Lista 2

1. a.

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = P(A) \text{ pois } \; P(B) > 0 \\ &\Rightarrow \; P(A\cap B) = P(A)P(B) \end{aligned}$$

   b.

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \\ P(A|B) &= \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A) \end{aligned}$$

   Isto é, que o evento A não depende do evento B.

2.

$$\begin{aligned} P(A\cup B) &= P(A) + P(B) - P(A\cap B) && (1) \\ P(A\cup B) &+ P(A\cap B) = P(A) + P(B) && (2) \end{aligned}$$

   Como $P(A\cap B) \geq 0$ então $P(A\cup B) \leq P(A) + P(B)$

3. O espaço amostral de dois dados lançados estaria dado por

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),....,(6,6)\}$$

   Ω possuí 36 valores.

4. a. Os resultados possíveis e as respectivas probabilidades estão dadas por:

$$\Omega = \{PP, VV, PV\}$$

$$\begin{aligned} P(\{PP\}) &= \frac{5}{15}\times\frac{4}{14} = \frac{10}{105} \\ P(\{VV\}) &= \frac{10}{15}\times\frac{9}{14} = \frac{45}{105} \\ P(\{VP\}) &= \frac{10}{15}\times\frac{5}{14} = \frac{25}{105} = P(\{PV\}) \end{aligned}$$

   b.

$$\begin{aligned} &i. && P(\{PP\}) = \frac{5}{15}\times\frac{4}{14} = \frac{10}{105} \\ &ii. && P(\{VP\},\{PP\}) = \frac{25}{105} + \frac{10}{105} = \frac{35}{105} \\ &iii. && P(\{VV\},\{VP\}) = \frac{45}{105} + \frac{25}{105} = \frac{70}{105}. \end{aligned}$$

5.
   - Evento A: viver 70 ou mais anos, então P(A)=0,6.
   - Evento B: viver 80 ou mais anos, então P(B)=0,2.

   Probabilidade condicional $P(B|A)$

$$\begin{aligned} P(B|A) &= P(B \cap A)/P(A) = P(B)/P(A) \\ P(B|A) &= 0,2/0,6 \\ P(B|A) &= 1/3 \end{aligned}$$

6. Essa é uma questão sobre Probabilidade Condicional, Teorema de Bayes.
   Temos que analisar os dados da questão:
   Eventos dados pela questão:
   H: freguês é homem
   A: freguês prefere salada
   M: freguês é mulher
   B: freguês prefere carne

   Agora podemos inferir as respostas:

   20% dos homens preferem salada então 80% dos homens preferem Carne:

$$P(A|H) = 20\% \Rightarrow P(B|H) = 80\%$$

   30% da mulheres comem carne então 70% das mulheres preferem salada:

$$P(B|M) = 30\% \Rightarrow P(A|M) = 70\%$$

   75% dos clientes são homens então 25% dos clientes são mulheres:

$$P(H) = 75\% \Rightarrow P(M) = 25\%.$$

   Sejam:

   P(A) : Probabilidade de um cliente comer salada
   P(B) : Probabilidade de um cliente comer carne

   Para calcular $P(M|A)$ será utilizado o Teorema de Bayes que diz:

$$P(M|A) = \frac{P(A|M)P(M)}{P(A)}.$$

   Precisaremos então do valor de P(A) que pode ser calculado da seguinte forma:

$$P(A) = P(A|M).P(M) + P(A|H).P(H)$$
$$P(A) = 70\%(25\%) + 20\%(75\%) = 32.5\%.$$

Substituindo os valores conhecidos temos:

$$\begin{aligned} P(M|A) &= \frac{P(A|M)P(M)}{P(A)} \\ P(M|A) &= \frac{0.7 \times 0.25}{0.325} \\ P(M|A) &= 0.54 \end{aligned}$$

7. C : O indivíduo responde corretamente.
   SR: O indivíduo sabe a resposta.
   RA: O indivíduo responde ao acaso.

$$\begin{aligned} P(SR) &= p \\ P(C|SR) &= 1 \\ P(C|RA) &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

   a. Seja $P(C)$ a probabilidade que o teste seja respondido corretamente, dada por:

$$\begin{aligned} P(C) &= P(C|SR)P(SR) + P(C|RA)P(RA) \\ P(C) &= 1 \times p + \frac{1}{n}(1-p) \end{aligned}$$

   já que as únicas dois opções para responder o teste são: sabe a resposta ou responde ao acaso, então $P(SR) + P(RA) = 1$ assim $P(RA) = 1 - p$.
   Que não responda ao acaso, significa que, indivíduo sabe a resposta. A probabilidade do indivíduo saber a resposta dado que respondeu corretamente é dado por $P(SR|C)$ utilizando o Teorema de Bayes, como segui:

$$\begin{aligned} P(SR|C) &= \frac{P(C|SR)P(SR)}{P(C)} \\ P(SR|C) &= \frac{p}{p + \frac{1-p}{n}} \\ P(SR|C) &= \frac{np}{1 + (n-1)p} \end{aligned}$$

   b. $P(\overline{C}) = 1 - P(C)$, então:

$$P(\overline{C}) = 1 - p - \frac{1}{n}(1-p) \tag{3}$$

Para a resposta substituir os valores para n=5 e p=0.20 na equação (3).

8. Sejam os eventos:

   D: A peça produzida ser defeituosa.
   A: A peça defeituosa ter sido produzida pela fábrica A;$P(A) = 0.5$.
   B: A peça defeituosa ter sido produzida pela fábrica B, $P(B) = 0.25$.
   C: A peça defeituosa ter sido produzida pela fábrica C, $P(C) = 0.25$.

   As probabilidades de que um circuito integrado produzido por estas fábricas não funcione são:
   Fabrica A : $P(D|A) = 0.01$
   Fabrica B : $P(D|B) = 0.04$
   Fabrica C : $P(D|C) = 0.03$

   Queremos $P(D)$, utilizando a regra da probabilidade total temos:

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A)P(D|A) + P(B)P(D|B) + P(C)P(D|C) \\ P(D) &= 0.5 \times 0.01 + 0.25 \times 0.04 + 0.25 \times 0.03 \\ P(D) &= 0.005 + 0.01 + 0.075 \\ P(D) &= 0.0225 \end{aligned}$$

   A probabilidade de um circuito da produção conjunta, das três fábricas, não funcionar é 0,0225.

9. $X \sim P(\lambda = 2)$

   a.

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)]$$
$$P(X > 3) = 1 - \left(\frac{2^0 e^{-2}}{0!} + \frac{2^1 e^{-2}}{1!} + \frac{2^2 e^{-2}}{2!} + \frac{2^3 e^{-2}}{3!}\right)$$
$$P(X > 3) = 0.1428$$

   b. E(X)=λ=2

10. X: Número de carros abandonados semanalmente.
    E(X)=$\lambda = 3$
    Em duas semanas $\lambda = 6$ então $X \sim P(\lambda = 6)$

    a. $P(X = 0) = \frac{6^0(e^{-6})}{0!} = e^{-6} = 0.0022$

b.

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] \\
P(X \geq 2) &= 1 - \left(e^{-6} + \frac{6e^{-6}}{1!}\right) \\
P(X \geq 2) &= 1 - 7e^{-6} = 0.9826.
\end{aligned} \tag{4}
$$

11. .

X	1	2	25
P(X)	1/3	1/2	1/6

$$
\begin{aligned}
E(X) &= 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{2} + 25 \times \frac{1}{6} \\
E(X) &= 5
\end{aligned}
$$

A variança é dada por:

$$
\begin{aligned}
V(X) &= (1-5)^2 \times \frac{1}{3} + (2-5)^2 \times \frac{1}{2} + (25-5)^2 \times \frac{1}{6} \\
V(X) &= 76.5
\end{aligned}
$$

12. $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ então $X \sim \mathcal{B}(5, 1/3)$.

Pela fórmula da variança, temos:

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

então

$$V(X) + E(X)^2 = E(X^2). \tag{5}$$

Pela distribuição Binomial, temos que:

$E(X) = np = 5(\frac{1}{3})$

$V(X) = np(1-p) = 5\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right).$

Substituindo os valores de $E(X)$ e $V(X)$ em (5), temos que

$$E(X^2) = \frac{35}{9}$$

13. O espaço amostral de dois dados lançados estaria dado por

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), ..., (6,6)\}$$

Ω possuí 36 valores, e vemos que a probabilidade obter a soma dos resultados de dois dados lançados, são dadas pelas seguinte tabela:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(X)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Então o valor esperado é dado por:

$$E(X) = 2 \times \frac{1}{36} + ... + 12 \times \frac{1}{36}.$$

14. .

X: Soma dos números anotados.

Nossas possíveis opções são:

$$\{1,2\}; \{1,3\}; \{2,1\}; \{2,3\}; \{3,1\}; \{3,2\}$$

E a soma é dada por X

X	3	4	5
P(X)	2/6	2/6	2/6

Então,

$$E(X) = 3(2/6) + 4(2/6) + 5(2/6) = 4$$