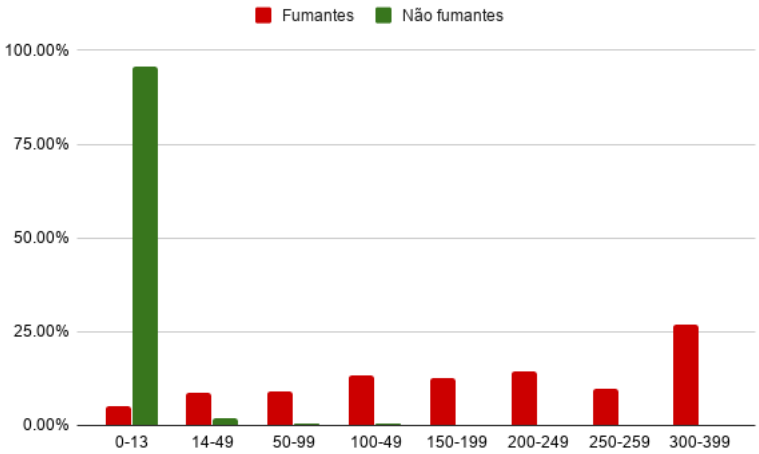
Estatística - ME 414: Gabarito da Lista 1 [1]

1. a. Vitamina (A, B1, B2, B6, B12): Variável qualitativa nominal.
   b. Quantidade de calorias na batata frita: Variável quantitativa continua.
   c. Desfecho de uma doença (curado, não curado); Variável qualitativa nominal.
   d. Classificação de uma lesão (lesão fatal; severa; moderada; pequena): Variável qualitativa ordinal.
   e. Grupo sanguíneo (A, B, AB, O); Variável qualitativa nominal.
   f. Paridade (primeira gestação, segunda gestação, terceira ...): Variável qualitativa ordinal.
   g. Estado geral de um paciente (bom, regular, ruim); Variável qualitativa ordinal.
   h. Número de nascidos vivos em certo hospital em junho/99; Variável quantitativa discreta.
   i. Idade: Variável quantitativa continua pois está relacionada com o tempo que é uma variável quantitativa continua.
   j. Concentração de flúor na água: Variável quantitativa continua.
   k. Atividade esportiva preferida. Variável qualitativa ordinal.
2. a. Não, pois todos os níveis de cotinina possuem diferentes frequências absolutas, isto é, por exemplo que o número de pessoas fumantes é maior ao número de não fumantes mas que em proporção ao total, poderiam ter o mesmo valor.
   b. Resposta

[1]PED: Lisbeth Corbacho Carazas, ra162526@ime.unicamp.br

Nível de cotinina	Fumantes(p_i%)	Não fumantes(p_i%)
0-13	5.07%	95.79%
14-49	8.64%	2.09%
50-99	9.23%	0.67%
100-49	13.39%	0.44%
150-199	12.80%	0.20%
200-249	14.29%	0.23%
250-259	9.81%	0.26%
300-399	26.77%	0.32%
Total	100.00%	100.00%

c. .



d. Da figura e a tabela, note que a grande maioria dos não fumantes tem baixo nível de cotinina.

3. a. Ordenando os dados temos:

$$21.3 \quad 22.1 \quad 22.8 \quad 23.5 \quad 24.6 \quad 65.4 \quad 67.2 \quad 71.7 \quad 76.3 \quad 84.5.$$

Como são 10 dados, a mediana seria a semissoma dos valores intermédios, posição 5ta e 6ta isto é:

$$\frac{24.6 + 65.4}{2} = 45.$$

É claro que a mediana não representa o conjunto de dados, pois veja que os dados estão divididos em dois grupos.

b. .

b1.

$$21.3 \quad 22.1 \quad 22.8 \quad 23.5 \quad 24 \quad 24.6 \quad 65.4 \quad 67.2 \quad 71.7 \quad 76.3 \quad 84.5.$$

Veja que mediana está na 6ta posição pois $\frac{(11+1)}{2} = 6$, então

$$Md = 24.6.$$

A mediana representa somente os dados do lado esquerdo.

b2.

$$21.3 \quad 22.1 \quad 22.8 \quad 23.5 \quad 24.6 \quad 65.4 \quad 67.2 \quad 71.7 \quad 75 \quad 76.3 \quad 84.5.$$

Veja que mediana está na 6ta posição pois $\frac{(11+1)}{2} = 6$, então

$$Md = 65.4.$$

A Medina representa somente os dados do lado direito.

Do item b1. e b2. a Mediana seria uma medida não estável.

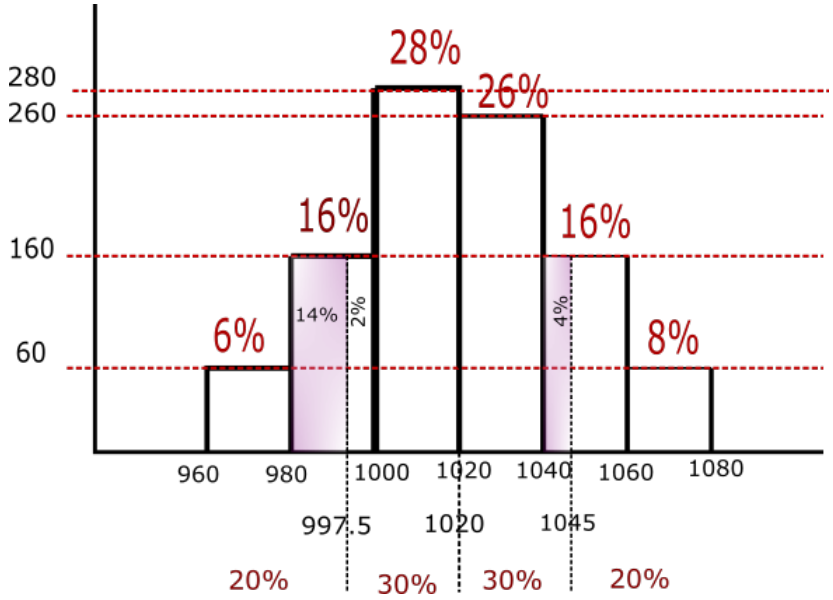
4. a. Sejam $m_i = \frac{L_i+U_i}{2}$ onde L_i é o limite inferior do intervalo e U_i é o limite superior do intervalo e $n = \sum_{i=1}^{6} n_i = 1000$

$$\begin{aligned} \overline{X} &= \sum_{i=1}^{6} \frac{n_i m_i}{n} \\ \overline{X} &= 1020.8 \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \sum_{i=1}^{6} \frac{n_i (m_i - \overline{X})^2}{n-1} \\ \text{Var}(X) &= \frac{691360}{999} = 962.061 \end{aligned}$$

c. Da seguinte figura podemos ver que o peso (em gramas) representativo está em torno de 1020 g, o que fornecido pela média calculada no item a..



d. Para um melhor entendimento desta parte do exercício ver o histograma do item c..

- Para os primeiros 20%

$$\frac{1000-980}{16\%} = \frac{x-980}{14\%} \tag{1}$$
$$x = 997.5 \tag{2}$$

então o intervalo seria $(960, 997.5]$

- Os 30% seguintes: $x = 1029$, pois $28\% + 2\% = 30\%$ então o intervalo seria dado por: $(997.5, 1020]$

- Para os seguintes 30%

$$\frac{1060-1040}{16\%} = \frac{x-1040}{4\%} \tag{3}$$
$$x = 1045 \tag{4}$$

então o intervalo seria $]1020, 1045]$

- Veja que só falta $12\% + 8\% = 20\%$, assim o último intervalo é dado por $(1045, 1085]$

e. Peso inferior $=\overline{X} - 2 \times Dp(\sqrt{962.0}) = 1020.80 - 2 \times 26.30 = 968.18$
Assim para o número de animais separados utilizamos o histograma do item a.

$$\frac{980-960}{6\%} = \frac{968.18-960}{x\%} \tag{5}$$
$$x\% = 2.454\% \tag{6}$$

Peso Superior $=\overline{X} + 1.52 \times Dp(\sqrt{962.0} = 1020.80 + 1.5 \times 26.30 =$ 1060.25 Assim para o número de animais separados utilizamos o histograma do item a.

$$\frac{1080 - 1060}{8\%} = \frac{1060.25 - 1060}{x\%} \tag{7}$$

$$x\% = 0.1\% \tag{8}$$

Então são separados da seguinte forma :

$(960, 968.18]$ com 2.45%
$(968.18, 1060.25]$ com 90.546%
$(1060.25, 1080]$ com 7%.

5. a. Seja X: Diâmetros do coração dos adultos maiores normais.
Para cálculo da média temos:

$$\overline{X} = \sum_{i=1}^{15} \frac{X_i}{15} = 131.0666667$$

Para calcular a mediana, ordenamos os dados em forma crescente:

X : 103 114 114 114 121 125 125 130 130 132 135 139 146 169 169

como são 15 dados é um número impar, então o cálculo é dado por: posição= $\frac{15+1}{2} = 8$, assim a mediana é dada pelo valor na oitava posição, isto é 130.

A moda é o valor mais frequente, neste casso é 114.

b.

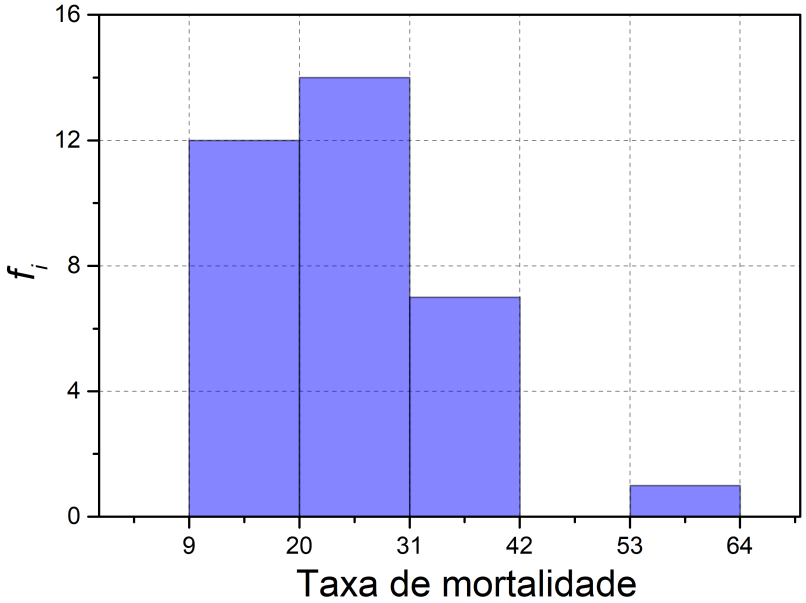
$$\text{Var}(X) = \frac{\sum_{i=1}^{15}(X_i - \overline{X})^2}{14} = 358.495 \tag{9}$$

$$Dp(X) = 18.933 \tag{10}$$

6. a. .

Nro	taxa de morta.	f_i	N_i	$p_i\%$	$P_i\%$
1	(9,20]	12	12	35.29%	35.29 %
2	(20,31]	14	26	41.18%	76.47 %
3	(31,42]	7	33	20.59%	97.06 %
4	(42,53]	0	33	0.00%	97.06%
5	(53,64]	1	34	2.94%	100 %
Total		34		100%	

b. .



c. Seja $m_i = \frac{L_i+U_i}{2}$ onde L_i é o limite inferior do intervalo e U_i é o limite superior do intervalo.

$$n = \sum_{i=1}^{5} f_i = 34$$

$$\begin{aligned} \overline{X} &= \sum_{i=1}^{5} \frac{f_i m_i}{n} \\ \overline{X} &= 24.85 \end{aligned}$$

Para o cálculo da mediana utilizamos as proporções, para isso, observamos nas frequências acumuladas porcentuais tal que contenham 50 %, assim a $Md \in (20, 31]$.

$$\begin{aligned} \frac{Md - 20}{14.71\%} &= \frac{31 - 20}{41.18\%} \\ Md &= 23.92 \end{aligned}$$

Para o cálculo do 1° quartil , ou seja 25° percentil (q_1), observamos nas frequências acumuladas porcentuais tal que contenham 25 %, assim a $q_1 \in (9, 20]$.

$$\begin{aligned} \frac{q(0.25) - 9}{25\%} &= \frac{20 - 9}{35.29\%} \\ q(0.25) &= 16.79 \end{aligned}$$

Para o cálculo do 3° quartil , ou seja 75° percentil (q_3), observamos nas frequências acumuladas porcentuais que contenham 75%, assim $q_3 \in (20, 31]$.

$$\begin{aligned} \frac{q(0.75) - 20}{(75 - 35.29)\%} &= \frac{31 - 20}{41.18\%} \\ q(0.75) &= 30.60. \end{aligned}$$

A variança e o desvio padrão é dado por:

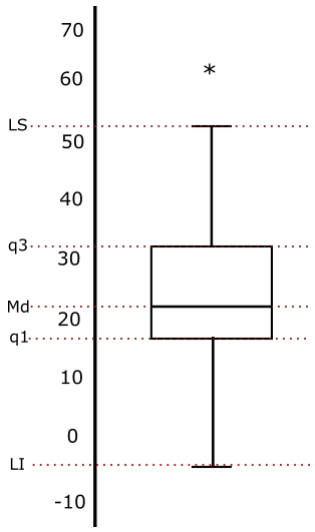
$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= \sum_{i=1}^{5} \frac{f_i(m_i - \overline{X})^2}{n-1} \\ \mathrm{Var}(X) &= \frac{3373.765}{33} = 102.235 \\ Dp(X) &= 10.111 \end{aligned}$$

d. – Esquema de 5 números.

		34	
md		23.92	
q	16.79		30.60
md	9.9		62.2

– Para o Box Plots

$$\begin{aligned} d_q &= q_3 - q_1 = 30.69 - 16.79 = 13.9 \\ LI &= q_1 + 1.5(dq) = 16.79 - 1.5(13.9) = -4.06 \\ LS &= q_3 + 1.5(dq) = 30.60 + 1.5(13.9) = 51.45 \end{aligned}$$



– Ramos de folhas

0	9
1	0 1 3 3
1*	5 7 8 8 8 9
2	0 0 1 2 2 2 3 3 3
2*	5 7 7 8 9 9
3	2 2 3 6 6 6 8 9
4	
5	
6	2

7. a.

$$\overline{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{10} Y_i}{10} = 15 \tag{11}$$

$$\text{Var}(Y) = \frac{\sum_{i=1}^{10} (Y_i - \overline{Y})^2}{9} = 16.66 \tag{12}$$

$$Dp(Y) = 4.081 \tag{13}$$

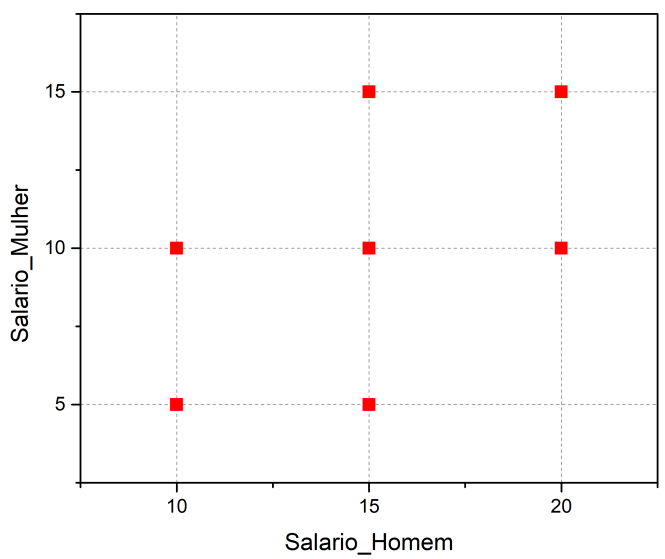
b.

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{10} X_i}{10} = 10$$

$$\text{Var}(X) = \frac{\sum_{i=1}^{10} (X_i - \overline{X})^2}{9} = 11.11$$

$$Dp(X) = 3.33$$

c. .



d.

$$Corr(X,Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{10}\left(\frac{Y_i - \overline{Y}}{Dp(Y)}\right)\left(\frac{X_i - \overline{X}}{Dp(X)}\right) = 0.4088$$

Como $0.480 > 0$, então, existe uma correlação média entre as variáveis X e Y.

e. S= Salario total do casal.

Casal	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S=X+Y	15	20	20	20	25	25	30	30	30	35
Z=0.92Y+0.94X	13.9	18.6	18.6	18.5	23.2	23.2	27.9	27.8	27.8	32.5

Desta tabela temos:

$$\overline{S} = \frac{\sum_1^{10} S_i}{10} = 25$$

ou também

$$\overline{S} = \overline{X} + \overline{Y} = 10 + 15 = 25.$$

Para a variança de S, da tabela tem-se:

$$Var(S) = \sum_{i=1}^{10}\frac{(S_i - \overline{S})^2}{9} = 38.89$$

f. Z= Salario com desconto

$$\begin{aligned} &Z = (Y - 0.084Y) + (X - 0.06X) = 0.92Y + 0.94X \\ &\Rightarrow \overline{Z} = 0.92\overline{Y} + 0.94\overline{X} \\ &\Rightarrow \overline{Z} = 23.2 \end{aligned}$$

Para a variança de S, da tabela tem-se:

$$Var(Z) = \sum_{i=1}^{10}(\frac{Z_i - \overline{Z})^2}{9} = 33.53$$

Estatística - ME 414 - Gabarito da Lista 2

1. a.

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = P(A) \text{ pois } \; P(B) > 0 \\ &\Rightarrow \; P(A\cap B) = P(A)P(B) \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \\ P(A|B) &= \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A) \end{aligned}$$

Isto é, que o evento A não depende do evento B.

2.

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) \tag{14}$$

$$P(A\cup B) + P(A\cap B) = P(A) + P(B) \tag{15}$$

Como $P(A\cap B) \geq 0$ então $P(A\cup B) \leq P(A) + P(B)$

3. O espaço amostral de dois dados lançados estaria dado por

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),....,(6,6)\}$$

Ω possuí 36 valores.

4. a. Os resultados possíveis e as respectivas probabilidades estão dadas por:

$$\Omega = \{PP, VV, PV, VP\}$$

$$\begin{aligned} P(\{PP\}) &= \frac{5}{15}\times\frac{4}{14} = \frac{10}{105} \\ P(\{VV\}) &= \frac{10}{15}\times\frac{9}{14} = \frac{45}{105} \\ P(\{VP\}) &= \frac{10}{15}\times\frac{5}{14} = \frac{25}{105} = P(\{PV\}) \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} &i. \quad P(\{PP\}) = \frac{5}{15}\times\frac{4}{14} = \frac{10}{105} \\ &ii. \quad P(\{VP\},\{PP\}) = \frac{25}{105} + \frac{10}{105} = \frac{35}{105} \\ &iii. \quad P(\{VV\},\{VP\}) = \frac{45}{105} + \frac{25}{105} = \frac{70}{105}. \end{aligned}$$

5.
   - Evento A: viver 70 ou mais anos, então P(A)=0,6.
   - Evento B: viver 80 ou mais anos, então P(B)=0,2.

   Probabilidade condicional $P(B|A)$

$$\begin{aligned} P(B|A) &= P(B \cap A)/P(A) = P(B)/P(A) \\ P(B|A) &= 0,2/0,6 \\ P(B|A) &= 1/3 \end{aligned}$$

6. Essa é uma questão sobre Probabilidade Condicional, Teorema de Bayes.
   Temos que analisar os dados da questão:
   Eventos dados pela questão:
   H: freguês é homem
   A: freguês prefere salada
   M: freguês é mulher
   B: freguês prefere carne

   Agora podemos inferir as respostas:

   20% dos homens preferem salada então 80% dos homens preferem Carne:

$$P(A|H) = 20\% \Rightarrow P(B|H) = 80\%$$

   30% da mulheres comem carne então 70% das mulheres preferem salada:

$$P(B|M) = 30\% \Rightarrow P(A|M) = 70\%$$

   75% dos clientes são homens então 25% dos clientes são mulheres:

$$P(H) = 75\% \Rightarrow P(M) = 25\%.$$

   Sejam:

   P(A) : Probabilidade de um cliente comer salada
   P(B) : Probabilidade de um cliente comer carne

   Para calcular $P(M|A)$ será utilizado o Teorema de Bayes que diz:

$$P(M|A) = \frac{P(A|M)P(M)}{P(A)}.$$

   Precisaremos então do valor de P(A) que pode ser calculado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|M).P(M) + P(A|H).P(H) \\ P(A) &= 70\%(25\%) + 20\%(75\%) = 32.5\%. \end{aligned}$$

Substituindo os valores conhecidos temos:

$$\begin{aligned} P(M|A) &= \frac{P(A|M)P(M)}{P(A)} \\ P(M|A) &= \frac{0.7 \times 0.25}{0.325} \\ P(M|A) &= 0.54 \end{aligned}$$

7. C : O indivíduo responde corretamente.
   SR: O indivíduo sabe a resposta.
   RA: O indivíduo responde ao acaso.

$$\begin{aligned} P(SR) &= p \\ P(C|SR) &= 1 \\ P(C|RA) &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

   a. Seja $P(C)$ a probabilidade que o teste seja respondido corretamente, dada por:

$$\begin{aligned} P(C) &= P(C|SR)P(SR) + P(C|RA)P(RA) \\ P(C) &= 1 \times p + \frac{1}{n}(1-p) \end{aligned}$$

   já que as únicas dois opções para responder o teste são: sabe a resposta ou responde ao acaso, então $P(SR) + P(RA) = 1$ assim $P(RA) = 1 - p$.
   Que não responda ao acaso, significa que, indivíduo sabe a resposta. A probabilidade do indivíduo saber a resposta dado que respondeu corretamente é dado por $P(SR|C)$ utilizando o Teorema de Bayes, como segui:

$$\begin{aligned} P(SR|C) &= \frac{P(C|SR)P(SR)}{P(C)} \\ P(SR|C) &= \frac{p}{p + \frac{1-p}{n}} \\ P(SR|C) &= \frac{np}{1 + (n-1)p} \end{aligned}$$

   b. $P(\overline{C}) = 1 - P(C)$, então:

$$P(\overline{C}) = 1 - p - \frac{1}{n}(1-p) \tag{16}$$

Para a resposta substituir os valores para n=5 e p=0.20 na equação (3).

8. Sejam os eventos:

   D: A peça produzida ser defeituosa.
   A: A peça defeituosa ter sido produzida pela fábrica A;$P(A) = 0.5$.
   B: A peça defeituosa ter sido produzida pela fábrica B, $P(B) = 0.25$.
   C: A peça defeituosa ter sido produzida pela fábrica C, $P(C) = 0.25$.

   As probabilidades de que um circuito integrado produzido por estas fábricas não funcione são:
   Fabrica A : $P(D|A) = 0.01$
   Fabrica B : $P(D|B) = 0.04$
   Fabrica C : $P(D|C) = 0.03$

   Queremos $P(D)$, utilizando a regra da probabilidade total temos:

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A)P(D|A) + P(B)P(D|B) + P(C)P(D|C) \\ P(D) &= 0.5 \times 0.01 + 0.25 \times 0.04 + 0.25 \times 0.03 \\ P(D) &= 0.005 + 0.01 + 0.075 \\ P(D) &= 0.0225 \end{aligned}$$

   A probabilidade de um circuito da produção conjunta, das três fábricas, não funcionar é 0,0225.

9. $X \sim P(\lambda = 2)$

   a.

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)]$$
$$P(X > 3) = 1 - \left(\frac{2^0 e^{-2}}{0!} + \frac{2^1 e^{-2}}{1!} + \frac{2^2 e^{-2}}{2!} + \frac{2^3 e^{-2}}{3!}\right)$$
$$P(X > 3) = 0.1428$$

   b. E(X)=λ=2

10. X: Número de carros abandonados semanalmente.
    E(X)=$\lambda = 3$
    Em duas semanas $\lambda = 6$ então $X \sim P(\lambda = 6)$

    a. $P(X = 0) = \frac{6^0(e^{-6})}{0!} = e^{-6} = 0.0022$

b.

$$
\begin{aligned}
&P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] \\
&P(X \geq 2) = 1 - \left(e^{-6} + \frac{6e^{-6}}{1!}\right) \\
&P(X \geq 2) = 1 - 7e^{-6} = 0.9826.
\end{aligned} \tag{17}
$$

11. .

X	1	2	25
P(X)	1/3	1/2	1/6

$$
\begin{aligned}
&E(X) = 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{2} + 25 \times \frac{1}{6} \\
&E(X) = 5
\end{aligned}
$$

A variança é dada por:

$$
\begin{aligned}
&V(X) = (1-5)^2 \times \frac{1}{3} + (2-5)^2 \times \frac{1}{2} + (25-5)^2 \times \frac{1}{6} \\
&V(X) = 76.5
\end{aligned}
$$

12. $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ então $X \sim \mathcal{B}(5, 1/3)$.

Pela fórmula da variança, temos:

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

então

$$V(X) + E(X)^2 = E(X^2). \tag{18}$$

Pela distribuição Binomial, temos que:

$E(X) = np = 5(\frac{1}{3})$

$V(X) = np(1-p) = 5\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right).$

Substituindo os valores de $E(X)$ e $V(X)$ em (5), temos que

$$E(X^2) = \frac{35}{9}$$

13. O espaço amostral de dois dados lançados estaria dado por

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), ..., (6,6)\}$$

Ω possuí 36 valores, e vemos que a probabilidade obter a soma dos resultados de dois dados lançados, são dadas pelas seguinte tabela:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(X)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Então o valor esperado é dado por:

$$E(X) = 2 \times \frac{1}{36} + ... + 12 \times \frac{1}{36}.$$

14. .

X: Soma dos números anotados.

Nossas possíveis opções são:

$$\{1,2\}; \{1,3\}; \{2,1\}; \{2,3\}; \{3,1\}; \{3,2\}$$

E a soma é dada por X

X	3	4	5
P(X)	2/6	2/6	2/6

Então,

$$E(X) = 3(2/6) + 4(2/6) + 5(2/6) = 4$$

Estatística - ME 414: Gabarito da Lista 3

1. a. Sabemos que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1} kx^2dx + \int_{1}^{\infty} 0dx \\
&= \int_{0}^{1} kx^2dx = k\int_{0}^{1} x^2dx = k\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 \\
&= k(\frac{1}{3}) = 1 \\
&\Rightarrow k = 3
\end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned}
P(1/4 < X < 1/2) &= \int_{1/4}^{1/2} 3x^2 = 3\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{1/4}^{1/2} \\
&= \left(\frac{1}{2^3} - \frac{1}{4^3}\right) = 0.1093.
\end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \\
E(X) &= \int_{0}^{1} x(3x^2)dx = 3\int_{0}^{1} x^3dx \\
E(X) &= 3\left(\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = 3/4 = 0.75.
\end{aligned}$$

Para a variança utilizamos

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Vamos a calcular $E(X^2)$

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_{0}^{1} x^2f(x)dx = \int_{0}^{1} x^2(3x^2)dx \\
E(X^2) &= 3\int_{0}^{1} x^4dx \\
E(X^2) &= 3\,\frac{x^5}{5}\Big|_0^1 \\
E(X^2) &= 3/5.
\end{aligned}$$

Assim

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 3/5 - 0.75^2 = 0.0375$$

2. Seja $X \sim N(5, 16)$ assim $\mu = 5$ e $\sigma = 4$

a.

$$\begin{aligned} P(X \leq 13) &= P\left(Z \leq \frac{13-\mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(Z \leq \frac{8}{4}\right) = P(Z \leq 2) \\ &= 0.977 \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} P(X > 1) &= P\left(Z > \frac{1-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{-4}{4}\right) \\ &= P(Z > -1) = P(Z \leq 1) = 0.8413 \end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned} P(X \leq a) &= P\left(Z \leq \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{a-5}{4}\right) = 0.04 \\ &\Rightarrow \phi(\frac{a-5}{4}) = 0.04 \\ &\Rightarrow \frac{a-5}{4} = -1.75 \\ &\Rightarrow a = 4(-1.75) + 5 = -2 \end{aligned}$$

3.

a. Mostraremos que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{0}^{\infty} \frac{xe^{-x/2}}{4} dx.$$

Para demostrar isso utilizaremos integração por partes.
$u = x \Rightarrow du = dx$ e $dv = e^{-x/2}dx \Rightarrow v = -2e^{-x/2}$

$$\begin{aligned} \int_{0}^{\infty} f(x)dx &= uv - \int_{0}^{\infty} vdu \\ &= \frac{1}{4}\left\{x(-2e^{-x/2}) - \int_{0}^{\infty} -2e^{-x/2}dx\right\} \\ &= \frac{1}{4}\left\{x(-2e^{-x/2}) + 2\int_{0}^{\infty} e^{-x/2}dx\right\} \\ &= \frac{1}{4}\left\{x(-2e^{-x/2}) + 2(-2e^{-x/2})\right\}\Big|_{0}^{\infty} \\ &= 1 \end{aligned}$$

note que para substituir os valores é preciso saber $e^{-\infty/2} = \frac{1}{e^{\infty/2}} \to 0$.

b. 6 meses equivale a meio ano (1/2)

$$\begin{aligned} p(X \leq 1/2) &= \int_0^{1/2} f(x)dx = \int_0^{1/2} \frac{xe^{-x/2}}{4} dx \\ &= \frac{1}{4}\left(-2xe^{-x/2} - 4e^{-x/2}\right)\Big|_0^{1/2} \\ &= \frac{1}{4}\left(-5e^{-1/4} + 4\right) = 2.65\% \end{aligned}$$

4. X: Peso de um determinado produto tal que $X \sim N(\mu, 20^2 g^2)$

   a.

$$\begin{aligned} P(X < 500) &= P(Z < \frac{500-\mu}{20}) = 0.01 \\ &\Rightarrow \phi\left(\frac{500-\mu}{20}\right) = 0.01 \\ &\Rightarrow \left(\frac{500-\mu}{20}\right) = -1.28 \\ &\Rightarrow \mu = 525.6 \end{aligned}$$

   b. Sejam X_1, X_2, X_3, X_4 pesos dos 4 pacotes da amostra.

   Estão pedindo a probabilidade do peso total menor que 2kg, isto é, $\sum_{i=1}^{4} X_i < 2000g$ e é o mesmo que, $\overline{X} < \frac{2000}{4}$, assim a média amostral

$$\overline{X} \sim N\left(525.6g, \frac{20^2}{4}g^2\right) = N\left(525.6g, \left(\frac{20}{2}g\right)^2\right)$$

   então

$$\begin{aligned} P(\overline{X} < 500) &= P\left(Z < \frac{500-525.6}{10}\right) \\ &= P(Z < -2.56) = 0.0052 \end{aligned}$$

5. a.

$$\overline{X} \sim N\left(525.6g, \left(\frac{20}{2}g\right)^2\right)$$

   A probabilidade de ser feita uma parada desnecessária é dada por:

$$
\begin{aligned}
& P\left(\overline{X} < 495.6 \cup \overline{X} > 555.6\right) = P\left(\overline{X} < 495.6\right) + P\left(\overline{X} > 555.6\right) \\
= \; & P\left(Z < \frac{495.6 - 525.6}{10}\right) + P\left(Z > \frac{555.6 - 525.6}{10}\right) \\
= \; & P(Z < -3) + P(Z > 3) \\
= \; & 2P(Z > 3) = 2(1 - P(Z < 3)) \\
= \; & 2(1 - 0.9987) = 0.0026
\end{aligned}
$$

b.

$$
\overline{X} \sim N\left(510g, \left(\frac{20}{2}g\right)^2\right)
$$

$$
\begin{aligned}
P\left(495.6 < \overline{X} < 555.6\right) &= P\left(\overline{X} < 555.6\right) - P\left(\overline{X} < 495.6.6\right) \\
&= P\left(Z < \frac{555.6 - 510}{10}\right) - P\left(Z < \frac{495.6 - 510}{10}\right) \\
&= P(Z < 4.56) + P(Z < -1.44) = 1 - 0.0749 = 0.9251
\end{aligned}
$$

6. X: Quantidade de ácido xanturênico excretado na urina.

$$
X \sim N\left(\frac{4.8mg}{15ml}, \left(\frac{2mg}{15ml}\right)^2\right)
$$

a. Para fines do cálculo desconsideramos o denominador dos dados de entrada.

$$
\begin{aligned}
P(2.8 < X < 7) &= P\left(\frac{2.8 - 4.8}{2} < Z < \frac{7 - 4}{2}\right) \\
&= P(-1 < Z < 1.5) \\
&= \phi(1.5) - \phi(-1) = 0.7745
\end{aligned}
$$

b.

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &= P\left(Z < \frac{x-4.8}{2}\right) = 0.1 \\ &= \phi\left(\frac{x-4.8}{2}\right) = 0.1 \\ &\Rightarrow \frac{x-4.8}{2} = -1.28 \\ &\Rightarrow x = 2.24 \end{aligned}$$

Deve ter uma quantidade de acido xanturênico de 2.24mg/15ml.

c. Y: Número de pessoas com quantidade de ácido xanturênico anormal.

Veja que a probabilidade da quantidade de acido xanturênico anormal é determinada a partir do item a.

$$p = 1 - P(2.8 < X < 7) = 1 - 0.775 = 0.225$$

Então para $n = 10$, $p = 0.225$ e $Y \sim \mathcal{B}(10, 0.225)$ temos:

$$\begin{aligned} P(Y \leq 2) &= P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) \\ &= \binom{10}{0}(0.225)^0(0.775)^{10} + \binom{10}{1}(0.225)(0.775)^9 \\ &+ \binom{10}{2}(0.225)^2(0.775)^8 \\ &= 0.601576 \end{aligned}$$

7. Seja $X \sim U([0,5])$, nosso interesse é $Y = X^2$, então

$G(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y})$

derivando $G'(y)$ obtemos a densidade

$$\begin{aligned} G'(y) &= F(\sqrt{y})' - F(-\sqrt{y})' \\ &= F'(\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}} - F'(-\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y}}(f(\sqrt{y}) - f(-\sqrt{y})) \end{aligned}$$

Se $f(x) = \frac{1}{5}$ para $0 < x < 5$, então

$$g(y) = \frac{1}{10\sqrt{y}}$$

Assim

$$E(Y) = \int_0^5 y\frac{1}{10\sqrt{y}}dy = \frac{1}{10}\int_0^5 \sqrt{y}dy$$
$$= \frac{1}{15}y^{3/2}\Big|_0^5 = 0.745$$

8. a. $P(X \leq 10) = 1 - e^{10} = 0.999$
   b. $P(5 < X < 15) = P(X < 15) - P(X < 5) = e^{-5} - e^{-15} = 0.0067$
   c. $P(X > t) = 0.01 \Leftrightarrow e^{-t} = 1/100 \Leftrightarrow t = 4.605$
9. Seja $X \sim exp(3)$, nosso interesse é $Y = X^3$, então

$$G(y) = P(Y \leq y) = P(X^3 \leq y) = P(X \leq \sqrt[3]{y}) = F(\sqrt[3]{y})$$

derivando $G'(y)$ obtemos a densidade

$$\begin{aligned} G'(y) &= F(\sqrt[3]{y})' \\ &= F'(\sqrt[3]{y})\left(\frac{1}{3}y^{-2/3}\right) \\ g(y) &= f(\sqrt[3]{y})\left(\frac{1}{3}y^{-2/3}\right) \end{aligned}$$

Se $f(x) = \frac{1}{3}e^{-x/3}$ para $x \geq 0$, então

$$g(y) = \frac{1}{9}e^{\frac{-\sqrt[3]{y}}{3}}\left(y^{-2/3}\right)$$

Assim

$$\begin{aligned} E(Y) &= \frac{1}{9}\int_0^\infty y\left(e^{\frac{-\sqrt[3]{y}}{3}}\left(y^{-2/3}\right)\right)dy \\ &= \frac{1}{9}\int_0^\infty y^{1/3}e^{\frac{-\sqrt[3]{y}}{3}}dy \\ &= 162 \end{aligned}$$

A solução pode ser conferida no link:
`https://www.wolframalpha.com/input/?i=integrate+%281%2F9%29*x%5E%281%2F3%29*e%5E%28-%28x%5E%281%2F3%29%29%2F3%29`

10. Seja $T \sim exp(2)$

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= P(0 \leq T < 1) = P(T < 1) - P(T \leq 0) \\ &= (1 - e^{-1/2}) - (1 - e^{-0/2}) = 1 - e^{-1/2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P(X=1) &= P(1 \leq T < 2) = P(T<2) - P(T \leq 1) \\
&= (1-e^{-1}) - (1-e^{-1/2}) = e^{-1/2} - e^{-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(X=2) &= P(T \geq 2) = 1 - P(T \leq 2) \\
&= 1 - (1-e^{-1}) = e^{-1}
\end{aligned}
$$

11. Seja $X \sim (\mu, \sigma^2)$

    a.

$$
\begin{aligned}
P(X \leq \mu + 2\sigma) &= P(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq 2) \\
&= P(Z \leq 2) = 0.9772
\end{aligned}
$$

    b. Utilize a propriedade

$$
\begin{aligned}
P(|X-\mu| \leq \sigma) &= P(-\sigma \leq X - \mu \leq \sigma) \\
&= P\left(-1 \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq 1\right) \\
&= P(-1 \leq Z \leq 1) \\
&= P(Z \leq 1) - P(Z \leq -1) \\
&= 0.8413 - 0.1587 = 0.6826
\end{aligned}
$$

    c.

$$
\begin{aligned}
P(-a\sigma + \mu \leq X \leq a\sigma + \mu) &= P(-a\sigma \leq X - \mu \leq a\sigma) \\
&= P\left(-a \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq a\right) \\
&= P(-a \leq Z \leq a) = 0.99 \\
&= P(Z \leq a) - P(Z \leq -a) \\
&= 1 - 2P(Z \leq -a) = 0.99 \\
&= 1 - 2(1 - P(Z \leq a)) \\
&= 2P(Z \leq a) - 1 = 0.99 \\
&\Rightarrow P(Z \leq a) = 0.995 \\
&\Rightarrow \phi(a) = 0.995 \\
&\Rightarrow a = 2.56
\end{aligned}
$$

d.

$$
\begin{aligned}
P(X > a) &= 1 - P(X < a) = 0.90 \\
&\Rightarrow P(X < a) = 0.01 \\
&\Rightarrow P(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{a-\mu}{\sigma}) = 0.01 \\
&\Rightarrow P(Z < \frac{a-1}{\sqrt{2}}) = 0.01 \\
&\Rightarrow \phi(\frac{a-1}{\sqrt{2}}) = 0.01 \\
&\Rightarrow \frac{a-1}{\sqrt{2}} = -2.32 \\
&\Rightarrow a = -2.2809
\end{aligned}
$$