdot d\mathbf{A} = \iint_R (\partial_x Q - \partial_y P) d\mathbf{A} = \int_{\partial R} F \cdot d\gamma.$$

$$\iint_R \mathbf{div}(\tilde{F}) d\mathbf{A} = \int_{\partial R} (F \cdot n) d\gamma$$

onde

$$n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad n(t) = \left( \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \gamma'(t) \right) \times (0, 0, 1)$$

é a função que, para cada  $t \in [a, b]$  atribui o vetor normal a  $\gamma(t)$  que aponta para fora de  $U$ .

*Demonstração.* Somente provamos a última parte pois a primeira segue direto do teorema de Green.

Assuma que  $\gamma(t) = (u(t), v(t))$  então

$$n(t) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} (v'(t), -u'(t)) \Rightarrow F(\gamma(t)) \cdot n(t) = P(\gamma(t))v'(t) - Q(\gamma(t))u'(t)$$

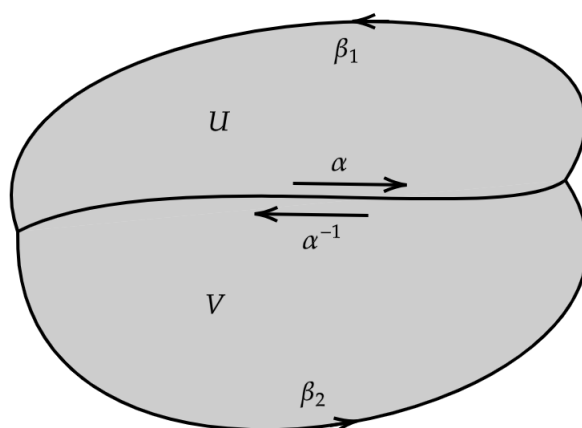
Então,

$$\begin{aligned} \int_{\partial U} (F \cdot n) d\gamma &= \int_a^b (P(\gamma(t))v'(t) - Q(\gamma(t))u'(t)) dt \\ &= \int_{\partial U} (-Q, P) \cdot d\gamma \\ &= \iint_U (\partial_x P + \partial_y Q) d\mathbf{A} \\ &= \iint_U \mathbf{div}(\tilde{F}) d\mathbf{A} \end{aligned}$$

■

**Obs.**

Sejam  $U, V$  duas regiões tais que  $\partial U \cap \partial V$  é uma curva, que pode ser parametrizada por uma curva  $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Assuma que  $\partial U$  pode ser parametrizada como  $\alpha \cup \beta_1$  com a orientação positiva e que  $\partial V$  é parametrizada por  $\beta_2 \cup \alpha^{-1}$  com a orientação positiva. Observamos que a fronteira de  $U \cup V$  é dada por  $\gamma = \beta_1 \cup \beta_2$  com a orientação positiva.



Seja  $F = (P, Q)$  então

$$\iint_U (\partial_x Q - \partial_y P) d\mathbf{A} = \oint_{\partial U} F \cdot d\gamma = \oint F \cdot d\alpha + \oint F \cdot d\beta_1$$

$$\iint_V (\partial_x Q - \partial_y P) d\mathbf{A} = \oint_{\partial V} F \cdot d\gamma = \oint F \cdot d\alpha^{-1} + \oint F \cdot d\beta_2$$

Observamos que

$$\begin{aligned} \iint_{U \cup V} (\partial_x Q - \partial_y P) d\mathbf{A} &= \iint_U (\partial_x Q - \partial_y P) d\mathbf{A} + \iint_V (\partial_x Q - \partial_y P) d\mathbf{A} \\ &= \oint_{\partial U} F \cdot d\gamma = \oint F \cdot d\alpha + \oint F \cdot d\beta_1 \\ &\quad + \oint_{\partial V} F \cdot d\gamma = \oint F \cdot d\alpha^{-1} + \oint F \cdot d\beta_2 \\ &= \oint F \cdot d\beta_1 + \oint F \cdot d\beta_2 = \oint_{\partial(U \cup V)} F \cdot d\gamma. \end{aligned}$$

**Corolário 24.2** Seja  $R$  uma região do plano delimitada por uma curva fechada  $C$ . Seja  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma parametrização de  $C$  orientada no sentido antihorário. Então, se  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é o campo vetorial definido por  $F(x, y) = (-y, x)$ , temos

$$Area(R) = \frac{1}{2} \int_C F \cdot d\gamma.$$

*Demonstração.* Do teorema de Green, temos que

$$\int_C F \cdot d\gamma = \int_R (\partial_x x - \partial_y(-y)) d\mathbf{A} = 2 \iint_R d\mathbf{A} = 2 Area(R). \quad \blacksquare$$

**Corolário 24.3** Seja  $F: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definido por

$$F(x, y) = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

Então, para todo caminho fechado  $C$  simples que circunde a origem (porem, que não passe por ela) temos que  $\oint_C F \cdot \gamma = 2\pi$ .

*Demonstração.* Como  $C$  não passa pela origem temos que existe um círculo  $C_a$  de raio  $a$  (para  $a$  suficientemente pequeno) tal que  $C_a \cap C = \emptyset$ . Seja  $D$  a região delimitada por  $C$  e  $C_a$ . Então, como

$$P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \Rightarrow \quad \partial_x Q - \partial_y P = 0$$

temos que

$$\iint_D (\partial_x Q - \partial_y P) d\mathbf{A} = 0$$

De onde segue que

$$\oint_C F \cdot d\gamma - \oint_{C_a} F \cdot d\gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad \iint_D (\partial_x Q - \partial_y P) d\mathbf{A}.$$

Como

$$\oint_{C_a} F \cdot d\gamma = \int_0^{2\pi} \left( -\frac{\sin(\theta)}{a}, \frac{\cos(\theta)}{a} \right) \cdot (-a \sin(\theta), a \cos(\theta)) d\theta = 2\pi.$$

De onde segue o resultado. ■

■ **Exemplo 24.2** Vamos ver alguns exemplos de como aplicar os resultados acima.

- Vamos calcular a integral de linha

$$\oint_C F \cdot d\gamma$$

em que  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é o campo vetorial dado por  $\vec{F} = (-y, x)$  ao longo da circunferência  $C$  de raio 1 centrada na origem, orientada positivamente no sentido antihorário.

Observamos que:

$$P = -y, \quad Q = x \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - (-1) = 2.$$

A área do disco de raio 1 é  $\pi$ , então:

$$\oint_C -y dx + x dy = \iint_D 2 dx dy = 2 \text{Area}(D) = 2\pi.$$

- Vamos calcular a integral de linha

$$\oint_C F \cdot d\gamma$$

em que  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dado por  $F(x, y) = (-y, x)$  e onde  $C$  é a elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , orientada no sentido antihorário.

Observamos que:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - (-1) = 2 \Rightarrow \text{Área da elipse} = \pi ab,$$

$$\oint_C -y dx + x dy = 2\pi ab.$$

- Vamos calcular a integral de linha

$$\oint_C F \cdot d\gamma$$

em que  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dado por  $F(x, y) = (x, y)$  e  $C$  é a borda do quadrado de vértices  $(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)$ , orientado no sentido antihorário.

Observamos que:

$$P = x, \quad Q = y \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 - 0 = 0 \Rightarrow \oint_C x dx + y dy = 0.$$

- Vamos calcular a integral de linha

$$\oint_C F \cdot d\gamma$$

em que  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dado por  $F(x, y) = (x^4, xy)$  e  $C$  é a borda do triângulo de vértices  $(0, 0), (1, 0)$  e  $(0, 1)$ .

Observamos que:

$$P = x^4, \quad Q = xy \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y - 0 = y$$

$$\Rightarrow \oint_C F \cdot d\gamma = \int_0^1 \int_0^{1-x} dy dx = \frac{1}{6}.$$

- Vamos calcular a integral de linha

$$\oint_C F \cdot d\gamma$$

em que  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dado por  $F(x, y) = (3y - e^{\sin(x)}, 7x + \sqrt{y^4 + 1})$  e  $C$  é o círculo  $x^2 + y^2 = 9$ .  
Observamos que:

$$P = 3y - e^{\sin(x)}, Q = 7x + \sqrt{y^4 + 1} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 7 - 3 = 4$$

$$\Rightarrow \oint_C F \cdot d\gamma = \iint_R 4 \, dA = 36\pi.$$

- Vamos calcular a integral de linha

$$\oint_C F \cdot d\gamma$$

em que  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dado por  $F(x, y) = (y^2, 3xy)$  e  $C$  é a fronteira da região semianular  $D$  contida no semiplano superior entre os círculos  $x^2 + y^2 = 1$  e  $x^2 + y^2 = 4$ .  
Observamos que:

$$P = y^2, Q = 3xy \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 3y - 2y = y$$

$$\Rightarrow \oint_C F \cdot d\gamma = \iint_R y \, dA = \int_1^2 \int_0^\pi r^2 \sin(\theta) \, d\theta \, dr = \frac{14}{3}.$$

- Vamos calcular a integral de linha

$$\oint_C F \cdot d\gamma$$

em que  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dado por  $F(x, y) = (y^2, x^2)$  e  $C$  é a borda do quadrado de lado 2 centrado na origem.  
Observamos que:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 2y,$$

$$\oint_C F \cdot d\gamma = \iint_R (2x - 2y) \, dx \, dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (2x - 2y) \, dx \, dy = 0.$$

- Vamos calcular a área da região delimitada pela curva  $C$  dada por  $x(t) = \cos t$ ,  $y(t) = \sin t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .  
Usando o Teorema de Green para área:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \oint_C x \, dy - y \, dx.$$

Calculando:

$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)) \quad t \in [0, 2\pi].$$

com isto,

$$\oint_C F \cdot d\gamma = \int_0^{2\pi} (\cos^2(t) + \sin^2(t)) \, dt = 2\pi \Rightarrow \text{Área}(R) = \frac{1}{2} 2\pi = \pi.$$

- Vamos calcular a integral de linha

$$\oint_C F \cdot d\gamma$$

em que  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dado por  $F(x, y) = (e^{x^2}, x_+^2 \cos(y))$  e  $C$  é o triângulo de vértices  $(0, 0), (1, 0), (1, 1)$ . Observamos que

$$P = 0, Q = x^2 \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x \Rightarrow \oint_C F \cdot d\gamma = \iint_T 2x dx dy.$$

A integral sobre o triângulo:

$$\int_0^1 \int_0^x 2x dy dx = \int_0^1 2x \cdot x dx = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3}.$$

- Vamos calcular a integral de linha

$$\oint_C F \cdot d\gamma$$

em que  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dado por  $F(x, y) = (xy, x^2)$  e  $C$  é a circunferência  $x^2 + y^2 = 1$ . Observamos que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2x - x = x,$$

$$\oint_C F \cdot d\gamma = \iint_D x dx dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 \cos(\theta) d\theta dr = 0.$$

- Vamos calcular a integral de linha

$$\oint_C F \cdot d\gamma$$

em que  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dado por  $F(x, y) = (y, -x)$  e  $C$  é a borda do quadrado de lado 2 centrado na origem. Observamos que

$$P = y, Q = -x \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -1 - 1 = -2.$$

$$\text{Área do quadrado} = 4 \Rightarrow \oint_C y dx - x dy = -2 \cdot 4 = -8.$$

- Vamos calcular a integral de linha

$$\oint_C F \cdot d\gamma$$

em que  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dado por  $F(x, y) = (x + y, x - y)$  e  $C$  é o quadrado de vértices  $(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)$ . Observamos que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - 1 = 0 \Rightarrow \oint_C F \cdot d\gamma = 0.$$

- Vamos calcular a integral de linha

$$\oint_C F \cdot d\gamma$$

em que  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dado por

$$F(x, y) = (y + e^{2x+1}, 2x^2 + y \ln(1 + y^2)) \Rightarrow P(x, y) = y + e^{2x+1}, Q(x, y) = 2x^2 + y \ln(1 + y^2),$$

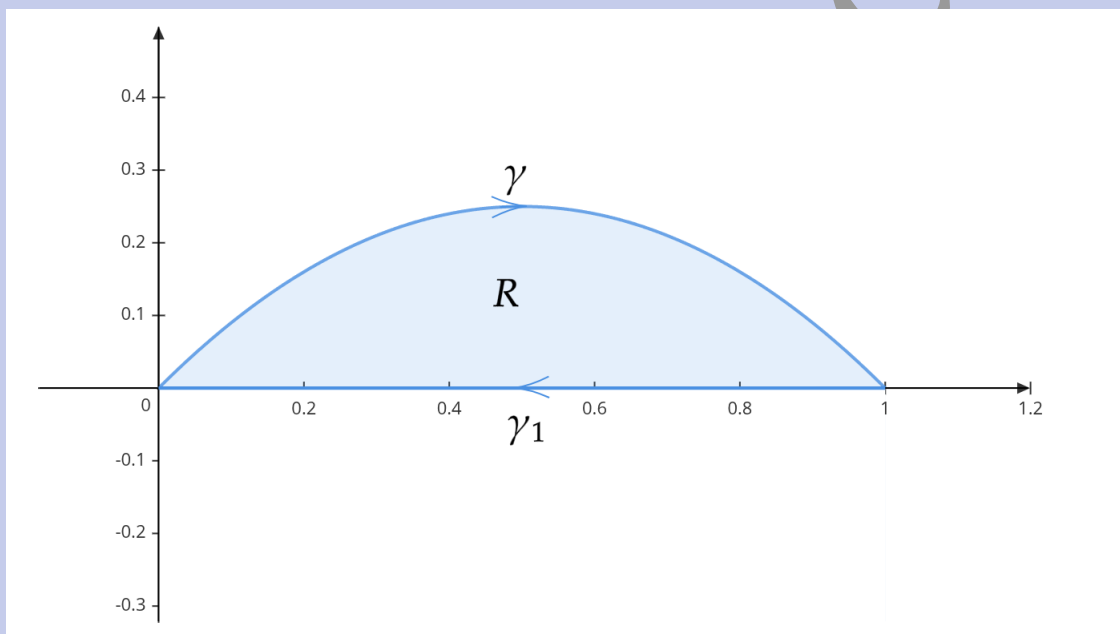
e  $C$  é a curva

$$\gamma(t) = (t, t(t-1)) \quad t \in [0, 1].$$

O cálculo desta integral de linha pode ser muito difícil. No entanto se consideramos as curvas

$$C_1 \text{ parametrizada por } \gamma_1(t) = (1-t, 0) \quad t \in [0, 1].$$

e  $\tilde{C}$  como sendo dada pela união de  $C \cup C_1$ . Com isto temos uma região fechada  $R$



Com isto, pelo teorema de Green (observar que estamos com a orientação horária), temos que

$$\oint_{C_1} F \cdot d\gamma_1 + \oint_C F \cdot d\gamma = - \iint_R (\partial_x Q - \partial_y P) dA$$

Calculamos

$$\begin{aligned} \oint_{C_1} F \cdot d\gamma_1 &= \int_0^1 (e^{2t-1}, 2(t-1)^2) \cdot (-1, 0) dt \\ &= \int_0^1 (-e^{2t-1}) dt = -\frac{1}{2} e^{2t-1} \Big|_0^1 = -\sinh(1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_R (\partial_x Q - \partial_y P) dA &= \int_0^1 \int_0^{x(1-x)} (4x-1) dy dx \\ &= \int_0^1 (4x-1)x(1-x) dx \\ &= \int_0^1 (-4x^3 + 5x^2 - x) dx \\ &= -x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Com isto, temos que

$$\oint_C F \cdot d\gamma = - \iint_R (\partial_x Q - \partial_y P) \, dA - \oint_{C_1} F \cdot d\gamma_1 = \sinh(1) - \frac{1}{6}.$$

■

Em elaboração

Em elaboração

## 25. Teorema de Stokes

O Teorema de Stokes é uma das mais belas generalizações do Teorema Fundamental do Cálculo para dimensões superiores. Ele relaciona a circulação de um campo vetorial ao longo da borda de uma superfície com o rotacional do campo sobre a superfície em si. Intuitivamente, diz que "a integral de linha em torno da fronteira é igual à integral do rotacional sobre a superfície".

Esse resultado é extremamente útil na física e na engenharia, especialmente em eletromagnetismo e fluidodinâmica, onde descreve, por exemplo, a relação entre corrente e campo magnético (como nas equações de Maxwell).

Historicamente, embora o teorema leve o nome de George Stokes, sua formulação já era conhecida e usada por matemáticos como William Thomson (Lord Kelvin) e Carl Friedrich Gauss. Stokes o popularizou ao propô-lo como questão de um exame em Cambridge em 1854, o que acabou eternizando seu nome.

O Teorema de Stokes permite enxergar uma unificação entre integrais de linha e integrais de superfície, além de preparar o terreno para as ideias mais gerais do cálculo sobre variedades.

Antes de enunciar o teorema faremos algumas definições prévias.

Seja  $S$  uma superfície parametrizada regular por partes definida a partir de  $\phi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , isto é,  $\phi(U) = S$ . Assuma que  $S$  é uma superfície orientada e consideramos a orientação dada pelo vetor normal  $\eta : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

A **borda** da superfície  $S$  (se existir), denotada por  $\partial S$ , é a curva que delimita a superfície. Geometricamente, corresponde à imagem do contorno do domínio  $D$  pela parametrização  $\phi(u, v) : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

Definimos a **orientação positiva da borda conforme a orientação da superfície** como sendo aquela compatível com a orientação da superfície segundo a **regra da mão direita**: se os dedos da mão direita percorrem  $\partial S$  no sentido positivo, então o polegar aponta na direção do vetor normal orientador da superfície.

■ **Exemplo 25.1** Considere o hemisfério superior da esfera de raio  $R$ :

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}.$$

Uma parametrização suave é:

$$\psi(\theta, \phi) = (R \sin(\phi) \cos(\theta), R \sin(\phi) \sin(\theta), R \cos(\phi)), \quad \theta \in [0, 2\pi], \phi \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

Neste caso escolhemos a orientação

$$\eta(x, y, z) = (x, y, z).$$

A borda  $\partial S$  é o círculo no plano  $z = 0$  de raio  $R$  descrito pela equação

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

A orientação positiva da curva é no sentido anti-horário quando vista de cima, e o vetor normal aponta para cima (regra da mão direita). Portanto, a curva que descreve esta orientação é

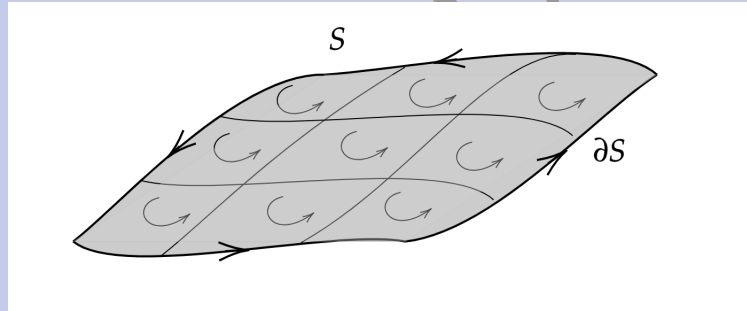
$$\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = (\cos(t), -\sin(t)).$$

**Teorema 25.1 — Teorema de Stokes para superfícies parametrizadas.** Seja  $S$  uma superfície orientada, parametrizada, regular por partes, com borda  $\partial S$ , orientada positivamente conforme a orientação de  $S$ . Assuma que  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  é a curva diferenciável por partes que descreve esta orientação. Seja  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  um campo vetorial de classe  $C^1$  definido em uma vizinhança  $U$  de  $S$ . Então,

$$\oint_{\partial S} F \cdot d\gamma = \iint_S \mathbf{rot}(F) \cdot d\mathbf{A}.$$

*Demonstração.* (Esboço da demonstração)

Começamos particionando a superfície  $S$  em pequenos retalhos  $S_i$  que podem ser vistos como superfícies parametrizadas.



Logo, se provamos o teorema de Stokes em cada retalho, temos que, como as integrais de linha sobre bordas internas se cancelam (orientações opostas), nos resta apenas a integral sobre  $\partial S$ .

Vamos então provar o teorema considerando somente o caso em que  $S$  é uma superfície parametrizada. Assuma que  $\phi: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $S = \phi(U)$ , para

$$\phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

e seja  $F: V \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , onde  $S \subset V$ , um campo vetorial dado pela expressão

$$F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)).$$

Como trabalharmos com muitas derivadas parciais, para evitar que a notação fique muito carregada denotaremos, por exemplo,

$$\partial_u x(u, v) \equiv x_u \quad \partial_v x(u, v) \equiv x_v,$$

e

$$\partial_x P(x, y, z) \equiv P_x \quad \partial_y P(x, y, z) \equiv P_y \quad \partial_z P(x, y, z) \equiv P_z.$$

Neste caso  $S = \phi(U)$  e a orientação de  $S$  assumimos que seja a dada por

$$(\partial_u \phi \times \partial_v \phi) = (y_u z_v - y_v z_u, x_v z_u - x_u z_v, x_u y_v - x_v y_u)$$

Neste caso temos que

$$\mathbf{rot}(F)(x, y, z) = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y)(x, y, z),$$

de onde segue que

$$\iint_S \mathbf{rot}(F) \cdot d\mathbf{A} = \iint_U [(R_y - Q_z)(y_u z_v - y_v z_u) + (P_z - R_x)(x_v z_u - x_u z_v) + (Q_x - P_y)(x_u y_v - x_v y_u)] d\mathbf{A}.$$

Por outro lado, se consideramos que a fronteira de  $\partial S$  é dada por  $\phi(\partial U)$  temos que existe uma curva  $\tilde{\gamma}(t) = (u(t), v(t)) \in U$  tal que

$$\gamma(t) = \phi(u(t), v(t))$$

é a curva que faz a fronteira de  $S$ . Novamente, para não sobrecarregar a notação estaremos identificando, por exemplo,

$$u'(t) \equiv u' \quad v'(t) \equiv v'$$

e

$$P(x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))) = P$$

Desta forma

$$\begin{aligned} \iint_{\partial S} F \cdot d\gamma &= \int_{\partial U} P(x_u \cdot u' + x_v \cdot v') + Q(y_u \cdot u' + y_v \cdot v') + R(z_u \cdot u' + z_v \cdot v') dt \\ &= \int_{\partial U} (P \cdot x_u + Q \cdot y_u + R \cdot z_u) \cdot u' + (P \cdot x_v + Q \cdot y_v + R \cdot z_v) \cdot v' \\ &= \iint_U [(P \cdot x_v + Q \cdot y_v + R \cdot z_v)_u - (P \cdot x_u + Q \cdot y_u + R \cdot z_u)_v] d\mathbf{A} \\ &= \iint_U [(R_y - Q_z)(y_u z_v - y_v z_u) + (P_z - R_x)(x_v z_u - x_u z_v) + (Q_x - P_y)(x_u y_v - x_v y_u)] d\mathbf{A} \\ &= \iint_S \mathbf{rot}(F) \cdot d\mathbf{A} \end{aligned}$$

■

**Corolário 25.1** Sejam  $S_1, S_2$  uma superfície orientáveis e suavemente parametrizadas, com o mesmo conjunto como borda  $\partial S = \partial S_1 = \partial S_2$  de forma tal que a orientação induzida foi orientada positivamente conforme a orientação de  $S_1, S_2$ . Assuma que  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  é a curva diferenciável por partes que descreve esta orientação. Seja  $F: U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um campo vetorial de classe  $C^1$  definido em uma vizinhança de  $U$  de  $S_1 \cup S_2$ . Então,

$$\iint_{S_1} \mathbf{rot}(F) \cdot d\mathbf{A} = \oint_{\gamma} F \cdot d\gamma = \iint_{S_2} \mathbf{rot}(F) \cdot d\mathbf{A}.$$

■ **Exemplo 25.2** • Seja  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  o campo vetorial dado por

$$F(x, y, z) = (-y, x, -1)$$

e considere o cone de equação

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z^2 = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 4\}$$

orientado de forma tal que o vetor normal aponta para  $z \leq 0$ . Vamos mostrar o teorema de Stokes neste caso.

– Primeiramente observamos que  $S$  pode ser parametrizada por

$$\phi(r, u) = (r \cos(u), r \sin(u), r) \quad (r, u) \in [0, 4] \times [0, 2\pi].$$

de onde tiramos que

$$\partial_r \phi(r, u) = (\cos(u), \sin(u), 1) \quad \partial_u \phi(r, u) = (-r \sin(u), r \cos(u), 0)$$

portanto

$$(\partial_r \phi \times \partial_u \phi)(r, u) = (-\cos(u), -\sin(u), r)$$

Para respeitar a orientação de  $S$  consideramos

$$(\partial_u \phi \times \partial_r \phi)(r, u) = (\cos(u), \sin(u), -r)$$

Por outro lado

$$\mathbf{rot}(F) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -y & x & -1 \end{vmatrix} = (0, 0, 2)$$

De onde segue que

$$\iint_S \mathbf{rot}(F) \cdot d\mathbf{A} = \int_0^4 \int_0^{2\pi} (-2r) d\theta dr = -32\pi.$$

– Por outro lado, a fronteira de  $S$  é dada pela curva

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 = 16, z = 4\}$$

que pode ser parametrizada, respeitando a orientação de  $S$ , por

$$\gamma(t) = (4 \cos(t), -4 \sin(t), 1) \Rightarrow \gamma'(t) = (-4 \sin(t), -4 \cos(t), 0)$$

então

$$F(\gamma(t)) = (\sin(t), \cos(t), 1) \Rightarrow F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = -16$$

De onde segue que

$$\oint_C F \cdot d\gamma = \int_0^{2\pi} (-16) dt = -32\pi.$$

Como queríamos mostrar

- Seja  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  o campo vetorial dado por

$$F(x, y, z) = (y, z, x)$$

e considere a superfície de equação

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z^2 + x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$$

orientado de forma tal que o vetor normal aponta para  $z \leq 0$ . Vamos mostrar o teorema de Stokes neste caso.

– Primeiramente observamos que  $S$  pode ser parametrizada por

$$\phi(r, u) = (r \cos(u), \sqrt{1-r^2}, r \sin(u)) \quad (r, u) \in [0, 1] \times [0, 2\pi].$$

de onde tiramos que

$$\partial_r \phi(r, u) = (\cos(u), -r/\sqrt{1-r^2}, \sin(u)) \quad \partial_u \phi(r, u) = (-r \sin(u), 0, r \cos(u))$$

portanto

$$(\partial_r \phi \times \partial_u \phi)(r, u) = \left( -\frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}} \cos(u), r, -\frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}} \sin(u) \right)$$

que respeita a orientação de  $S$ . Por outro lado

$$\mathbf{rot}(F) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y & z & -x \end{vmatrix} = (-1, -1, -1)$$

De onde segue que

$$\iint_S \mathbf{rot}(F) \cdot d\mathbf{A} = \int_0^4 \int_0^{2\pi} \left( \frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}} (\cos(u) + \sin(u)) - r \right) d\theta dr = -\pi.$$

– Por outro lado, a fronteira de  $S$  é dada pela curva

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + z^2 = 1, y = 0\}$$

que pode ser parametrizada, respeitando a orientação de  $S$ , por

$$\gamma(t) = (\cos(t), 0, -\sin(t)) \Rightarrow \gamma'(t) = (-\sin(t), 0, -\cos(t))$$

então

$$F(\gamma(t)) = (0, -\sin(t), \cos(t)) \Rightarrow F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = -\cos^2(t)$$

De onde segue que

$$\oint_C F \cdot d\gamma = \int_0^{2\pi} (-\cos^2(t)) dt = -\pi.$$

Como queríamos mostrar

- Seja  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  o campo vetorial dado por

$$F(x, y, z) = (-y^2, x, z^2).$$

e considere a curva  $\gamma$  que é definida pela interseção do plano  $y + z = 2$  com o cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  orientada no sentido anti-horário quando vista por cima. Queremos calcular

$$\oint_{\gamma} F \cdot d\gamma$$

Vamos fazer esta conta observando primeiramente que a curva  $\gamma$  pode ser vista como fronteira de uma superfície  $S$  que é dada pela região do plano dentro do cilindro. Esta região pode ser parametrizada por

$$\phi(x, y) = (x, y, 2 - y), \quad (x, y) \in D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Como

$$\partial_x \phi(x, y) = (1, 0, 0) \quad \text{e} \quad \partial_y \phi(x, y) = (0, 1, -1)$$

que tem por vetor normal (fazendo sentido com a orientação da curva)

$$\eta = (0, 1, -1)$$

Nesse contexto, vamos utilizar o teorema de Stokes. Calculamos

$$\mathbf{rot}(F) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -y^2 & x & z^2 \end{vmatrix} = (0, 0, 1 + 2y)$$

Com isto,

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} F \cdot d\gamma &= \iint_S \mathbf{rot}(F) \cdot d\mathbf{S} \\ &= \iint_D (1 + 2y) \, d\mathbf{A} \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 + 2r \sin(\theta)) \, r d\theta \, dr \\ &= 2\pi \int_0^1 r \, dr = \pi. \end{aligned}$$

- Seja  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  o campo vetorial dado por

$$F(x, y, z) = (xz, yz, xy).$$

e considere a superfície  $S$  como sendo a parte da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  que está dentro do cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  e acima do plano  $z = 0$ . Assumimos que  $S$  tem a orientação da esfera com o vetor normal apontando para fora da esfera. Queremos calcular

$$\iint_S \mathbf{rot}(F) \cdot d\mathbf{S}.$$

Vamos fazer esta conta observando primeiramente que a superfície  $S$  tem como fronteira a curva  $\gamma$  que satisfaz

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow z = \sqrt{3} \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Por isto, e seguindo a orientação induzida por  $S$ , tem a parametização

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \gamma(t) = (\cos(t), -\sin(t), \sqrt{3}) \quad \Rightarrow \quad \gamma'(t) = (-\sin(t), -\cos(t), 0)$$

$$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = (\sqrt{3} \cos(t), -\sqrt{3} \sin(t), -\sin(t) \cos(t)) \cdot (-\sin(t), -\cos(t), 0) = 0$$

Nesse contexto, vamos utilizar o teorema de Stokes. Com isto,

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{rot}(F) \cdot d\mathbf{S} &= \oint_{\gamma} F \cdot d\gamma \\ &= \int_0^{2\pi} 0 \, dt = 0. \end{aligned}$$

- Seja  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  o campo vetorial dado por

$$F(x, y, z) = (-y, x, 0).$$

e considere a curva  $\gamma$  que é definida pela interseção do círculo  $x^2 + y^2 = 1$  com o plano  $z = 0$  orientada no sentido anti-horário quando vista por cima. Queremos calcular

$$\oint_{\gamma} F \cdot d\gamma$$

Vamos fazer esta conta observando primeiramente que a curva  $\gamma$  pode ser vista como fronteira de uma superfície  $S$  que é dada pela região do plano dentro do cilindro. Esta região pode ser parametrizada por

$$\phi(x, y) = (x, y, 0), \quad (x, y) \in D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Como

$$\partial_x \phi(x, y) = (1, 0, 0) \quad \text{e} \quad \partial_y \phi(x, y) = (0, 1, 0)$$

que tem por vetor normal (fazendo sentido com a orientação da curva)

$$\eta = (0, 0, 1)$$

Nesse contexto, vamos utilizar o teorema de Stokes. Calculamos

$$\mathbf{rot}(F) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 2)$$

Com isto,

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} F \cdot d\gamma &= \iint_S \mathbf{rot}(F) \cdot dS \\ &= \iint_D 2 \, dA \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r \, d\theta \, dr \\ &= 4\pi \int_0^1 r \, dr = 2\pi. \end{aligned}$$

- Vamos verificar o teorema de Stokes para  $\mathbf{F} = (z, x, y)$  sobre o parabolóide  $z = 1 - x^2 - y^2$ ,  $z \geq 0$ . Seja  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  o campo vetorial dado por

$$F(x, y, z) = (z, x, y).$$

e considere a superfície  $S$  como sendo a parte do parabolóide  $z = 1 - x^2 - y^2$  que está acima do plano  $z = 0$ . Assumimos que  $S$  tem a orientação do parabolóide com o vetor normal apontando para fora do parabolóide. Queremos calcular

$$\iint_S \mathbf{rot}(F) \cdot dS.$$

Vamos fazer esta conta observando primeiramente que a superfície  $S$  tem como fronteira a curva  $\partial S$  que satisfaz

$$\begin{cases} z &= 0 \\ z + (x^2 + y^2) &= 1 \end{cases} \Rightarrow z = 0 \quad x^2 + y^2 = 1$$

Por isto, e seguindo a orientação induzida por  $S$ , tem a parametrização

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), 0) \quad \Rightarrow \quad \gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 0)$$

$$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = (0, \cos(t), -\sin(t)) \cdot (-\sin(t), \cos(t), 0) = \cos(t)^2$$

Nesse contexto, vamos utilizar o teorema de Stokes. Com isto,

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{rot}(F) \cdot d\mathbf{S} &= \oint_\gamma F \cdot d\gamma \\ &= \int_0^{2\pi} \cos(t)^2 dt = \left. \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin(2t) \right|_0^{2\pi} = \pi.\end{aligned}$$

Por outro lado, podemos parametrizar a superfície por

$$\phi(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), 1 - u^2) \quad \phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$$

onde  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi\}$ .

Calculamos

$$\partial_u \phi \times \partial_v \phi = (2u^2 \cos(v), 2u^2 \sin(v), u)$$

que aponta na mesma direção que o normal. Calculamos

$$\mathbf{rot}(F) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ z & x & y \end{vmatrix} = (1, 1, 1)$$

Com isto

$$F(\phi(u, v)) \cdot (\partial_u \phi \times \partial_v \phi) = (1, 1, 1) \cdot (2u^2 \cos(v), 2u^2 \sin(v), u) = 2u^2 \cos(v) + 2u^2 \sin(v) + u$$

Então

$$\iint_S F \cdot d\mathbf{A} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (2u^2 \cos(v) + 2u^2 \sin(v) + u) dv du = \pi.$$

■

## 26. Teorema da divergência

Em muitos contextos físicos, especialmente em fluidos e campos elétricos, estamos interessados em medir o quanto de uma certa "quantidade" (como massa, carga ou energia) está saindo ou entrando numa região do espaço. O Teorema da Divergência, também conhecido como Teorema de Gauss, fornece uma ponte elegante entre o fluxo de um campo vetorial através da superfície fechada de uma região e a divergência do campo dentro da região.

Formalmente, ele afirma que o fluxo total de um campo vetorial através da superfície fechada que delimita um volume é igual à integral da divergência do campo sobre o volume. Ou seja, a informação local sobre o "comportamento expansivo" do campo se traduz em uma informação global sobre o fluxo na fronteira.

Além de seu valor teórico, o teorema é amplamente utilizado na física e engenharia — desde a conservação de massa em dinâmica de fluidos até leis fundamentais do eletromagnetismo, como a Lei de Gauss para o campo elétrico.

**Teorema 26.1 — da divergência.** Seja  $U \subset \mathbb{R}^3$  um conjunto fechado e limitado, tal que sua fronteira é uma superfície  $S$  que é regular por partes e orientada para fora. Considere um aberto  $V$  tal que  $U \subset V$ . Seja  $F : V \rightarrow \mathbb{R}^3$  um campo vetorial de classe  $C^1$ . Então

$$\iint_S F \cdot d\mathbf{A} = \iiint_U \operatorname{div}(F) dV.$$

*Demonstração.* Seja

$$F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

um campo vetorial. Faremos a demonstração do o teorema para uma região da forma

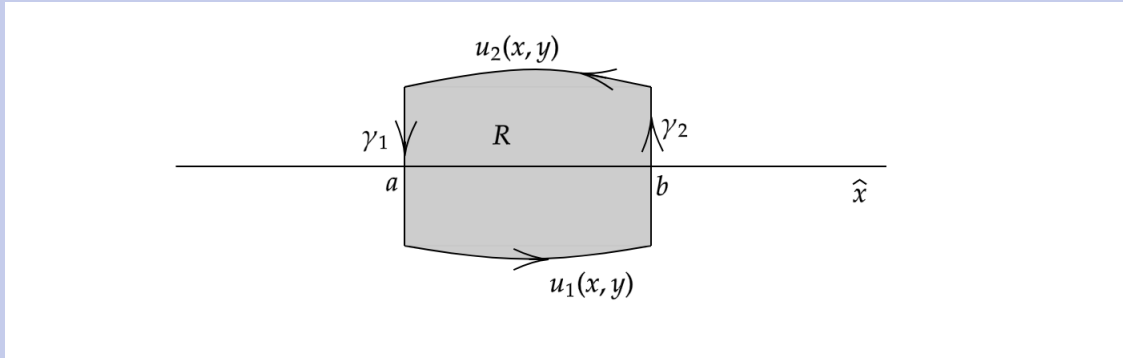
$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x \in [a, b], y \in [c, d], u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

Os outros casos se mostram de forma similar. Logo, como toda região pode ser decomposta como união de regiões desta forma e como nas superfícies de contato entre as regiões as integrais de superfície se cancelam mutuamente, temos a demonstração do teorema geral.

Calculamos

$$\iiint_U \partial_x P dV = \int_c^d \int_a^b \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} \partial_x P(x, y, z) dz dx dy.$$

Fixando  $y \in [c, d]$  observamos que, temos uma região da forma



Parametrizando a curva que faz a fronteira temos que Então, pelo teorema de Green aplicado a um campo vetorial sobre esta região  $G_y(x, z) = (0, P(x, y, z))$  temos que

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} \partial_x P(x, y, z) dz dx &= - \int_{u_1(a,y)}^{u_2(a,y)} P(a, y, t) dt + \int_a^b P(x, y, u_1(x, y)) \partial_x u_1(x, y) dx \\ &\quad + \int_{u_1(b,y)}^{u_2(b,y)} P(b, y, t) dt - \int_a^b P(x, y, u_2(x, y)) \partial_x u_2(x, y) dx \end{aligned}$$

Inserindo isto na integral acima temos

$$\begin{aligned} \iiint_U \partial_x P dV &= - \int_c^d \int_{u_1(a,y)}^{u_2(a,y)} P(a, y, t) dt + \int_c^d \int_{u_1(b,y)}^{u_2(b,y)} P(b, y, t) dt \\ &\quad + \int_c^d \int_a^b P(x, y, u_1(x, y)) \partial_x u_1(x, y) dx \\ &\quad - \int_c^d \int_a^b P(x, y, u_2(x, y)) \partial_x u_2(x, y) dx dy \\ &= \iint_{S_1} F \cdot d\mathbf{A} + \iint_{S_2} F \cdot d\mathbf{A} \\ &\quad + \int_c^d \int_a^b P(x, y, u_1(x, y)) \partial_x u_1(x, y) dx \\ &\quad - \int_c^d \int_a^b P(x, y, u_2(x, y)) \partial_x u_2(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

para  $S_1, S_2$  as faces orientadas do sólido que estão sobre os planos  $x = a$  e  $x = b$  e que são parametrizadas pelas cartas

$$\psi_1(y, z) = (a, y, z) \quad \text{com domínio} \quad \{(y, z), y \in [c, d], u_1(a, y) \leq z \leq u_2(a, y)\},$$

$$\psi_2(y, z) = (b, y, z) \quad \text{com domínio} \quad \{(y, z), y \in [c, d], u_1(b, y) \leq z \leq u_2(b, y)\}$$

respectivamente. De modo análogo, se mostra que

$$\begin{aligned} \iiint_U \partial_y Q dV &= \iint_{S_3} F \cdot d\mathbf{A} + \iint_{S_4} F \cdot d\mathbf{A} \\ &\quad + \int_a^b \int_c^d Q(x, y, u_1(x, y)) \partial_y u_1(x, y) dy \\ &\quad - \int_a^b \int_c^d Q(x, y, u_2(x, y)) \partial_y u_2(x, y) dy dx. \end{aligned}$$

Onde  $S_3$  e  $S_4$  são as faces do sólido que estão sobre os planos  $y = c$  e  $y = d$  respectivamente.

Por último, temos que

$$\begin{aligned}\iiint_U \partial_z R \, dV &= \int_a^b \int_c^d \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} \partial_z R(x,y,z) \, dx dy dz \\ &= \int_a^b \int_c^d [R(x,y,u_2(x,y)) - R(x,y,u_1(x,y))] \, dx dy \\ &= \int_a^b \int_c^d R(x,y,u_2(x,y)) \, dx dy - \int_a^b \int_c^d R(x,y,u_1(x,y)) \, dx dy\end{aligned}$$

Agora, sejam  $S_5$   $S_6$  as faces inferior e superior da região. Por exemplo  $S_5$  pode ser parametrizada por

$$\phi_1(x,y) = (x,y,u_1(x,y)) \rightarrow (\partial_x \phi_1 \times \partial_y \phi_1)(x,y) = (-\partial_x u_1, -\partial_y u_1, 1)(x,y)$$

considerando a orientação temos que

$$\iint_{S_5} F \cdot d\mathbf{A} = \int_a^b \int_c^d [P(x,y,u_1(x,y))\partial_x u_1(x,y) + Q(x,y,u_1(x,y))\partial_y u_1(x,y) - R(x,y,u_1(x,y))] \, dy dx$$

Analogamente para  $S_6$ , podemos parametrizar por

$$\phi_2(x,y) = (x,y,u_2(x,y)) \rightarrow (\partial_x \phi_2 \times \partial_y \phi_2)(x,y) = (-\partial_x u_2, -\partial_y u_2, 1)(x,y)$$

considerando a orientação temos que

$$\iint_{S_6} F \cdot d\mathbf{A} = \int_a^b \int_c^d [-P(x,y,u_2(x,y))\partial_x u_2(x,y) - Q(x,y,u_2(x,y))\partial_y u_2(x,y) + R(x,y,u_2(x,y))] \, dy dx$$

Portanto, juntando todas as partes, vemos que

$$\iiint_U \operatorname{div}(F) \, dV = \iiint_U (\partial_x P + \partial_y Q + \partial_z R) \, dV = \sum_{i=1}^6 \iint_{S_i} F \cdot d\mathbf{A} = \iint_{\partial U} F \cdot d\mathbf{A}.$$

Como queríamos mostrar. ■

**Obs.**

Historicamente, esse resultado está associado a Carl Friedrich Gauss, que o utilizou no contexto da eletrostática no século XIX, embora formas similares da ideia já estivessem presentes em estudos de fluidos anteriormente. Ele é uma das formas do Teorema de Stokes em dimensões maiores.

**Corolário 26.1** Considere uma região  $U$  que está entre duas superfícies  $S_1, S_2$  fechadas, parametrizadas e regulares por partes de modo tal que  $S_1 \subset S_2$ . Assuma as duas estão orientadas com o normal apontando para fora. Seja  $F : V \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um campo vetorial ( $U \subset V$ ). Então

$$\iiint_U \operatorname{div}(F) \, dV = \iint_{S_2} F \cdot d\mathbf{A} - \iint_{S_1} F \cdot d\mathbf{A}.$$

Em particular, se  $\operatorname{div}(F)|_U = 0$  então

$$\iint_{S_2} F \cdot d\mathbf{A} = \iint_{S_1} F \cdot d\mathbf{A}.$$

**Demonstração.** Seja  $V_1$  o sólido delimitado por  $S_1$  e  $V_2$  o sólido delimitado por  $S_2$ . Utilizando o teorema da divergência temos

$$\begin{aligned}\iiint_U \operatorname{div}(F) \, dV &= \iiint_{V_2} \operatorname{div}(F) \, dV - \iiint_{V_1} \operatorname{div}(F) \, dV \\ &= \iint_{S_2} F \cdot d\mathbf{A} - \iint_{S_1} F \cdot d\mathbf{A}.\end{aligned}$$

- **Exemplo 26.1** • Vamos mostrar o teorema da divergência para o campo vetorial  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dado por

$$F(x, y, z) = (x, y, z)$$

e queremos determinar o fluxo de  $F$  através da esfera

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Assumimos que a orientação de  $S$  é com o vetor normal apontando para fora de  $S$ .

Vamos a fazer esta conta de duas formas diferentes.

- por definição: parametrizamos a esfera por

$$\phi(u, v) = (\cos(u) \sin(v), \sin(u) \cos(v), \cos(v)) \quad (u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi] \Rightarrow$$

$$\partial_u \phi \times \partial_v \phi(u, v) = \sin(v) (\cos(u) \sin(v), \sin(u) \cos(v), \cos(v)).$$

Logo,

$$F(\phi(u, v)) \cdot (\partial_u \phi \times \partial_v \phi) = \sin(v).$$

De onde

$$\iint_S F \cdot d\mathbf{A} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin(v) \, dv du = 4\pi.$$

- pelo teorema da divergência: Neste caso observamos que  $S$  é a fronteira da esfera  $E$  de raio 1. Calculamos

$$\operatorname{div}(F) = 3$$

Então

$$\iint_S F \cdot d\mathbf{A} = \iiint_E \operatorname{div}(F) \, dV = 3 \cdot \operatorname{Vol}(E) = 4\pi.$$

Como queríamos mostrar.

- Vamos verificar o teorema da divergência para  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definido por

$$F(x, y, z) = (x^2, yx, z)$$

e o sólido  $U$  delimitado pelas superfícies  $z = 4 - x^2 - y^2$  e  $z = 0$ . Assumimos que o vetor normal de  $U$  aponta para fora.

- Observamos primeiramente que

$$\operatorname{div}(F)(x, y, z) = 3x + 1.$$

e que  $U$  pode ser descrito como

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2\}.$$

ou, em coordenadas cilíndricas, por

$$U = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3, r \in [0, 2], \theta \in [0, 2\pi], 0 \leq z \leq 4 - r^2\}$$

Então,

$$\iiint_U \operatorname{div}(F) \, dV = \int_0^2 \int_0^{4-r^2} \int_0^{2\pi} (3r \cos(\theta) + 1) \, r d\theta dz dr \quad (26.1)$$

$$= 2\pi \int_0^2 r(4 - r^2) \, dr = 8\pi. \quad (26.2)$$

– Por outro lado, observamos que  $\partial U = S_1 \cup \partial S_2$ . em que

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4, z = 4 - x^2 - y^2\} \quad \text{e} \quad S_2 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

\*  $S_1$

Parametrizamos esta superfície por

$$\phi(x, y) = (x, y, 4 - x^2 - y^2) \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Com isto, temos que

$$(\partial_x \phi \times \partial_y \phi)(x, y) = (2x, 2y, 1)$$

que aponta na direção do vetor normal de  $U$ . Então

$$F(\phi(x, y)) \cdot (\partial_x \phi \times \partial_y \phi)(x, y) = (x^2, yx, 4 - x^2 - y^2) \cdot (2x, 2y, 1) = 2x^3 + 2y^2x + 4 - x^2 - y^2 = (2x - 1)(x^2 + y^2) + 4$$

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} F \cdot d\mathbf{A} &= \int_D (2x - 1)(x^2 + y^2) + 4 \, d\mathbf{A} \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} ((2r \cos(\theta) - 1)r^3 + 4r) \, d\theta \, dr \\ &= 2\pi \int_0^2 (4r - r^3) \, dr = 8\pi. \end{aligned}$$

\*  $S_2$

Parametrizamos esta superfície por

$$\phi(x, y) = (x, y, 0) \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Com isto, temos que

$$(\partial_x \phi \times \partial_y \phi)(x, y) = (0, 0, 1)$$

que aponta na direção contrária ao vetor normal de  $U$ . Então consideramos

$$-(\partial_x \phi \times \partial_y \phi)(x, y) = (0, 0, -1)$$

$$F(\phi(x, y)) \cdot (-\partial_x \phi \times \partial_y \phi)(x, y) = (x^2, yx, 0) \cdot (0, 0, -1) = 0.$$

$$\iint_{S_2} F \cdot d\mathbf{A} = 0$$

Com isto, temos que

$$\iint_S F \cdot d\mathbf{A} = \iint_{S_1} F \cdot d\mathbf{A} + \iint_{S_2} F \cdot d\mathbf{A} = 8\pi + 0 = 8\pi.$$

- Vamos a calcular o fluxo de  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dado por

$$F(x, y, z) = (x^3 + y^3, y^3 + z^3, z^3 + x^3),$$

na esfera  $E$  de raio 2 cuja orientação tem o vetor normal apontando para fora da esfera.

Para isto, utilizamos o teorema da divergência. Calculamos primeiramente

$$\operatorname{div}(F)(x, y, z) = 3(x^2 + y^2 + z^2)$$

Parametrizamos a esfera utilizando coordenadas esféricas e temos que

$$\iiint_E \operatorname{div}(F) \, dV = \int_0^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (3r^2) r^2 \sin(\phi) \, d\theta \, d\phi \, dr = \frac{3}{5} r^5 \Big|_0^2 (2\pi) (-\cos(\phi)) \Big|_0^\pi = \frac{192}{5} \pi.$$

- Considere o campo vetorial  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dado por

$$F(x, y, z) = (z^2x, y^3/3 + \tan(z), x^2z + y^2),$$

Queremos calcular o fluxo de  $F$  através da casca da esfera

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\},$$

cujas orientação é para dentro da esfera.

Utilizamos o teorema da divergência. Para isto tampamos a casca da esfera com a superfície

$$S_2 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

e denotamos o sólido demarcado por estas superfícies como  $C$ . Seja  $S_1$  a superfície  $S$  com orientação apontando para fora.

Parametrizamos esta superfície  $S_2$  por

$$\phi(x, y) = (x, y, 0) \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

e damos a orientação com o vetor normal apontando para  $z \leq 0$ , isto é

$$-(\partial_x \phi \times \partial_y \phi) = (0, 0, -1)$$

Com isto,

$$F(\phi(x, y)) \cdot (0, 0, -1) = -y^2,$$

e

$$\iint_{S_2} F \cdot d\mathbf{A} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} -(r^2 \sin^2(\theta)) r d\theta dr = -\frac{\pi}{4}.$$

Temos então que

$$\iint_{S_2} F \cdot d\mathbf{A} + \iint_{S_1} F \cdot d\mathbf{A} = \iiint_C \operatorname{div}(F) dV$$

De onde segue que

$$\iint_S F \cdot d\mathbf{A} = -\iint_{S_1} F \cdot d\mathbf{A} \tag{26.3}$$

$$= \iint_{S_2} F \cdot d\mathbf{A} - \iiint_C \operatorname{div}(F) dV \tag{26.4}$$

$$= -\frac{\pi}{4} - \iiint_C \operatorname{div}(F) dV \tag{26.5}$$

Como

$$\operatorname{div}(F) = z^2 + y^2 + x^2$$

temos que

$$\iiint_C \operatorname{div}(F) dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^4 \sin(\phi) dr d\phi d\theta = \frac{2\pi}{5}.$$

Portanto

$$\iint_S F \cdot d\mathbf{A} = \frac{-1}{4}\pi - \frac{2}{5}\pi = -\frac{13}{20}\pi.$$

- Vamos calcular o fluxo do campo  $F(x, y, z) = (x, y, z)$  através da superfície da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  usando o Teorema da Divergência. Calculamos primeiramente,

$$\operatorname{div}(F) = 1 + 1 + 1 = 3$$

Logo, pelo teorema da divergência

$$\iiint_V (\operatorname{div}(F)) dV = \iiint_V 3 dV = 3 \cdot \operatorname{Vol}(B(0, 1)) = 3 \cdot \frac{4\pi}{3} = 4\pi$$

- Seja  $F(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ . Vamos calcular o fluxo através da superfície do cubo delimitado por  $0 \leq x, y, z \leq 1$ . Como

$$\operatorname{div}(F) = 2x + 2y + 2z$$

Pelo teorema da divergência

$$\iiint_{[0,1]^3} (2x + 2y + 2z) dV = 2 \left( \iiint_{[0,1]^3} x dV + \iiint_{[0,1]^3} y dV + \iiint_{[0,1]^3} z dV \right) = 2 \left( 3 \cdot \frac{1}{2} \right) = 3$$

- Vamos calcular o fluxo de  $F(x, y, z) = (y, z, x)$  através da superfície da esfera de raio 2 centrada na origem. Como

$$\operatorname{div}(F) = 0 \Rightarrow \iiint_{B(0,2)} \operatorname{div}(F) dV = 0$$

Pelo teorema da divergência, o fluxo é 0.

- Vamos mostrar que o fluxo do campo  $F(x, y, z) = (yz, xz, xy)$  através da superfície do cubo  $0 \leq x, y, z \leq 1$ . Então

$$\operatorname{div}(F) = \frac{\partial}{\partial x}(yz) + \frac{\partial}{\partial y}(xz) + \frac{\partial}{\partial z}(xy) = 0 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dV = 0$$

Pelo teorema da divergência, o fluxo é 0.

- Seja  $F(x, y, z) = (xy, yz, zx)$ . Calcule o fluxo através da superfície do cubo  $0 \leq x, y, z \leq 2$ . Para isto, calculamos

$$\operatorname{div}(F) = y + z + x$$

Com isto, temos que

$$\iiint_{[0,2]^3} (x + y + z) dV = 3 \cdot \iiint_{[0,2]^3} x dV = 3 \cdot \left( \frac{2^2}{2} \cdot 2 \cdot 2 \right) = 3 \cdot 8 = 24$$

Pelo teorema da divergência o fluxo é 24.

- Use o Teorema da Divergência para calcular o fluxo de  $F(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)$  através do cubo  $[-1, 1]^3$ . Para isto, calculamos

$$\operatorname{div}(F) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2$$

Com isto, temos que

$$\iiint_{[-1,1]^3} 3(x^2 + y^2 + z^2) dV = 3 \cdot 3 \cdot \iiint_{[-1,1]^3} x^2 dV = 9 \cdot \left( \int_{-1}^1 x^2 dx \right) \cdot (2)^2 = 9 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 = 24$$

Pelo teorema da divergência o fluxo é 24.

- Calcule o fluxo de  $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, -2z)$  através da superfície do cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $0 \leq z \leq 1$ . Para isto, calculamos

$$\operatorname{div}(F) = 1 + 1 - 2 = 0 \Rightarrow \text{pelo teorema da divergência o fluxo} = 0.$$

- Dado  $F(x, y, z) = (z, y, x)$ , calcule o fluxo pela superfície do paralelepípedo com vértices  $(0, 0, 0)$  e  $(1, 2, 3)$ . Calculamos

$$\operatorname{div}(F) = 1 + 1 + 1 = 3$$

Com isto, temos que

$$\iiint_{[0,1] \times [0,2] \times [0,3]} 3 dV = 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 18$$

Pelo teorema da divergência o fluxo é 18.

- Vamos utilizar o teorema da Divergência para calcular o fluxo de  $F(x, y, z) = (xz, yz, z^2)$  através da superfície da região limitada por  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ . Calculamos

$$\operatorname{div}(F) = z + z + 2z = 4z,$$

como

$$\iiint_{B(0,2)} 4z dV = 0$$

Pelo teorema da divergência o fluxo é 0.

- Seja  $F(x, y, z) = (y^2, z^2, x^2)$ . Calcule o fluxo pela superfície da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ . Calculamos

$$\operatorname{div}(F) = 2y + 2z + 2x = 2(x + y + z),$$

como

$$\Rightarrow \iiint_V 2(x + y + z) dV = 0$$

Pelo teorema da divergência o fluxo é 0.

- Seja  $\vec{F}(x, y, z) = (x^2y, yz^2, xz^2)$ . Calcule o fluxo através da superfície do cubo  $0 \leq x, y, z \leq 1$ . Calculamos

$$\operatorname{div}(F) = 2xy + z^2 + 2xz,$$

Como

$$\iiint_{[0,1]^3} (2xy + z^2 + 2xz) dV = 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{3} + 1 = \frac{7}{3}$$

Pelo teorema da divergência o fluxo é  $\frac{7}{3}$ .

- Mostre que para  $\vec{F}(x, y, z) = \nabla \phi(x, y, z)$  com  $\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ , o fluxo através da superfície da esfera de raio  $R$  centrada na origem é igual a  $4\pi R^2 \cdot 2R = 8\pi R^3$ .

Calculamos

$$F = \nabla \phi = (2x, 2y, 2z), \quad \operatorname{div}(F) = 6$$

Com isto

$$\iiint_{B(0,R)} 6 dV = 6 \cdot \frac{4\pi R^3}{3} = 8\pi R^3$$

Pelo teorema da divergência o fluxo é  $8\pi R^3$ .

# IV

## Aplicações

<b>27</b>	<b>Aplicações</b> .....	<b>241</b>
27.1	Aplicação 1: Método do gradiente descendente	
27.2	Aplicação 2: Teoria de probabilidade	
27.3	Aplicação 3: Fluxo de um campo através de uma superfície	
27.4	Aplicação 4: Lei de Gauss de campo elétrico.	
27.5	Aplicação 5: Identidades de Green.	
27.6	Aplicação 6: Lei de conservação de massa e de momento	

Em elaboração

## 27. Aplicações

Como dizemos anteriormente, o cálculo vetorial é uma das ferramentas matemáticas mais poderosas e amplamente utilizadas na física, na engenharia e em diversas ciências aplicadas. Ele surge quando começamos a estudar não apenas funções escalares (como temperatura ou densidade em um ponto), mas também campos vetoriais — por exemplo, o campo de velocidades de um fluido, ou o campo elétrico e magnético em uma região do espaço.

O cálculo vetorial fornece uma ponte entre a matemática e o mundo físico. Os grandes teoremas — como o Teorema de Green, o Teorema de Stokes e o Teorema da Divergência (Gauss) — não são apenas ferramentas formais: eles expressam princípios de conservação fundamentais, como o de conservação de energia ou conservação da massa.

Tentaremos mostrar aqui algumas aplicações dos resultados vistos.

### 27.1 Aplicação 1: Método do gradiente descendente

O problema que queremos abordar aqui é o seguinte: Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $a \in U$  um ponto. Sob quais hipóteses em  $f$  e  $U$  podemos achar uma sequência de pontos  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  que converge ao mínimo da função isto é,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \text{mínimo da função}.$$

Vimos anteriormente que  $\nabla f(x)$  aponta na direção de crescimento máximo de  $f$  no ponto  $x$ . Portanto, se estamos num ponto  $x_0$  e queremos ir para um ponto  $x_1$  tal que  $f(x_0) > f(x_1)$  então temos que andar na direção  $-\nabla f(x_0)$ , isto é, temos que procurar um ponto da forma

$$x_1 = x_0 - \gamma \nabla f(x_0).$$

No entanto, se  $\gamma$  for muito grande, podemos acabar indo num ponto  $x_1$  tal que  $f(x_1) > f(x_0)$

■ **Exemplo 27.1** Considere  $f(x) = 1 + x^2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e suponha que estamos no ponto  $x_0 = -1/2$ . Neste caso temos que

$$\nabla f(x) = 2x \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\frac{1}{2} + \gamma.$$

Se  $\gamma = \frac{3}{2}$ , por exemplo, então  $x_1 = 1$  e  $f(x_1) = 2 > f(x_0)$ . ■

Portanto, se consideramos  $x_0 = a$  e definimos

$$x_1 = x_0 - \gamma \nabla f(x_0)$$

Temos que determinar um valor de  $\gamma > 0$  para que  $f(x_1) < f(x_0)$ . Tudo indica que  $f(x_1) < f(x_0)$  pois estamos avaliando  $f$  em um ponto na direção contrária do gradiente, vejamos então como determinar o valor de  $\gamma$  adequado: Aplicamos Taylor em  $f(x_0 + t(x_1 - x_0))$

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x_1 - x_0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \partial_i \partial_j f((1-t)x_0 + tx_1) (x_1 - x_0)_i (x_1 - x_0)_j \\ &= f(x_0) - \gamma \|\nabla f(x_0)\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \partial_i \partial_j f((1-t)x_0 + tx_1) (x_1 - x_0)_i (x_1 - x_0)_j. \end{aligned}$$

A matriz

$$A = (\partial_i \partial_j f((1-t)x_0 + tx_1))_{ij}$$

é simétrica, e portanto, pode ser diagonalizada. Assuma que, para cada  $t \in [0, 1]$  podemos escolher um  $L_t$ , o maior dos autovalores. Então

$$\sum_{i,j=1}^n \partial_i \partial_j f((1-t)x_0 + tx_1) (x_1 - x_0)_i (x_1 - x_0)_j \leq L_t \|x_1 - x_0\|^2 = L_t \gamma^2 \|\nabla f(x_0)\|^2.$$

Seja  $L = \sup_{t \in [0,1]} L_t$ , temos então que

$$\begin{aligned} f(x_1) &\leq f(x_0) - \gamma \|\nabla f(x_0)\|^2 + \frac{1}{2} L_t \gamma^2 \|\nabla f(x_0)\|^2 \\ &= f(x_0) - \gamma \left(1 - \frac{L\gamma}{2}\right) \|\nabla f(x_0)\|^2. \end{aligned}$$

Portanto, se  $\gamma < \frac{2}{L}$  temos que

$$f(x_1) < f(x_0).$$

Analogamente, se repetimos o procedimento para  $x_1$  obteremos um novo  $\gamma$  e um  $x_2 = x_1 - \gamma \nabla f(x_1)$  tal que

$$f(x_2) < f(x_1),$$

E assim continuando, teremos que

$$x_{i+1} = x_i - \gamma_i \nabla f(x_i) \quad \forall i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

então

$$f(x_{i+1}) < f(x_i) < \dots < f(x_1) < f(x_0).$$

Temos assim um método para nos aproximar de um mínimo local. Este método é conhecido como **método do gradiente** ou **método do máximo declive**.

Por último, o algoritmo que vimos acima vai funcionar se, por exemplo, assumimos que  $U$  é uma região tal que para quaisquer dois pontos  $x, y \in U$  temos que

$$tx + (1-t)y \in U \quad \forall t \in [0, 1]$$

isto é,  $U$  é **Convexo**. Pedimos isto para poder aplicar Taylor. Também temos que pedir que

$$\sum_{i,j=1}^n \partial_i \partial_j f((1-t)x_0 + tx_1) (x_1 - x_0)_i (x_1 - x_0)_j \leq L \|x_1 - x_0\| = L_t \gamma \|\nabla f(x_0)\|^2.$$

para um  $L < \infty$  fixo. Isto último, pelo teorema do valor médio, acontece por exemplo, se  $\nabla f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  é **Lipschitz**, isto é  $\nabla f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que

$$d(\nabla f(x), \nabla f(y)) \leq L d(x, y) \quad \forall x, y \in U.$$

■ **Exemplo 27.2** Seja  $A$  uma matriz simétrica, definida positiva e de tamanho  $n \times n$  e  $b$  uma matriz de tamanho  $n \times 1$ , ambas com entradas reais. Considere  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2} (x_1 \ \cdots \ x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - (x_1 \ \cdots \ x_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Calculamos

$$\nabla f(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

e observamos que

$$\partial_i \partial_k f(x_1, \dots, x_n) = a_{ik} \quad \forall i, k = 1 \dots n.$$

Pelo que vimos de máximos e mínimos, o ponto mínimo é no ponto  $(x_1^*, \dots, x_n^*)$  em que

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Sabemos onde queremos chegar, vamos então aplicar o método de gradiente para ver como funciona. Denotamos por

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad x = (x_1 \ \cdots \ x_n) \quad \text{e} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Então

$$f(x) = xAx^T - xb \quad \text{e} \quad \nabla f(x) = Ax^T - b$$

Do método do gradiente temos que se  $x_0$  é um ponto qualquer, então a sequência que tende ao ponto mínimo  $x^*$  será

$$x_{i+1} = x_i - \gamma \nabla f(x_i).$$

para um  $\gamma = \gamma(A)$  constante. ■

Antes de continuar com as aplicações, mostramos o seguinte resultado que será útil para os cálculos posteriores

**Teorema 27.1** Seja  $U \subset \mathbb{R}^3$  um conjunto fechado e limitado e seja  $f: (a, b) \times U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável que denotamos por  $f(t, x, y, z)$ , e tal que  $\partial_t f: (a, b) \times U \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua. Se

$$F(t) = \iiint_U f(t, \cdot) dV$$

então  $F: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua e, mais ainda,

$$\frac{d}{dt} F(t) = \iiint_U \partial_t f(t, \cdot) dV$$

*Demonstração.* Primeiramente observamos que

$$F(t+h) - F(t) = \iiint_U (f(t+h, \cdot) - f(t, \cdot)) dV = \iiint_U \left( \int_t^{t+h} \partial_t f(s, \cdot) dt \right) dV = \int_t^{t+h} \left( \iiint_U \partial_t f(s, \cdot) dV \right) ds$$

Como  $\partial_t f$  é contínua temos que a continuidade segue diretamente da integral.

Agora provamos a diferenciabilidade. Como, pelo teorema do valor médio, temos

$$\frac{F(t+h) - F(t)}{h} = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \left( \iiint_U \partial_t f(s, \cdot) dV \right) ds = \iiint_U \partial_t f(s_h, \cdot) dV$$

para algum  $s_h \in [t, t+h]$ , aplicando  $\lim_{h \rightarrow 0}$  nos dois lados da igualdade temos

$$F'(t) = \iiint_U \partial_t f(t, \cdot) dV.$$

■

**Obs.**

Um resultado similar vale para o caso em que  $f : \mathbb{R}^k \times U \rightarrow \mathbb{R}$ , neste caso

$$F(t_1, \dots, t_k) = \iiint_U f(t_1, \dots, t_k, \cdot) dV$$

e

$$\partial_{i_1} \dots \partial_{i_n} F(t_1, \dots, t_k) = \iiint_U \partial_{i_1} \dots \partial_{i_n} f(t_1, \dots, t_k, \cdot) dV.$$

## 27.2 Aplicação 2: Teoria de probabilidade

Uma **variável aleatória** é uma função que associa a cada resultado de um experimento aleatório um número real. Formalmente, seja  $\Omega$  o espaço amostral de um experimento aleatório. Uma variável aleatória é uma função

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$$

que satisfaz certas propriedades de "mensurabilidade" (não entraremos em detalhes aqui, só diremos que o conceito é para garantir que seja possível calcular probabilidades associadas a intervalos de valores de  $X$ ). Vamos estudar aqui o caso particular  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

Seja  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma variável aleatória contínua. Sua distribuição de probabilidade é descrita por uma **função densidade de probabilidade**, denotada por  $\rho(x, y)$ , tal que:

- $\rho(x, y) \geq 0$  para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
- $\iint_{\mathbb{R}^2} \rho d\mathbf{A} = 1$
- Para qualquer conjunto fechado  $U \subset \mathbb{R}^2$ , a probabilidade de  $X$  pertencer a esse intervalo é dada por:

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega, X(\omega) \in U\}) = \iint_U \rho d\mathbf{A}.$$

A função densidade de probabilidade  $\rho(x, y)$  não fornece diretamente a probabilidade de  $X$  assumir um valor específico (isso seria zero), mas sim a *densidade de probabilidade* em torno desse valor. A probabilidade é interpretada como a *volume definido baixo a superfície definida pela densidade*.

Observamos que, naturalmente, temos

- $\mathbb{P}[\Omega] = 1$ ,

- $0 \leq \mathbb{P}[W] \leq 1$  para todo conjunto  $W$  para o qual pode ser calculada a área.
- Se temos uma família de eventos  $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$  ( $E_i \subset \Omega$  "mensuráveis") então

$$\mathbb{P}[U_{i=1}^{\infty}] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[E_i].$$

A esperança matemática da variável aleatória  $X$  é definida como: o vetor  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$  em que

$$\mu_i = \mathbb{E}[X_i] = \int_{\mathbb{R}^2} x_i \rho \, d\mathbf{A}$$

de modo geral, se  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , contínua ou diferenciável, temos que  $f \circ X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é também uma variável aleatória. Neste caso definimos

$$\mathbb{E}[f(X)] = \int_{\mathbb{R}^2} f \rho \, d\mathbf{A}$$

Da mesma forma, a variância escalar de uma variável  $X \in \mathbb{R}$  é dada por:

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[|X - \mathbb{E}[X]|^2]$$

e a matriz de covariância é uma matriz simétrica  $\Sigma$  cujas entradas são

$$\Sigma_{ij} = \mathbb{E}[(\mathbf{X}_j - \mathbb{E}[\mathbf{X}_j])(\mathbf{X}_i - \mathbb{E}[\mathbf{X}_i])] = \left( \int_{\mathbb{R}^2} (x_i - \mu_i) \right) \cdot \left( \int_{\mathbb{R}^2} (x_j - \mu_j) \right)$$

Esta matriz representa a dispersão dos dados ao redor da média e é fundamental em estatística multivariada.

A função geradora de momentos (M.G.F.) de uma variável aleatória  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$  é definida como:

$$M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \mathbb{E}[e^{\mathbf{t}^T \mathbf{X}}] = \int_{\mathbb{R}^2} e^{t_1 x + t_2 y} \rho(x, y) \, dx dy.$$

Derivando  $M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})$  em relação a  $\mathbf{t}$  e avaliando em  $\mathbf{t} = 0$ , obtemos os momentos da distribuição:

$$\left. \frac{\partial M_{\mathbf{X}}}{\partial t_i} \right|_{\mathbf{t}=0} = \mathbb{E}[X_i], \quad \left. \frac{\partial^2 M_{\mathbf{X}}}{\partial t_i \partial t_j} \right|_{\mathbf{t}=0} = \text{Cov}(X_i, X_j)$$

■ **Exemplo 27.3** A **distribuição normal** é a distribuição de uma variável aleatória  $X = (X_1, X_2)$  cuja densidade de probabilidade é da forma

$$\rho(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{(x^2 + y^2)}{2\sigma^2}\right).$$

para  $\sigma > 0$ . Vejamos que a função acima, de fato, é uma densidade de probabilidade:

- Claramente  $\rho(x, y) \geq 0$ .
- Definimos

$$x = \sigma r \cos(\theta) \quad y = \sigma r \sin(\theta) \quad \Rightarrow \quad dx dy = \sigma^2 r \, dr d\theta$$

Então

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} \rho \, d\mathbf{A} &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}r^2} r \, dr d\theta \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} (1 - e^{-\frac{R^2}{2}}) = 1. \end{aligned}$$

Em particular, notamos o seguinte: temos mostrado que

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sigma}\right)^2\right]} dx dy = 1$$

que, podemos escrever como

$$\left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2} dx \right) \cdot \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sigma}\right)^2} dy \right) = 1$$

ou, equivalentemente

$$\left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2} dx \right)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2} dx = 1}$$

Com isto, calculamos a função geradora de momentos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{sX_1+sX_2}] &= \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2 + sx - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sigma}\right)^2 + ty} dx dy \\ &= e^{\frac{1}{2}\sigma^2(s^2+t^2)} \left( \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(x-\sigma^2 s)^2}{2\sigma^2}} dx \right) \cdot \left( \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(y-\sigma^2 t)^2}{2\sigma^2}} dy \right) \\ &= e^{\frac{1}{2}\sigma^2(s^2+t^2)} \end{aligned}$$

Com isto podemos calcular

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_1] &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t,s=0} \mathbb{E}[e^{sX_1+sX_2}] = 0 \\ \mathbb{E}[X_2] &= \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{t,s=0} \mathbb{E}[e^{sX_1+sX_2}] = 0 \\ \mathbb{E}[X_1^2] &= \left. \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right|_{t,s=0} \mathbb{E}[e^{sX_1+sX_2}] = \sigma^2 \\ \mathbb{E}[X_2^2] &= \left. \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right|_{t,s=0} \mathbb{E}[e^{sX_1+sX_2}] = \sigma^2 \\ \mathbb{E}[X_1 X_2] &= \left. \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} \right|_{t,s=0} \mathbb{E}[e^{sX_1+sX_2}] = 0 \end{aligned}$$

Então temos que a esperança é dada pelo vetor  $\mu = (0, 0)$ , a variação é

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X_1 - 0)^2 + (X_2 - 0)^2] = 2\sigma^2$$

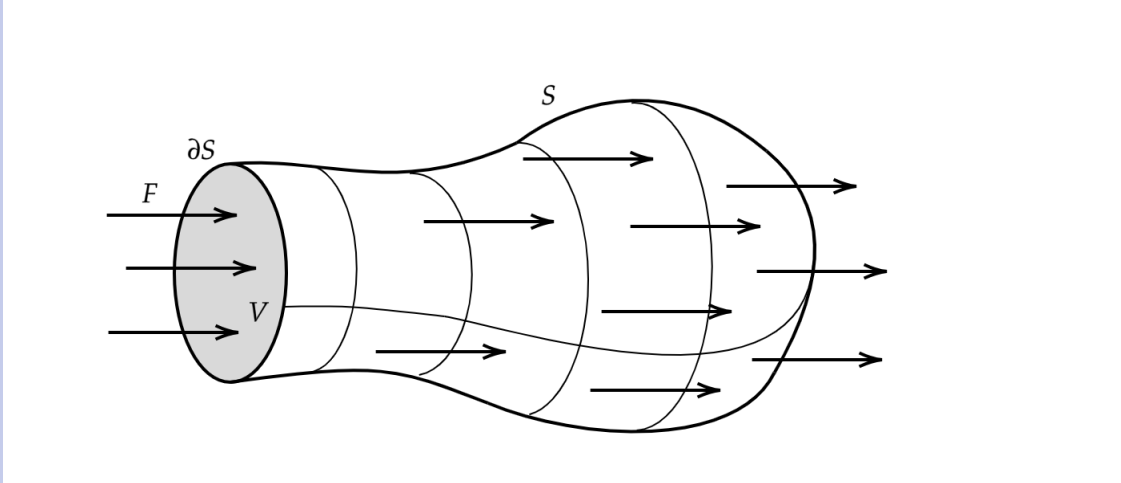
e a matriz de covariância está dada por

$$\Sigma = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

■

### 27.3 Aplicação 3: Fluxo de um campo através de uma superfície

Vamos a estudar o caso em que temos uma rede e queremos calcular a quantidade de material que podemos capturar com ela.



Para isto, suponha que a superfície  $S$  seja o corpo a rede e que  $V$  seja a parte aberta da rede e orientamos a  $S$  com o vetor normal apontando para fora.

Suponha que o material a ser capturado está dado em função de um campo vetorial  $F$  que indica a direção com a qual o material entra na rede. Desta forma, a quantidade de material capturado está dado pelo fluxo do campo vetorial a travez da rede.

$$\iint_S F \cdot d\mathbf{A}$$

Assumimos que a superfície pode ser parametrizada por  $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  e que denotamos por  $\phi(u, v)$  mas que não sabemos bem como ela é. Rápidamente observamos que, dependendo do formato da rede, este cálculo pode ser muito difícil.

Para tratar deste cómputo, assumimos que podemos tampar a rede com  $V$  e temos assim um sólido  $U$  delimitado por  $S \cup D$ . Orientamos então  $V$  também com o vetor normal apontando para fora de modo a ter, em  $U$ , uma orientação. Sabemos, pelo teorema da divergência, que

$$\iiint_U \mathbf{div}(F) dV = \iiint_{S \cup D} F \cdot d\mathbf{A} = \iint_S F \cdot d\mathbf{A} + \iint_V F \cdot d\mathbf{A}.$$

Podemos ter o caso em que o material, de alguma forma some no interior da rede, o que é muito raro. Este seria o caso em que está passando material pela boca da rede mas nem todo ele é capturado na rede, por exemplo de um liquido compressível ( $\mathbf{div}(F) \neq 0$ ). No entanto, vamos assumir que este não é o caso e que estamos no caso incompressível, isto é  $\mathbf{div}(F) = 0$ . Esta hipótese permite uma grande simplificação, visto que

$$\iint_S F \cdot d\mathbf{A} = - \iint_V F \cdot d\mathbf{A}.$$

Se  $F$  é incompressível ( $\mathbf{div}(F) = 0$ ) então vimos que existe um campo vetorial  $H$  tal que

$$F = \mathbf{rot}(H).$$

Com isto temos, pelo teorema de Stokes, que se  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  é a parametrização de  $\partial S$  que respeita a orientação de  $V$ .

$$\begin{aligned} \iint_S F \cdot d\mathbf{A} &= - \iint_V F \cdot d\mathbf{A} \\ &= - \int_{\partial S} F \cdot d\gamma \\ &= - \int_{\partial S} \mathbf{rot}(H) \cdot d\gamma \\ &= - \int_{\partial S} H \cdot d\gamma. \end{aligned}$$

Então, para saber a quantidade de material que a rede irá capturar basta determinar  $H$  e fazer o cálculo na borda da rede.

■ **Exemplo 27.4** Imagine uma rede que é um parabolóide da forma

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = 4 - (x^2 + y^2), z \leq 0\}$$

e temos um campo vetorial da forma  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dado por  $F(x, y, z) = (x, y, -2z)$ . Observamos que

$$\text{div}(F) = 0.$$

Parametrizamos a rede por

$$\phi(x, y) = (x, y, 4 - x^2 - y^2) \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Então, devemos escolher a orientação em que o normal aponta para fora, isto é,

$$-(\partial_x \phi \times \partial_y \phi)(x, y, z) = (-2x, -2y, -1)$$

Assim

$$\iint_S F \cdot d\mathbf{A} = \iint_D (x, y, -8 + 2x^2 + 2y^2) \cdot (-2x, -2y, -1) \, dx dy \quad (27.1)$$

$$= \iint_D 8 - 4(x^2 + y^2) \, dx dy \quad (27.2)$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} (8 - 4r^2)r \, d\theta dr \quad (27.3)$$

$$= 2\pi(4r^2 - r^4)|_0^2 = 0. \quad (27.4)$$

Por outro lado, observamos que

$$H(x, y, z) = (yz, -xz, 0) \Rightarrow \text{rot}(H) = F.$$

e, como  $\gamma(t) = (2\cos(t), -2\sin(t), 0)$  é a curva que parametriza a fronteira da rede com a orientação induzida, temos que

$$H(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = (2\cos(t), -2\sin(t), 0) \cdot (-2\sin(t), -2\cos(t), 0) = 0$$

portanto

$$\oint_{\partial S} H \cdot d\gamma = 0.$$

## 27.4 Aplicação 4: Lei de Gauss de campo elétrico.

O campo elétrico é uma grandeza vetorial que descreve a força por unidade de carga exercida sobre uma carga elétrica colocada em um ponto do espaço. Ele é gerado por outras cargas elétricas e pode ser representado como um campo vetorial contínuo no espaço. O campo elétrico estático é conservativo, o que significa que ele é um campo gradiente: existe uma função escalar  $\psi(x, y, z)$  chamada de potencial elétrico, tal que

$$E(x, y, z) = -\nabla \psi(x, y, z)$$

Como vimos no teorema fundamental das integrais de linha, essa propriedade implica que o trabalho realizado pelo campo elétrico em mover uma carga entre dois pontos independe do caminho percorrido, isto é, como o campo é conservativo, para uma curva qualquer  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , que não passa pela origem, temos

$$\int_C E \cdot d\gamma = \psi(\gamma(b)) - \psi(\gamma(a)).$$

De modo geral, o potencial  $\psi$  é dado por uma função  $\psi : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\psi(x, y, z) = -\frac{K}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

onde  $K$  é uma constante que depende da carga  $q$  e da permissividade do vácuo  $\epsilon_0$ . No caso geral

$$K = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}$$

Então o campo vetorial  $\nabla\psi : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$  é dado por

$$E(x, y, z) = \nabla\psi(x, y, z) = \frac{K}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}(x, y, z)$$

Este tipo de expressão é muito similar também para o campo gravitacional cujo tratamento matemático é muito similar.

Uma das equações fundamentais do campo elétrico é a chamada Lei de Gauss. Esta lei estabelece uma relação entre o fluxo do campo elétrico através de uma superfície fechada e a carga elétrica total contida dentro dessa superfície. Ela afirma que o fluxo elétrico é proporcional à carga total interna, sendo uma das equações fundamentais do eletromagnetismo. Essa lei permite calcular campos elétricos em situações com alta simetria e é expressa de forma elegante com integrais de superfície, conectando conceitos centrais do cálculo vetorial à física.

Considere a esfera de raio  $r$  dada por

$$S_a = \{(x, y, z), x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$$

e considere a orientação dada pelo vetor normal apontando para fora.

Parametrizamos esta superfície por

$$\phi(u, v) = (a \cos(u) \sin(v), a \sin(u) \sin(v), \cos(v)) \quad (u, v) \in (0, 2\pi) \times (0, \pi)$$

Então

$$\partial_v \phi \times \partial_u \phi = (a^2 \sin(v))(\cos(u) \sin(v), \sin(u) \sin(v), \cos(v)).$$

Calculamos

$$\begin{aligned} \iint_{S_a} E \cdot d\mathbf{A} &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{K}{a^3} a(a^2 \sin(v)) \, du \, dv \\ &= K \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin(v) \, du \, dv = 4\pi K. \end{aligned}$$

Observamos que o resultado não depende do raio da esfera  $a$ .

Por outro lado, observamos que

$$\operatorname{div}(E)(x, y, z) = 0 \quad \forall (x, y, z) \neq (0, 0, 0).$$

De fato, como

$$\begin{aligned} \partial_x \left( \frac{x}{r^3} \right) &= \frac{1}{r^3} - 3 \frac{x^2}{r^5} \\ \partial_y \left( \frac{y}{r^3} \right) &= \frac{1}{r^3} - 3 \frac{y^2}{r^5} \\ \partial_z \left( \frac{z}{r^3} \right) &= \frac{1}{r^3} - 3 \frac{z^2}{r^5} \end{aligned}$$

temos que

$$\operatorname{div}(E)(x, y, z) = \frac{1}{r^3} - 3\frac{x^2}{r^5} + \frac{1}{r^3} - 3\frac{y^2}{r^5} + \frac{1}{r^3} - 3\frac{z^2}{r^5} = 0.$$

Portanto, por um resultado que vimos anteriormente, para qualquer superfície fechada  $S$  que delimita uma região  $U$  que contém  $(0, 0, 0)$  mas de forma tal que  $(0, 0, 0) \notin S$  existe uma bola de raio  $\varepsilon > 0$  centrada na origem tal que  $B(\varepsilon, (0, 0, 0)) \subset U$  e  $S_\varepsilon = \partial B(\varepsilon, (0, 0, 0))$

$$\iint_S E \cdot d\mathbf{A} = \iint_{S_\varepsilon} E \cdot d\mathbf{A} = 4\pi.$$

No entanto, observamos que o teorema da divergência não pode ser aplicado ao interior de  $B(\varepsilon, (0, 0, 0))$  pois  $\operatorname{div}(F)$  não está definido em  $(0, 0, 0)$ . Para definir o divergente neste caso temos que recorrer ao caso de funções generalizadas e, com isto, o divergente pode ser definido a partir de uma delta de Dirac,  $\delta_{(a,b,c)}(x, y, z)$ , que é uma "função" tal que

$$\iiint_V \delta_{(a,b,c)} \cdot f \, dV = f(a, b, c) \quad \forall V, (a, b, c) \in V$$

para toda função contínua  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . Com isto, podemos escrever o teorema da divergência na sua forma diferencial como

$$\operatorname{div}(E) = 4\pi K \delta_{(0,0,0)},$$

ou, equivalentemente,

$$\Delta \psi = \operatorname{div}(\nabla \psi) = 4\pi K \delta_{(0,0,0)}.$$

## 27.5 Aplicação 5: Identidades de Green.

Sejam  $f, g : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções de classe  $C^2$ . Então, por um cálculo direto temos que

$$\operatorname{div}(f \nabla g) = \nabla f \cdot \nabla g + f \Delta g$$

Seja  $U \subset \mathbb{R}^3$  um conjunto fechado e limitado, tal que sua fronteira é uma superfície  $S$  que é regular por partes, orientada com vetor normal apontando para fora, temos a **Primeira identidade de Green**

$$\iiint_U [\nabla f \cdot \nabla g + f \Delta g] \, dV = \iiint_U \operatorname{div}(f \nabla g) \, dV = \iint_S f \nabla g \cdot d\mathbf{A}$$

**Corolário 27.1** Seja  $U \subset \mathbb{R}^3$  um conjunto fechado e limitado, tal que sua fronteira é uma superfície  $S$  que é regular por partes, orientada com vetor normal apontando para fora. Assuma que  $u : [0, +\infty) \times U \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função que satisfaz

$$\partial_t u = \Delta u, \quad u(0, (x, y, z)) = 0 \quad \text{e} \quad u(t, (x, y, z)) = 0 \quad \text{para todo } (x, y, z) \in S.$$

Então  $u \equiv 0$

*Demonstração.* Definimos primeiramente

$$g(t) = \iiint_U |u|^2 \, dV$$

observamos que  $g(t) \geq 0$  e que

$$\begin{aligned}
 \partial_t g(t) &= \iiint_U 2u \partial_t(u) dV \\
 &= 2 \iiint_U u \Delta(u) dV \\
 &= -2 \iiint_U |\nabla u|^2 dV + 2 \iiint_U \mathbf{div}(u \nabla u) \\
 &= -2 \iiint_U |\nabla u|^2 dV + 2 \iint_S u \nabla u \cdot d\mathbf{A} \\
 &= -2 \iiint_U |\nabla u|^2 dV \leq 0
 \end{aligned}$$

Como  $g(t) \geq 0$ ,  $g(0) = 0$  e  $g'(t) \leq 0$  temos que  $g(t) \equiv 0$ . Portanto,  $u \equiv 0$ . ■

■ **Exemplo 27.5** Vejamos uma aplicação desta identidade para a **Transferência de Calor**

Considere um corpo tridimensional ocupando uma região limitada com fronteira suave  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Seja  $u(x, y, z, t)$  a temperatura no ponto  $(x, y, z)$  no instante  $t$ . Suponha que o material possui calor específico  $c$  e densidade  $\rho$ , ambos constantes. A densidade de energia térmica interna é dada por:

$$e(x, y, z, t) = c\rho u(x, y, z, t).$$

A energia térmica total contida no corpo em um instante  $t$  é:

$$E(t) = \iiint_{\Omega} c\rho u(x, y, z, t) dV.$$

Admitindo que a condução de calor no interior do corpo é descrita pela equação do calor (sem fontes internas):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \Delta u,$$

onde  $\kappa = \frac{k}{c\rho}$  é a difusividade térmica e  $k$  a condutividade térmica.

Multiplicando ambos os lados da equação por  $c\rho$ , temos:

$$c\rho \kappa \Delta u = c\rho \frac{\partial u}{\partial t} := \frac{\partial e}{\partial t}.$$

Assim, a taxa de variação da energia térmica interna do corpo é:

$$\frac{dE}{dt} = \iiint_{\Omega} \frac{\partial e}{\partial t} dV = c\rho \kappa \iiint_{\Omega} \Delta u dV.$$

Aplicando a **identidade de Green (ou o Teorema da Divergência)** em  $\mathbb{R}^3$ , temos:

$$\iiint_{\Omega} \Delta u dV = \iint_{\partial\Omega} \nabla u \cdot d\mathbf{A} = \iint_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} dA,$$

onde  $\frac{\partial u}{\partial n}$  é a derivada direcional de  $u$  na direção do vetor normal externo  $\vec{n}$  à superfície  $\partial\Omega$ .

Substituindo:

$$\frac{dE}{dt} = c\rho \kappa \iint_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} dS.$$

Por outro lado, pela **lei de Fourier**, o vetor densidade de fluxo de calor é dado por:

$$\vec{q} = -k\nabla u,$$

e o fluxo total de calor saindo do corpo é:

$$\Phi(t) = -k \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} dS.$$

Portanto, obtemos a seguinte relação:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{c\rho\kappa}{k} \Phi(t).$$

Esse resultado mostra que a taxa de variação da energia térmica interna do corpo é determinada unicamente pelo fluxo de calor através da sua superfície. A identidade de Green permite, assim, conectar uma quantidade volumétrica (a energia interna) a uma quantidade superficial (fluxo de calor pela fronteira), expressando de forma clara a conservação da energia em sistemas térmicos. ■

Trocando o lugar de  $f$  e  $g$  na primeira identidade de Green e comparando ambas expressões, obtemos a **Segunda identidade de Green**

$$\iiint_U [f\Delta g - g\Delta f] dV = \iint_S (f\nabla g - g\nabla f) \cdot d\mathbf{A}$$

Portanto, seja

$$\begin{aligned} \iiint_U \Delta(f \cdot g) dV &= \iiint_U \mathbf{div}(\nabla(f \cdot g)) dV \\ &= \iint_S (\nabla(f \cdot g)) \cdot d\mathbf{A} \\ &= \iint_S g\nabla f \cdot d\mathbf{A} + \iint_S f\nabla g \cdot d\mathbf{A} \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que

$$\iiint_U \Delta(f \cdot g) dV = \iiint_U [g\Delta f + f \cdot \Delta g + \nabla f \cdot \nabla g] dV.$$

Portanto, temos que

$$\iint_S g\nabla f \cdot d\mathbf{A} + \iint_S f\nabla g \cdot d\mathbf{A} = \iiint_U [g\Delta f + f \cdot \Delta g + \nabla f \cdot \nabla g] dV$$

Em particular, no caso em que  $g \equiv 1$  temos que

$$\iint_S \nabla f \cdot d\mathbf{A} = \iiint_U \Delta f dV.$$

■ **Exemplo 27.6** Vejamos um exemplo de aplicação da Segunda Identidade de Green na Eletrostática.

Na eletrostática, vimos que o potencial elétrico  $V(x, y, z)$  gerado por uma densidade de carga  $\rho(x, y, z)$  satisfaz a equação de Poisson:

$$\mathbf{div}(E)(x, y, z) = \mathbf{div}(\nabla\psi)(x, y, z) = \Delta V(x, y, z) = -\rho(x, y, z).$$

Escolhemos como função auxiliar a função de Green para o espaço tridimensional:

$$w(x, y, z) = G((x, y, z), (\xi_1, \xi_2, \xi_3)) = \frac{1}{4\pi\sqrt{(x-\xi_1)^2 + (y-\xi_2)^2 + (z-\xi_3)^2}}$$

Sabemos, pelo que vimos na aplicação 2, que

$$\Delta G((x, y, z), (\xi_1, \xi_2, \xi_3)) = -\delta_{(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}(x, y, z)$$

Aplicando a segunda identidade de Green com essas escolhas:

$$\iiint_U (\psi \Delta G - G \Delta \psi) dV = \iint_{\partial \Omega} (\psi \nabla G - G \nabla \psi) \cdot d\mathbf{A}$$

Substituindo  $\Delta \psi = -\rho$  e  $\Delta G = -\delta_{(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}$ :

$$\int_{\Omega} (-\psi \delta_{(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} + G \rho) dx = \iint_{\partial \Omega} (\psi \nabla G - G \nabla \psi) \cdot d\mathbf{A}$$

O termo com a função delta dá:

$$-\psi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + \int_U \frac{1}{4\pi\sqrt{(x-\xi_1)^2 + (y-\xi_2)^2 + (z-\xi_3)^2}} \rho dV = \text{termo de contorno}$$

Se assumirmos que estamos no espaço todo  $\mathbb{R}^3$  e que as funções decaem suficientemente rápido no infinito, o termo de contorno desaparece. Assim, obtemos:

$$\psi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi\sqrt{(x-\xi_1)^2 + (y-\xi_2)^2 + (z-\xi_3)^2}} \rho(x, y, z) dV$$

Este resultado mostra que o potencial elétrico  $\psi$  em um ponto  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  é uma média ponderada das cargas  $\rho(x, y, z)$ , com o peso dado pelo inverso da distância. É a solução fundamental da equação de Poisson em  $\mathbb{R}^3$ , deduzida via a segunda identidade de Green. ■

## 27.6 Aplicação 6: Lei de conservação de massa e de momento

A lei de conservação de massa afirma que, em um sistema isolado, a massa total permanece constante ao longo do tempo — ela não pode ser criada nem destruída, apenas redistribuída. Já a lei de conservação do momento linear diz que, na ausência de forças externas, a quantidade de movimento (produto da massa pela velocidade) de um sistema permanece constante. Ambas as leis são fundamentais na física e aparecem naturalmente em problemas de fluxo, dinâmica de fluidos e mecânica, onde o cálculo vetorial permite expressá-las por meio de equações diferenciais e integrais. Vejamos como derivar essas equações no caso de um fluido.

Seja  $X : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma função diferenciável tal que, para cada  $t \in \mathbb{R}$  temos que  $X(t, \cdot) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é um campo vetorial. Neste caso, dizemos que  $X$  é um **campo vetorial não autônomo**. Considere uma função  $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que

$$\partial_t \phi(x, y, z) = X(t, \phi(x, y, z)) \quad \phi_0(x, y, z) = (x, y, z)$$

onde denotamos  $\phi_t(\cdot) = \phi(t, \cdot)$ , é dito **fluxo do campo vetorial**  $X$ .

Observamos que, para cada  $(a, b, c)$  temos que  $\gamma(t) = \phi_t(a, b, c)$  é uma curva que passa no ponto  $(a, b, c)$  quando  $t = 0$  e, mais ainda,

$$\gamma'(t) = \partial_t \phi_t(a, b, c) = X(\phi_t(a, b, c)) = X(\gamma(t)),$$

As curvas que satisfazem a relação acima recebem o nome de **curva integral de**  $X$ .

■ **Exemplo 27.7** • Seja  $X : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  o campo vetorial dado por

$$X(t, (x, y, z)) = 2\lambda t(x, y, z)$$

então

$$\phi_t(a, b, c) = e^{\lambda t^2}(x, y, z)$$

satisfaz

$$\begin{aligned}\phi_0(a, b, c) &= (a, b, c) \\ \partial_t \phi_t(a, b, c) &= 2\lambda t e^{\lambda t^2}(x, y, z) \\ &= X(t, \phi_t(a, b, c)).\end{aligned}$$

• Seja  $X : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  o campo vetorial dado por

$$X(t, (x, y, z)) = (-y, x, 0)$$

então

$$\phi_t(a, b, c) = (a \cos(t) - b \sin(t), a \sin(t) + b \cos(t), c)$$

satisfaz

$$\begin{aligned}\phi_0(a, b, c) &= (a, b, c) \\ \partial_t \phi_t(a, b, c) &= (-(a \sin(t) + b \cos(t)), a \cos(t) - b \sin(t), 0) \\ &= X(t, \phi_t(a, b, c)).\end{aligned}$$

**Lema 27.1** Considere o fluxo  $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  do campo vetorial  $X$ , isto é, a função  $\phi$  tal que

$$\partial_t \phi_t(x, y, z) = X(t, \phi_t(x, y, z)) \quad \phi_0(x, y, z) = (x, y, z)$$

Então, se

$$J_{\phi_t} = \begin{vmatrix} \partial_x \phi_t^1 & \partial_y \phi_t^1 & \partial_z \phi_t^1 \\ \partial_x \phi_t^2 & \partial_y \phi_t^2 & \partial_z \phi_t^2 \\ \partial_x \phi_t^3 & \partial_y \phi_t^3 & \partial_z \phi_t^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} - & \nabla \phi_1 & - \\ - & \nabla \phi_2 & - \\ - & \nabla \phi_3 & - \end{vmatrix}$$

para cada  $t$  temos que

$$\frac{d}{dt} J_{\phi_t} = \operatorname{div}(X)(\phi_t) J_{\phi_t}.$$

*Demonstração.* Denotamos

$$\phi_t(x, y, z) = (\phi_t^1(x, y, z), \phi_t^2(x, y, z), \phi_t^3(x, y, z)) \quad X(x, y, z) = (X_1(x, y, z), X_2(x, y, z), X_3(x, y, z)),$$

para todo  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . e observamos que, pelo teorema de Clairaut, temos

$$\begin{aligned}\partial_t \partial_x \phi_t^i(x, y, z) &= \partial_x \partial_t \phi_t^i(x, y, z) = \partial_x X_i(\phi_t(x, y, z)) \\ &= \partial_1 X_i(\phi_t(x, y, z)) \partial_x \phi_t^1(x, y, z) + \partial_2 X_i(\phi_t(x, y, z)) \partial_x \phi_t^2(x, y, z) + \partial_3 X_i(\phi_t(x, y, z)) \partial_x \phi_t^3(x, y, z)\end{aligned}$$

para  $i = 1, 2, 3$ . Com isto, temos que,

$$\partial_t \nabla \phi_t^i = (\partial_1 X_i) \nabla \phi_t^1 + (\partial_2 X_i) \nabla \phi_t^2 + (\partial_3 X_i) \nabla \phi_t^3,$$

e lembrando que determinante de matriz que possui duas linhas em que uma é múltipla da outra é zero, calculamos

$$\begin{aligned}
 \partial_t J_{\phi_t} &= \begin{vmatrix} \partial_t \partial_x \phi_t^1 & \partial_t \partial_y \phi_t^1 & \partial_t \partial_z \phi_t^1 \\ \partial_x \phi_t^2 & \partial_y \phi_t^2 & \partial_z \phi_t^2 \\ \partial_x \phi_t^3 & \partial_y \phi_t^3 & \partial_z \phi_t^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \partial_x \phi_t^1 & \partial_y \phi_t^1 & \partial_z \phi_t^1 \\ \partial_t \partial_x \phi_t^2 & \partial_t \partial_y \phi_t^2 & \partial_t \partial_z \phi_t^2 \\ \partial_x \phi_t^3 & \partial_y \phi_t^3 & \partial_z \phi_t^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \partial_x \phi_t^1 & \partial_y \phi_t^1 & \partial_z \phi_t^1 \\ \partial_x \phi_t^2 & \partial_y \phi_t^2 & \partial_z \phi_t^2 \\ \partial_t \partial_x \phi_t^3 & \partial_t \partial_y \phi_t^3 & \partial_t \partial_z \phi_t^3 \end{vmatrix} \\
 &= \partial_1 X_1 \begin{vmatrix} \partial_x \phi_t^1 & \partial_y \phi_t^1 & \partial_z \phi_t^1 \\ \partial_x \phi_t^2 & \partial_y \phi_t^2 & \partial_z \phi_t^2 \\ \partial_x \phi_t^3 & \partial_y \phi_t^3 & \partial_z \phi_t^3 \end{vmatrix} + \partial_2 X_2 \begin{vmatrix} \partial_x \phi_t^1 & \partial_y \phi_t^1 & \partial_z \phi_t^1 \\ \partial_x \phi_t^2 & \partial_y \phi_t^2 & \partial_z \phi_t^2 \\ \partial_x \phi_t^3 & \partial_y \phi_t^3 & \partial_z \phi_t^3 \end{vmatrix} + \partial_3 X_3 \begin{vmatrix} \partial_x \phi_t^1 & \partial_y \phi_t^1 & \partial_z \phi_t^1 \\ \partial_x \phi_t^2 & \partial_y \phi_t^2 & \partial_z \phi_t^2 \\ \partial_x \phi_t^3 & \partial_y \phi_t^3 & \partial_z \phi_t^3 \end{vmatrix} \\
 &= (\partial_1 X_1 + \partial_2 X_2 + \partial_3 X_3) \begin{vmatrix} \partial_x \phi_t^1 & \partial_y \phi_t^1 & \partial_z \phi_t^1 \\ \partial_x \phi_t^2 & \partial_y \phi_t^2 & \partial_z \phi_t^2 \\ \partial_x \phi_t^3 & \partial_y \phi_t^3 & \partial_z \phi_t^3 \end{vmatrix} \\
 &= \operatorname{div}(X) J_{\phi_t}.
 \end{aligned}$$

■ **Exemplo 27.8** • Seja  $X : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  o campo vetorial dado por

$$X(t, (x, y, z)) = 2\lambda t(x, y, z) \Rightarrow \operatorname{div}(X) = 6\lambda t.$$

Então

$$\phi_t(a, b, c) = e^{\lambda t^2}(x, y, z)$$

Calculamos

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} J_{\phi_t} &= \frac{d}{dt} \begin{vmatrix} e^{\lambda t^2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda t^2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda t^2} \end{vmatrix} \\
 &= \frac{d}{dt} e^{3\lambda t^2} \\
 &= 6\lambda t e^{3\lambda t^2} = 6\lambda t J_{\phi_t}.
 \end{aligned}$$

• Seja  $X : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  o campo vetorial dado por

$$X(t, (x, y, z)) = (-y, x, 0) \Rightarrow \operatorname{div}(X) = 0$$

Então

$$\phi_t(a, b, c) = (a \cos(t) - b \sin(t), a \sin(t) + b \cos(t), c)$$

Calculamos

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} J_{\phi_t} &= \frac{d}{dt} \begin{vmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= \frac{d}{dt} 1 \\
 &= 0 = 0 J_{\phi_t}.
 \end{aligned}$$

Assuma que numa região  $U \subset \mathbb{R}^3$  está cheia de um fluido e para cada ponto  $(x, y, z) \in U$  temos uma partícula que se movimenta no fluido no tempo  $t$ . Denotamos por  $X(t, (x, y, z))$  a velocidade da partícula no tempo  $t$ .

Assumimos também que, para cada tempo  $t$ , o fluido tem uma certa densidade de massa  $\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\rho_t(x, y, z)$  de modo tal que a massa do fluido em  $U$  no tempo  $t$  é

$$m(W, t) = \iiint_W \rho_t \, dV.$$

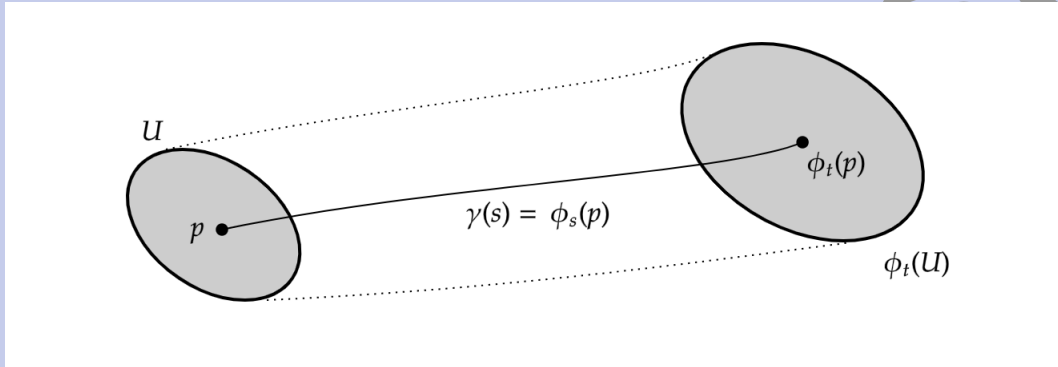
Assumimos que a massa não é criada nem destruída.

O princípio de conservação de massa diz que a massa total em  $U$  do fluido no tempo  $t$  é a mesma que havia no instante  $t = 0$ . Matematicamente, isto é

$$m(\phi_t(U), t) = m(U, 0) \Rightarrow \iiint_{\phi_t(U)} \rho_t dV = \iiint_U \rho_0 dV,$$

onde

$$\phi_t(U) = \{\phi_t(x, y, z), (x, y, z) \in U\}.$$



Vejamos o que significa isto. Observamos primeiramente que, pela fórmula de mudança de variáveis

$$\iiint_U \rho_0 dV = \iiint_{\phi_t(U)} \rho_t dV = \iiint_U \rho_t \circ \phi_t J_{\phi_t} dV$$

Como isto deve valer para qualquer região  $U$ , temos que

$$\rho_0 = \rho_t \circ \phi_t J_{\phi_t}$$

Derivando a identidade acima respeito do tempo, decorre a chamada **Equação de continuidade**:

$$[\partial_t \rho_t + X \rho_t + \mathbf{div}(X) \rho_t] (\phi_t) J_{\phi_t} = 0 \Rightarrow \partial_t \rho_t + \mathbf{div}(\rho_t X) = 0$$

No caso de um fluido incompressível, isto é a densidade  $\rho_t = cte$  a equação de continuidade pode ser reduzida a

$$\mathbf{div}(X) = 0$$

Isto quer dizer, a grosso modo, que o campo de velocidades  $X$  de um fluido incompressível tem divergente zero; ele não "expande" nem "encolhe" localmente.

■ **Exemplo 27.9** O campo vetorial  $F(x, y, z) = (x^3y, 2x^2yz, 0)$  não é incompressível visto que

$$\mathbf{div}(F)(x, y, z) = 3x^2y + 2x^2z \neq 0$$

No entanto, se inserirmos um termo da forma  $-(xz)^2 - 3x^2yz$  na terceira componente teremos modificado a um campo  $\tilde{F}(x, y, z) = (x^3y, 2x^2yz, -(xz)^2 - 3x^2yz)$  que é compressível visto que

$$\mathbf{div}(\tilde{F})(x, y, z) = 3x^2y + 2x^2z - 2xz^2 - 3x^2y = 0$$

Por outro lado, o **momento de um fluido** no instante  $t$  é definido pelo vetor:

$$M(W, t) = \left( \iiint_{\phi_t(W)} \rho_t X_1 dV, \iiint_{\phi_t(W)} \rho_t X_2 dV, \iiint_{\phi_t(W)} \rho_t X_3 dV \right)$$

Observar que esta equação é uma generalização de  $p = \text{massa} \times \text{velocidade}$ . Para fluido contínuo, as forças que atuam sobre uma porção de material são de dois tipos.

- as **forças de tensão**, pelas quais a porção do fluido é submetida a forças exercidas através de sua superfície pelo ambiente. Na mecânica dos fluidos, assume-se que as forças de tensão são determinadas por um vetor cujas entradas são da forma

$$\int_{\partial W} (\sigma(x, t) \cdot \mathbf{n})^i dA,$$

onde  $\sigma(x, t)$  é uma matriz quadrada, simétrica (sob hipóteses como ausência de torques internos), dependente do tempo, chamada de **tensor de tensões de Cauchy** e  $\mathbf{n}$  é o vetor normal unitário externo. O tensor de tensões nos permite calcular a força por unidade de área (também chamada de vetor de tração) que age sobre uma superfície com uma dada orientação  $\mathbf{n}$ .

O produto  $\sigma(x, t) \cdot \mathbf{n}$  é chamada de força por unidade de área e é compreendido da seguinte maneira: se  $\sigma$  tem componentes  $\sigma^{ij}$  e  $\mathbf{n}$  tem componentes  $n_k$ , então  $\sigma(x, t) \cdot \mathbf{n}$  é um vetor de componentes

$$(\sigma(x, t) \cdot \mathbf{n})^i = \sigma_{i1}n_1 + \sigma_{i2}n_2 + \sigma_{i3}n_3.$$

que representa a força por unidade de área que age sobre a superfície com normal  $\mathbf{n}$ .

Observamos que, pelo teorema da divergência, temos

$$\iint_{\partial W} (\sigma(x, t) \cdot \mathbf{n})^i dA = \iiint_W \operatorname{div}(\sigma^i) dV$$

onde

$$\sigma^i = (\sigma^{i1}, \sigma^{i2}, \sigma^{i3}).$$

- as **forças externas** como a gravidade ou um campo magnético, que exercem uma força por unidade de volume sobre o contínuo. Assumiremos que as forças externas são dadas por uma densidade de força  $Y$ , isto é por uma função vetorial  $Y: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , de forma tal que o total de forças de corpo atuando sobre  $W$  é um vetor de componentes

$$\int_W \rho Y_i dV.$$

Dizemos então que o **Balanceamento dos momentos** acontece se

$$\frac{d}{dt} M(W, t)^i = \iiint_{\phi_t(W)} \rho_t Y_i dV + \iint_{\phi_t(W)} \operatorname{div}(\sigma^i) dV$$

Isto é a variação de momentos é dado pela força externa (2da lei de Newton). Como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} M(W, t)^i &= \frac{d}{dt} \iiint_{\phi_t(W)} \rho_t X_i dV \\ &= \frac{d}{dt} \iiint_W \rho_t \circ \phi_t X_i(\phi_t) J_{\phi_t} dV \\ &= \iiint_W [\partial_t \rho_t + \nabla \rho_t \cdot X] X_i + \rho_t \partial_t X_i + \rho_t (\nabla X_i \cdot X) + \rho_t \operatorname{div}(X) X_i \circ \phi_t J_{\phi_t} dV \\ &= \iiint_{\phi_t(W)} [\partial_t \rho_t + \nabla \rho_t \cdot X] + \rho_t \partial_t X_i + \rho_t (\nabla X_i \cdot X) + \rho_t \operatorname{div}(X) X_i \circ \phi_t J_{\phi_t} dV \end{aligned}$$

Comparando as equações temos que a **equação de balanceamento dos momentos** é

$$(\partial_t \rho_t + \nabla \rho_t \cdot X) + \rho_t (\nabla X_i \cdot X) + \rho_t \operatorname{div}(X) X_i = \rho_t Y_i + \operatorname{div}(\sigma^i)$$

Se o fluido conserva massa, temos que

$$\partial_t \rho_t + \operatorname{div}(\rho_t X) = 0$$

de onde a equação acima pode ser reduzida a

$$\partial_t X_i + \nabla X_i \cdot X = Y_i + \frac{1}{\rho_t} \operatorname{div}(\sigma^i) \quad i = 1, 2, 3.$$

que é conhecida como a **equação de movimento** do fluido.

No caso de um **fluido ideal** temos que o tensor de tensões é da forma

$$\sigma = -pI$$

onde  $p : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é a pressão e  $I$  é a matriz identidade. Neste caso temos que

$$\sigma^i = -p e_i \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div}(\sigma^i) = -\partial_i p.$$

de onde a equação de movimento pode ser escrita

$$\partial_t X_i + \nabla X_i \cdot X = Y_i - \frac{1}{\rho_t} \partial_i p \quad i = 1, 2, 3.$$

Ou, no forma vetorial

$$\partial_t X + \nabla X \cdot X = Y - \frac{1}{\rho_t} \nabla p.$$

Esta equação recebe o nome de **equação de Euler** e descreve o movimento de um fluido ideal.

■ **Exemplo 27.10** A seguir, apresentamos três casos particulares com soluções analíticas simples.

• **1. Escoamento Unidimensional Incompressível e Estacionário (Lei de Bernoulli)**

Assuma:

- Escoamento unidimensional:  $X = u(x)\hat{i}$ ,
- Fluido incompressível:  $\rho = \text{constante}$ ,
- Estacionário:  $\partial/\partial t = 0$ ,
- Sem forças externas:  $Y = 0$ .

A equação de Euler se reduz a:

$$\rho \left( u \frac{du}{dx} \right) = -\frac{dp}{dx}$$

Multiplicando ambos os lados por  $dx$ :

$$\rho u du = -dp$$

Integrando ambos os lados:

$$\frac{1}{2} \rho u^2 + p = C$$

Esta é a **equação de Bernoulli** em sua forma mais simples, válida ao longo de uma linha de corrente.

- **2. Escoamento Radial Incompressível Estacionário (Fonte Pontual)**

Considere um escoamento radial em 2D ou 3D, onde a velocidade depende apenas da distância ao centro  $r$ :  $\mathbf{X}(r) = u(r)\hat{r}$ , e o fluido é incompressível e estacionário, sem forças externas.

A equação de Euler na direção radial é:

$$\rho u \frac{du}{dr} = -\frac{dp}{dr}$$

Como no caso anterior, multiplicamos por  $dr$ :

$$\rho u du = -dp \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\rho u^2 + p = C$$

Assim, novamente obtemos a forma de Bernoulli.

Além disso, pelo princípio da conservação de massa (equação de continuidade), temos que:

$$\text{em 3D: } \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \Rightarrow \rho u(r)r^2 = \text{constante}$$

Logo,  $u(r) = \frac{A}{r^2}$ , onde  $A$  é uma constante relacionada à intensidade da fonte.

- **3. Escoamento Vertical com Gravidade**

Assuma um fluido incompressível em repouso ou em escoamento lento apenas na vertical  $z$ , sujeito à gravidade  $\mathbf{Y} = -ge_3$ .

A equação de Euler se torna:

$$0 = -\frac{dp}{dz} - \rho g \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{dz} = -\rho g$$

Integrando:

$$p(z) = p_0 - \rho g z$$

Esta é a **lei de Stevin**, que determina a variação da pressão com a profundidade em um fluido incompressível em equilíbrio.

■