Universidad Nacional de Rosario

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Una aproximación al estudio de nilvariedades

Cohomología y aplicaciones.

Tesis para optar al título de
Doctora en Matemática

Licenciada Viviana Jorgelina del Barco

Directora: Dra. Isabel G. Dotti

Co-directora: Dra. Gabriela P. Ovando

Marzo 2012.-

Resumen

En este trabajo introducimos la noción de cohomología intermedia de álgebras de Lie nilpotentes, estudiamos sus propiedades y determinamos aplicaciones.

Los grupos de cohomología intermedia de un álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{n}$ se construyen a partir de una filtración del complejo de Chevalley-Eilenberg del álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{n}$; precisamente construida con los anuladores de los ideales en la serie central descendente del álgebra $\mathfrak{n}$. Esta filtración induce una sucesión espectral de cohomología que converge a la cohomología con coeficientes reales de $\mathfrak{n}$.

Estudiamos propiedades de esta nueva cohomología con respecto a la estructura de $\mathfrak{n}$ como álgebra de Lie nilpotente. También calculamos explícitamente la cohomología intermedia de las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión ≤ 6 basándonos en la clasificación de esas álgebras dada por Magnin en [48].

Obtenemos una obstrucción para la existencia de estructuras simplécticas en álgebras de Lie nilpotentes descripta en términos de esta cohomología. Estudiamos la cohomología intermedia de los nilradicales de las subálgebras de Borel de las álgebras de Lie simples complejas y de las álgebras de tipo Heisenberg. Aplicamos la obstrucción mencionada para determinar la no existencia de estructuras simplécticas en ambas familias.

Finalmente, realizamos un estudio sobre estructuras simplécticas en álgebras de Lie nilpotentes independientemente de la cohomología intermedia. Probamos que las álgebras de Lie nilpotentes libres no admiten dichas estructuras e incluimos el método de doble extensión con el cual construimos álgebras de Lie nilpotentes simplécticas.

Introducción

Una nilvariedad M es una variedad diferenciable compacta de la forma $\Gamma\backslash N$, donde N es un grupo de Lie nilpotente simplemente conexo y Γ es un subgrupo discreto cocompacto. Las nilvariedades son los primeros casos a considerar en algunos problemas de topología y geometría. Esto es pues por un lado al ser no abelianas introducen una complejidad no encontrada en el toro y por otro lado su homología es aún manejable. Además, han brindando respuestas a varias preguntas en esos campos por lo que su estudio sigue en desarrollo. Un ejemplo clásico es la variedad de Kodaira-Thurston, primer ejemplo de variedad compacta que admite formas simplécticas pero ninguna métrica de Kähler, puede ser descripta como una nilvariedad ([65, 59]).

Las estructuras geométricas en un grupo de Lie nilpotente N invariantes por traslaciones a izquierda se inducen en la nilvariedad $M = \Gamma\backslash N$. El estudio de algunas estructuras geométricas invariantes en M como por ejemplo las métricas Riemannianas, formas simplécticas, estructuras complejas, entre otras, se reduce al estudio de estructuras en el álgebra de Lie $\mathfrak{n}$ del grupo de Lie N.

Una característica importante de las nilvariedades es el hecho que su cohomología de de Rham coincide con la cohomología del álgebra de Lie $\mathfrak{n}$ de N. Más precisamente, $H^i(\mathfrak{n}) \cong H^i(M, \mathbb{R})$ para todo $0 \leq i \leq 2n$, resultado probado por Nomizu [58].

La existencia de estructuras geométricas invariantes en M tiene implicancias en la cohomología del álgebra de Lie $\mathfrak{n}$. En este sentido, siguiendo con la variedad de Kodaira-Thurston, en 1988 se generaliza el resultado probando que las nilvariedades no admiten estructuras Kähler (salvo el toro). Esta prueba se basa en el teorema de Nomizu y propiedades cohomológicas características de las álgebras de Lie nilpotentes ([4],[59]).

Es por esto que la cohomología de álgebras de Lie nilpotentes, y la descripción de su estructura bajo grupos de isomorfismos, es un problema de gran importancia. Sin embargo, no se conocen propiedades generales, válidas en cualquier álgebra de Lie nilpotente. Se conocen resultados de casos particulares y, en general, su estudio se realiza separadamente por familias ([25], [66], [21], [61] entre otros).

Una conjetura reconocida en relación a la cohomología de las álgebras de Lie nilpotentes que sin duda requiere un estudio profundo de este tema es la Conjetura del Rango Toral debida a S. Halperin ([33]). La misma establece que la cohomología total con coeficientes triviales satisface $|H^*(\mathfrak{n})| \geq 2^{|\mathfrak{z}|}$ donde $\mathfrak{z}$ es el centro de $\mathfrak{n}$. Esta conjetura fue probada para las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión ≤ 14 y en las familias de álgebras de Lie 2-pasos nilpotentes [16], las álgebras de Lie nilpotentes libres y las split-metabelianas [60] (ver también [8], [66] y sus referencias). Sin embargo es aún una conjetura abierta en el caso general.

Para profundizar en el estudio de la cohomología de álgebras de Lie nilpotentes, Simon Salamon propone estudiar la sucesión espectral que surge de manera natural a partir de una filtración del complejo de Chevalley-Eilenberg. Esta sucesión espectral produce una graduación de los grupos de cohomología usual del álgebra de Lie y da lugar a una nueva definición: la cohomología intermedia.

El objetivo principal de este trabajo de Tesis es introducir el concepto nuevo de cohomología intermedia para álgebras de Lie nilpotentes, estudiar sus propiedades y determinar aplicaciones.

Dada un álgebra de Lie real $\mathfrak{n}$ los grupos de cohomología intermedia de grado i son una cantidad finita de espacios vectoriales reales $E_\infty^{p,q}$ que satisfacen

$$H^i(\mathfrak{n}) \simeq \bigoplus_{p+q=i} E_\infty^{p,q},$$

donde $H^i(\mathfrak{n})$ es el i-ésimo grupo de cohomología de $\mathfrak{n}$ a coeficientes triviales. Esta propiedad es la que le da el nombre de *cohomología intermedia*.

Construimos estos grupos a partir de la filtración natural del complejo de Chevalley-Eilenberg del álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{n}$; precisamente es la filtración que se construye con los anuladores de los ideales en la serie central descendente del álgebra $\mathfrak{n}$. Esta filtración induce una sucesión espectral de cohomología que converge a la cohomología con coeficientes reales de $\mathfrak{n}$, dando la fórmula anterior. Damos esta definición y estudiamos propiedades de esta nueva cohomología con respecto a la estructura de $\mathfrak{n}$ como álgebra de Lie nilpotente en las primeras secciones del Capítulo 2.

En ese mismo capítulo se realiza el cálculo de la cohomología intermedia en dimensiones bajas, contribuyendo con esto al desarrollo de este nuevo concepto. Las álgebras de Lie nilpotentes reales fueron clasificadas hasta dimensión siete [48], siendo seis la mayor dimensión en la cual no existen familias infinitas ([43, 62, 55]). Presentamos en la Sección 2.4 el cálculo de la cohomología intermedia de las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión ≤ 6.

La aplicación principal de la cohomología intermedia se encuentra en el Capítulo 3 y es una obstrucción a la existencia de estructuras simplécticas en un álgebra de Lie nilpotente descripta en términos de esta cohomología.

Sabemos que en una variedad compacta M de dimensión par la cohomología de de Rham provee una obstrucción a la existencia de estructuras simplécticas en M, a saber, si el segundo grupo de cohomología $H^2_{dR}(M)$ es nulo, entonces M no admite estructuras simplécticas. En el caso particular que $M = \Gamma\backslash N$ sea una nilvariedad, esta condición se traduce en la cohomología del álgebra de Lie $\mathfrak{n}$ del grupo de Lie N, por el teorema de Nomizu. Sin embargo, el hecho que $\dim H^i(\mathfrak{n}) > 0$ para toda álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{n}$ ([19, 18]), hace que esta condición sobre el segundo grupo de cohomología no sea restrictiva.

Se hace necesaria entonces la obtención de una condición cohomológica diferente para las álgebras de Lie nilpotentes. En el Teorema 3.1.3 presentamos una obstrucción en la cohomología intermedia para la existencia de estructuras simplécticas en $\mathfrak{n}$, específicamente se prueba que si el segundo grupo de cohomología intermedia $E_\infty^{0,2}(\mathfrak{n})$ es nulo, entonces el álgebra de Lie $\mathfrak{n}$ no admite estructuras simplécticas. Con un ejemplo mostramos que esta condición necesaria no es en general suficiente.

A partir del Teorema 3.1.3 se desprenden aplicaciones secundarias que son incluidas en el mismo Capítulo 3. Probamos que las álgebras de Lie nilpotentes reales que provienen de nilradicales de las subálgebras de Borel de las álgebras de Lie simples complejas clásicas no admiten estructuras simplécticas.

Para las álgebras de Lie tipo Heisenberg, la existencia de estructuras simplécticas fue resuelta por I. Dotti y P. Tirao en [21]. Estos resultados pueden ser vistos como una aplicación del Teorema 3.1.3 y a través de ello conlcuimos que en la familia de álgebras tipo Heisenberg la condición en dicho Teorema es suficiente además de necesaria para la existencia de estructuras simplécticas.

A partir de estos resultados relacionados con las estructuras simplécticas en las álgebras de Lie nilpotentes nos surge el interés por su estudio más allá de la cohomología intermedia. En el Capítulo 4 presentamos resultados obtenidos en este tema.

La existencia de estructuras en álgebras de Lie nilpotentes es un problema estudiado por diferentes autores. Algunas condiciones necesarias fueron trabajadas en, por ejemplo, los trabajos de Benson y Gordon [4], Goze y Bouyakoub [27] y Guan [31]. Sin embargo no hay condiciones suficientes generales para que un álgebra de Lie nilpotente admita una tal estructura.

En la Sección 4.2 resolvemos la existencia de estructuras simplécticas en la familia de álgebras de Lie nilpotentes libres. Describimos explícitamente aquellas álgebras en la familia que admiten este tipo de estructuras.

Los resultados en el Capítulo 3 y aquellos en las álgebras de Lie nilpotentes libres son en general negativos, es decir, de no existencia de estructuras simplécticas en la familia estudiada. Esto nos lleva a investigar formas de construcción de nuevos ejemplos de álgebras de Lie simplécticas. Con este propósito incluimos en la Sección 4.3 el estudio en detalle del procedimiento de doble extensión de álgebras de Lie simplécticas siguiendo los trabajos de Dardié, Medina y Revoy [13], [52]. A través del mismo construimos una nueva familia de álgebras de Lie simplécticas y estudiamos sus características.

Los resultados obtenidos durante el trabajo de tesis han sido y están siendo difundidos en diversos ámbitos:

La caracterización de las álgebras de Lie nilpotentes libres simplécticas (Sección 4.2) conforma el trabajo *Symplectic Structures on free nilpotent Lie algebras* [14] que se encuentra disponible en arxiv.org y ha sido enviado para su publicación.

La teoría de cohomología intermedia que abarca el Capítulo 2 y el resultado en el Teorema 3.1.3 junto con su aplicación a las álgebras tipo Heisenberg de la Sección 3.3 formaron parte de la comunicación *Estructuras simplécticas en nilvariedades* en la reunión anual de la Unión Matemática Argentina del 2010 (Tandil). Un resumen de la misma se encuentra disponible en la página institucional de la UMA (http://www.union-matematica.org.ar).

Actualmente trabajamos conjuntamente con Simon Salamon en la preparación del artículo *Canonical decomposition of the cohomology groups of nilpotent Lie algebras* que consta de la definición de la cohomología intermedia, sus propiedades y el cálculo en dimensión ≤ 6 (Capítulo 2 fundamentalmente).

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

La intención de este capítulo es dar un glosario de definiciones, ejemplos y propiedades de la teoría de grupos y álgebras de Lie nilpotentes y de las nilvariedades que serán utilizados a lo largo de todo el trabajo. Aquí presentamos propiedades básicas de la topología de los grupos de Lie nilpotentes y variedades homogéneas, en particular, las nilvariedades. En cuanto a las álgebras de Lie nilpotentes recopilamos teoremas clásicos como el de Engel y lo ligamos a las representaciones de estas álgebras de Lie, introducimos la noción de cohomología de álgebras de Lie y vinculamos esta definición a la cohomología de de Rham de las nilvariedades a través del Teorema de Nomizu. En una tercera parte mostramos una gran familia de álgebras de Lie nilpotentes: los nilradicales de las álgebras de Borel correspondientes a las álgebras de Lie simples complejas. Las álgebras de Lie que conforman esta familia serán analizadas con más detalle en la Sección 3.2.

A lo largo de estos preliminares intentaremos mantener el caracter básico de la presentación. La mayoría de los resultados recopilados pueden encontrarse en referencias clásicas como lo son los libros de Helgason [34], Varadarajan [67], Lee [47], Humphreys [36], Jacobson [39], San Martín [63] y Knapp [44].

1.1. Variedades Homogéneas

Una variedad diferenciable M se dice *homogénea* si existe un grupo de Lie G que actúe de manera transitiva en M. Estas variedades se describen como cocientes de grupos de Lie por subgrupos cerrados.

Dado un grupo de Lie G y un subgrupo cerrado H, el conjunto $H\backslash G$ de coclases a derecha admite una única estructura de variedad diferenciable de manera que la proyección canónica $\pi : G \longrightarrow H\backslash G$ sea diferenciable (ver [47] por ejemplo). La multiplicación a derecha en G induce una acción de G en $H\backslash G$: $Ha \cdot g = H(ag)$. Esta acción es transitiva y diferenciable. Denotamos con μ_g al difeomorfismo de $H\backslash G$ que define cada $g \in G$. Notemos que la dimensión de $H\backslash G$ es la diferencia $\dim G - \dim H$. Si H además es un subgrupo normal el cociente resulta grupo de Lie.

El objeto de estudio en este trabajo son las variedades homogéneas de la forma $\Gamma\backslash N$ con

- N grupo de Lie nilpotente conexo y simplemente conexo y

- Γ subgrupo discreto cocompacto de G.

Estas variedades se denominan *nilvariedades.* Por lo anterior, la dimensión de una nilvariedad $M = \Gamma\backslash N$ coincide con la dimensión del grupo de Lie N por ser Γ discreto. El hecho que el subgrupo Γ sea cocompacto significa que se elige de manera tal que M resulte compacta.

Recordemos que un grupo de Lie N es nilpotente si su álgebra de Lie $\mathfrak{n}$ lo es; y un álgebra de Lie $\mathfrak{n}$ es *nilpotente* si existe algún natural k de manera que $\mathfrak{n}^k = 0$ donde

$$\mathfrak{n}^0 = \mathfrak{n}, \qquad \mathfrak{n}^i = [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}^{i-1}] \qquad i \geq 1.$$

En el desarrollo del trabajo estudiamos en detalle las álgebras de Lie nilpotentes.

Todo grupo de Lie nilpotente conexo y simplemente conexo es difeomorfo a $\mathbb{R}^n$ para algún n [67]. De hecho, la aplicación exponencial $\exp : \mathfrak{n} \longrightarrow N$ es un difeomorfismo y el grupo de Lie N se identifica con el espacio vectorial $\mathfrak{n}$ considerando el producto dado por la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff.

Dado un grupo de Lie nilpotente cualquiera N no es sencillo determinar a priori si éste admite o no la existencia de subgrupos discretos cocompactos. Sin embargo Malcev ([49]) prueba que N admite un subgrupo discreto cocompacto siempre y cuando su álgebra de Lie $\mathfrak{n}$ posea una base cuyos coeficientes de estructura sean racionales.

Las nilvariedades son siempre no simplemente conexas ya que el grupo fundamental $\pi_1(\Gamma\backslash N)$ coincide con Γ ([50]). Más aún dos nilvariedades son difeomorfas si y sólo si sus grupos fundamentales son isomorfos. Las nilvariedades son *paralelizables*, esto es, admiten una base global de campos. Esta base proviene de proyectar una base de campos invariantes a izquierda en N. Como consecuencia de este hecho, la característica de Euler de las nilvariedades $\chi(N)$ es cero ([6]).

Las estructuras invariantes en G y $H\backslash G$ han sido ampliamente estudiadas. Ejemplos de las mismas son las métricas invariantes, estructuras complejas invariantes, estructras simplécticas, entre otras.

Una métrica Riemanniana $\langle\, , \rangle$ en G es *invariante a izquierda* si las traslaciones a izquierda $L_g : G \longrightarrow G$, $h \mapsto gh$ son isometrías. Dar una métrica Riemanniana invariante a izquierda en un grupo de Lie conexo G equivale a dar un producto interno Q_e en $\mathfrak{g}$. En efecto, si X, Y son campos en G, definimos $\langle X, Y\rangle_h = Q_e(dL_{h^{-1}}X, dL_{h^{-1}}Y)$.

De la misma manera, una forma diferenciable $\sigma \in \Omega^*(G)$ es *invariante a izquierda* si $L_g^*\sigma = \sigma$ para todo $g \in G$. En tal caso nuevamente σ queda determinada por su valor en la identidad. Es decir, las formas invariantes a izquierda se identifican con los elementos en el álgebra exterior $\Lambda^*\mathfrak{g}^*$. Definiciones y conclusiones análogas se obtienen para estructuras complejas invariantes y otros tensores invariantes.

Cuando la variedad es una nilvariedad, estas estructuras invariantes a izquierda en N se inducen de manera directa a $\Gamma\backslash N$. Sin embargo, las estructuras inducidas no resultan en general invariantes por la acción del grupo N en $\Gamma\backslash N$, es decir, no son invariantes por μ_g. Remarcamos este hecho para evitar, por ejemplo, confundir una estructura Riemanniana en $\Gamma\backslash N$ con una estructura Riemanniana homogénea en la misma variedad (comparar con [20]).

En el caso particular de las formas, la forma diferenciable $\tilde{\sigma}$ inducida en $M = \Gamma\backslash N$ por la forma invariante a izquierda $\sigma \in \Omega^*(N)$, es la única 1-forma en M tal que $\pi^*\tilde{\sigma} = \sigma$. En la correspondencia $\sigma \mapsto \tilde{\sigma}$, las formas cerradas inducen formas cerradas. Este hecho implica una relación entre la cohomología de de Rham de M y la cohomología del álgebra de Lie $\mathfrak{n}$. Más adelante, en el contexto de las definiciones de cohomología, veremos en detalle esta relación entre las mismas. Precisamente en el marco del Teorema de Nomizu.

A las métricas o formas en M (o N) que se obtengan por traslación a izquierda de las correspondientes en $\mathfrak{n}$ las denominaremos *métricas o formas inducidas.*

En este trabajo, en general tomaremos el estudio de las nilvariedades desde el punto de vista algebraico en el sentido que trabajaremos mayoritariamente a nivel del álgebra de Lie $\mathfrak{n}$. A pesar de ello, no dejamos de tener en cuenta las implicancias en la geometría de las nilvariedades y los grupos de Lie nilpotentes que el álgebra de Lie define.

1.2. Álgebras de Lie nilpotentes

Dada un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ la *serie central descendente* es la sucesión decreciente de ideales de $\mathfrak{g}$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 \supseteq \mathfrak{g}^1 \supseteq \dots \mathfrak{g}^i \supseteq \mathfrak{g}^{i+1} \supseteq \dots$$

donde

$$\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}, \qquad \mathfrak{g}^i = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{i-1}] \qquad i \geq 1.$$

Aquí utilizaremos mayormente la notación $\mathfrak{g}'$ para $\mathfrak{g}^1$. Formalizamos la definición de álgebras de Lie nilpotentes.

Definición 1.2.1. *Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es* nilpotente *si para algún $k \in \mathbb{N}$ se verifica $\mathfrak{g}^k = 0$. Si además k es tal que $\mathfrak{g}^{k-1} \neq 0$ diremos que $\mathfrak{g}$ es k*-pasos *nilpotente.*

Por ejemplo las álgebras de Lie abelianas son un paso nilpotente. Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es 2-pasos nilpotente si $\mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'] = 0$ y $\mathfrak{g}' \neq 0$. El ejemplo canónico de álgebras de Lie nilpotentes es el conjunto de matrices triangulares superiores estrictas.

Ejemplo 1.2.2. *Sea $\mathfrak{t}(n, \mathbb{C})$ el conjunto de matrices cuadradas con coeficientes en $\mathbb{C}$, $A = (a_{ij})$, de tamaño $n \times n$ y triangulares superiores estrictas (i.e. $a_{ij} = 0$ si $i \geq j$). Este conjunto con el corchete de Lie dado por*

$$[x, y] = xy - yx, \quad x, y \in \mathfrak{t}(n, \mathbb{C}).$$

es un álgebra de Lie nilpotente compleja. En efecto el s-ésimo término de la serie central descendente es

$$\mathfrak{t}(n, \mathbb{C})^s = \{A = (a_{ij}) \in \mathfrak{t}(n, \mathbb{C}) : a_{ij} = 0 \ si \ i \geq j - s\}.$$

Luego $\mathfrak{t}(n,\mathbb{C})^{n-1}=0$ *y* $\mathfrak{t}(n,\mathbb{C})$ *es nilpotente.*

De manera análoga se define el álgebra de Lie nilpotente real $\mathfrak{t}(n,\mathbb{R})$.

La representación adjunta $\mathrm{ad}:\mathfrak{g}\longrightarrow gl(\mathfrak{g})$ de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ le asigna a cada elemento $x\in\mathfrak{g}$ la función $\mathrm{ad}(x):\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g}$ donde $\mathrm{ad}(x)(y)=[x,y]$ para todo $y\in\mathfrak{g}$. El conocido Teorema de Engel caracteriza las álgebras nilpotentes a través de esta representación.

Teorema 1.2.3 (Engel)**.** *Un álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *es nilpotente si y sólo si* $\mathrm{ad}(x)$ *es una transformación nilpotente para todo* $x\in\mathfrak{g}$.

Para dar la prueba del teorema haremos uso del siguiente lema que enunciamos sin demostración.

Lema 1.2.4. *Sea* V *un espacio vectorial de dimensión finita y* $\mathfrak{g}$ *una subálgebra de* $gl(V)$ *tal que todo endomorfismo* x *de* $\mathfrak{g}$ *es nilpotente. Entonces existe un vector* $v\in V$ *no nulo que verifica* $xv=0$ *para todo* $x\in\mathfrak{g}$.

Prueba del teorema. Supongamos que $\mathfrak{g}$ es tal que para todo $x\in\mathfrak{g}$, ad_x es un endomorfismo nilpotente, es decir, para cada x existe un $m\in\mathbb{N}$ tal que $x^m\equiv 0$. Mostraremos que existe una base de $\mathfrak{g}$ en la cual, para todo $x\in\mathfrak{g}$, la matriz de ad_x es triangular superior estricta.

Dado que $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ es subálgebra de $gl(\mathfrak{g})$ y ad_x es nilpotente $\forall\, x\in\mathfrak{g}$, por el lema anterior existe $e_1\in\mathfrak{g}$ tal que $\mathrm{ad}_x e_1=0\ \forall x\in\mathfrak{g}$; sea E_1 el subespacio generado por e_1. Como E_1 es un subespacio invariante por toda ad_x, está bien definida la aplicación

$$\overline{\mathrm{ad}}:\mathfrak{g}\longrightarrow gl(\mathfrak{g}/E_1),\quad x\mapsto\overline{\mathrm{ad}}_X\,/\,\overline{\mathrm{ad}}_X(Y)=\pi([X,Y]),$$

con $\pi:\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g}/E_1$ la aplicación cociente. Nuevamente cada $\overline{\mathrm{ad}}_x$ es un endomorfismo nilpotente en $\mathfrak{g}/E_1$ y $\overline{\mathrm{ad}}(\mathfrak{g})$ es una subálgebra de $gl(\mathfrak{g}/E_1)$. Aplicando el lema, existe $e_2\in\mathfrak{g}$ tal que $\overline{\mathrm{ad}}_x\pi(e_2)=0$ en $\mathfrak{g}/E_1$ para todo $x\in\mathfrak{g}$. Es decir, $e_2\notin E_1$ y $\mathrm{ad}_x e_2\in E_1\ \forall\, x\in\mathfrak{g}$.

Repitiendo este proceso en forma sucesiva se obtiene una base $e_1,e_2,\ldots,e_n$ de $\mathfrak{g}$ de manera que para todo $x\in\mathfrak{g}$, $\mathrm{ad}_x e_i\in span\{e_1,e_2,\ldots,e_{i-1}\}$ si $i\geq 2$ y $\mathrm{ad}_x e_1=0$. Esta es la base buscada. En efecto, la serie central descendente de $\mathfrak{g}$ verifica

$$\mathfrak{g}^i\subseteq span\{e_1,\ldots,e_{n-i}\},\qquad i\geq 0$$

y por lo tanto $\mathfrak{g}^n=0$ resultando $\mathfrak{g}$ nilpotente.

Por otro lado si $\mathfrak{g}$ es k-pasos nilpotente y $x\in\mathfrak{g}$ entonces $\mathrm{ad}_x^k\equiv 0$. En efecto, dados $x,y\in\mathfrak{g}$ resulta $\mathrm{ad}_x^k y=[x,[x,\cdots,[x,y]]\cdots]\in\mathfrak{g}^k=0$. ■

El Teorema de Ado asegura que toda álgebra de Lie de dimensión finita admite una representación inyectiva $\rho:\mathfrak{g}\longrightarrow gl(V)$. Dicho de otra manera, toda álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es subálgebra de Lie de $gl(V)$ para algún espacio vectorial V de dimensión finita.

Además si $\mathfrak{n}$ es un álgebra de Lie nilpotente, existe una representación inyectiva $\rho:\mathfrak{n}\longrightarrow gl(V)$ de manera que $\rho(x)$ es un endomorfismo nilpotente para todo $x\in\mathfrak{n}$ ([39]). Esto permite caracterizar las álgebras de Lie nilpotentes como subálgebras del álgebra de matrices triangulares superiores estrictas del Ejemplo 1.2.2.

Corolario 1.2.5. *Un álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *es nilpotente si y sólo si es isomorfa a una subálgebra del álgebra de matrices triangulares superiores.*

Introducimos a continuación una definición equivalente de álgebra nilpotente en término de formas diferenciales. Ésta será la más utilizada en lo que resta del trabajo.

La diferencial de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es la aplicación dada por

$$d : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \Lambda^2\mathfrak{g}^*, \; x^* \mapsto dx^* / \, dx^*(u,v) = -x^*([u,v]) \; \forall \, u,v \in \mathfrak{g}. \tag{1.1}$$

Recordemos que $\Lambda^p\mathfrak{g}^*$ es el espacio de p-formas alternantes en $\mathfrak{g}$.

A través de la misma se definen los siguientes subespacios de $\mathfrak{g}^*$.

$$V_0 = \{0\} \qquad\qquad V_i = \{\alpha \in \mathfrak{g}^* : d\alpha \in \Lambda^2 V_{i-1}\} \qquad i \geq 1. \tag{1.2}$$

Observemos que $V_1 = \ker\, d$ y vale $V_0 \subseteq V_1 \subseteq \cdots \subseteq V_i \subseteq \cdots$.

Proposición 1.2.6 (ver [62]). *Para todo* $i \geq 0$, $V_i = \{x^* \in \mathfrak{g}^* \,:\, x^*(u) = 0, \; \forall u \in \mathfrak{g}^i\} = (\mathfrak{g}^i)^\circ$.

Prueba. El caso $i = 0$ es obvio. Dado que $dx^*(u,v) = -x^*([u,v])$ se demuestra la igualdad para $i = 1$. Seguiremos la prueba por inducción. Si la proposición es válida para i se tiene $x^* \in V_{i+1} \Leftrightarrow dx^* \in \Lambda^2(\mathfrak{g}^i)^\circ$ y por lo tanto $x^* \in V_{i+1} \Leftrightarrow dx^*(u,v) = 0 \;\; \forall u \in \mathfrak{g}$, $v \in \mathfrak{g}^i$. De donde se deduce $V_{i+1} = (\mathfrak{g}^{i+1})^\circ$. ■

De esta proposición surge la definición equivalente de álgebra nilpotente.

Corolario 1.2.7. *Un álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *es k-pasos nilpotente si y sólo si* $V_k = \mathfrak{g}^*$ *y* $V_{k-1} \neq \mathfrak{g}^*$.

La aplicación diferencial de (1.1) se extiende a los espacios $\Lambda^p\mathfrak{g}^*$ $p = 0, \ldots, m = \dim \mathfrak{g}$ como derivación y da lugar al siguiente complejo de cocadenas denominado complejo de Chevalley-Eilenberg de $\mathfrak{g}$

$$C^* : \qquad 0 \to \mathbb{R} \to \mathfrak{g}^* \xrightarrow{d} \Lambda^2\mathfrak{g}^* \to \ldots \to \Lambda^m\mathfrak{g}^* \to 0. \tag{1.3}$$

La condición de Jacobi de $\mathfrak{g}$ es válida si y sólo si $d^2 : \mathfrak{g} \longrightarrow \Lambda^3\mathfrak{g}^*$ es la aplicación nula. En efecto, para cada $f \in \mathfrak{g}^*$, $u, v, w \in \mathfrak{g}$,

$$(d^2 f)(u,v,w) = -f([[u,v],w] + [[v,w],u] + [[w,u],v]).$$

Luego, definir un corchete de Lie $[\,,\,]$ en un espacio vectorial V da lugar a una función $d : V^* \longrightarrow \Lambda^2 V^*$ tal que, al extenderla por derivación, resulte $d^2 : V^* \longrightarrow \Lambda^3 V^*$ la aplicación nula. Recíprocamente, si $d : V^* \longrightarrow \Lambda^2 V^*$ es una función lineal tal que su extensión por derivación resulta la aplicación nula, entonces la aplicación $[\,,\,] : V \times V \longrightarrow V$ que satisface

$$x^*([u,v]) = -dx^*(u,v), \quad \forall \, u,v \in V, \; \forall x^* \in V^*$$

es un corchete de Lie en V.

La cohomología del complejo (1.3) se denomina cohomología trivial del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ (ver definición 1.2.8 a continuación). Para el estudio de la cohomología con representaciones no triviales referimos a los libros de Jacobson [39] y San Marín [63]. Ejemplos de aplicaciones de esta teoría son los conocidos Teoremas de Weyl y Levi de descomposición de álgebras de Lie.

Dados $u_1^*, u_2^*, \ldots, u_p^* \in \mathfrak{g}^*$ resulta (ver por ejemplo [70])

$$d(u_1^* \wedge \ldots \wedge u_p^*)(v_1, v_2, \ldots, v_{p+1}) = \sum_{s<t} (-1)^{s+t} u_1^* \wedge \ldots \wedge u_p^*([v_s, v_t], v_1, \ldots, \check{v}_s, \ldots, \check{v}_t, \ldots, v_{p+1}), \quad (1.4)$$

para $v_1, v_2, \ldots, v_{p+1} \in \mathfrak{g}$.

Definición 1.2.8. *El i-ésimo grupo de cohomología de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ con coeficientes en $\mathbb{R}$ es el grupo*

$$H^i(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) = \frac{\ker\left(d : \Lambda^i \mathfrak{g}^* \longrightarrow \Lambda^{i+1}\mathfrak{g}^*\right)}{\operatorname{Im}\left(d : \Lambda^{i-1}\mathfrak{g}^* \longrightarrow \Lambda^i \mathfrak{g}^*\right)}, \qquad i \geq 0.$$

Aquí $\Lambda^0 \mathfrak{g}^* = \mathbb{R}$. Los elementos de $Z^p = \ker\left(d : \Lambda^p \mathfrak{g}^* \longrightarrow \Lambda^{p+1}\mathfrak{g}^*\right)$ se llaman p-cociclos y aquellos de $B^p = \operatorname{Im}\left(d : \Lambda^{p-1}\mathfrak{g}^* \longrightarrow \Lambda^p \mathfrak{g}^*\right)$ se denominan p-cobordes. En adelante notaremos estos grupos como $H^p(\mathfrak{g})$ o simplemente H^p. Observemos que $H^p = 0$ si $p \geq \dim \mathfrak{g} + 1$ o $p < 0$. Analizamos H^p para $p = 0, \ldots, \dim \mathfrak{g}$ en algunos casos particulares.

Si $\mathfrak{g}$ es abeliana, $d \equiv 0$ y por lo tanto $H^p = \Lambda^p \mathfrak{g}$ para $p = 0, \ldots, \dim \mathfrak{g}$. En un álgebra nilpotente $\mathfrak{n}$, vale $\dim H^1(\mathfrak{n}) \geq 2$. En efecto $H^1(\mathfrak{n}) \cong \mathfrak{n}/[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ ya que la codimensión de $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ en $\mathfrak{n}$ es siempre mayor o igual a dos. Este hecho se debe a que si $\mathfrak{n} = \mathbb{R}x \oplus \mathfrak{n}'$, el conmutador sería

$$\mathfrak{n}' = [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] = [\mathbb{R}x \oplus \mathfrak{n}', \mathbb{R}x \oplus \mathfrak{n}'] = [\mathbb{R}x, \mathfrak{n}'] + [\mathfrak{n}', \mathfrak{n}'] \subseteq \mathfrak{n}''$$

lo cual no es posible pues en álgebras de Lie nilpotentes $\mathfrak{n}'' \subsetneq \mathfrak{n}'$ (ver también [19]).

Chevalley y Eilenberg en [10] notan que del trabajo original de Ado [1] se deduce $H^2(\mathfrak{n}) \neq 0$ si $\mathfrak{n}$ es nilpotente. Finalmente Dixmier prueba:

Teorema 1.2.9 ([18])**.** *Sea $\mathfrak{n}$ un álgebra de Lie nilpotente de dimensión m. Entonces:*

$$\dim H^p(\mathfrak{n}) \geq 2 \quad \textit{si } 1 \leq p \leq m-1 \quad \textit{y} \quad \dim H^m(\mathfrak{n}) = 1.$$

Definición 1.2.10. *Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es unimodular si* $\operatorname{traza}(\operatorname{ad}_x) = 0$ *para todo $x \in \mathfrak{g}$.*

Por el Teorema de Engel todas las álgebras nilpotentes son unimodulares. El siguiente resultado debido a Koszul es conocido como *dualidad de Poincaré.*

Teorema 1.2.11 (ver [46])**.** *Si $\mathfrak{g}$ es unimodular de dimensión m y $\{e^1, \ldots, e^m\}$ una base de $\mathfrak{g}^*$, entonces la clase de $e^1 \wedge \cdots \wedge e^m$, $[e^1 \wedge \cdots \wedge e^m]$, es no nula y $H^m(\mathfrak{g}) = span\{[e^1 \wedge \cdots \wedge e^m]\}$. Además, para todo $0 \leq p \leq m$,*

$$H^p(\mathfrak{g}) \cong H^{m-p}(\mathfrak{g}).$$

El concepto de cohomología de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ fue definido algebraicamente a través de núcleos e imágenes de operadores lineales. A pesar de esto, a través de la cohomología de $\mathfrak{g}$ se determinan propiedades geométricas y topológicas (y algebraicas) de las variedades homogéneas de la forma $\Gamma\backslash G$ donde G es un grupo de Lie conexo con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y Γ es un subgrupo discreto de G.

En una variedad diferenciable M el m-ésimo grupo de cohomología de de Rham $H^m_{dR}(M)$ es el espacio cociente de las m formas cerradas módulo las exactas en relación a la diferencial exterior de la variedad (ver por ejemplo [47] para definición, propiedades y ejemplos). Los números de Betti de la variedad M son las dimensiones de estos grupos como espacios vectoriales. Explícitamente el m-ésimo número de Betti de M es

$$\beta_m = \dim H^m_{dR}(M).$$

Por ejemplo, la cohomología de de Rham del grupo de Lie abeliano $\mathbb{R}^n$ es: $H^0_{dR}(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}$ ya que es conexo y $H^i_{dR}(\mathbb{R}^n) = 0$ si $i \geq 1$. Esto último es en virtud del Lema de Poincaré por el cual toda forma diferencial cerrada en $\mathbb{R}^n$ es exacta. Por otro lado, sabemos que el álgebra de Lie del grupo $\mathbb{R}^n$ es el álgebra de Lie abeliana n-dimensional $\mathfrak{g}_n = \mathbb{R}^n$. Vimos anteriormente que la diferencial definida en (1.1) es la aplicación nula y por lo tanto $\dim H^i(\mathfrak{g}_n) = \dim \Lambda^i \mathfrak{g}_n^*$. Luego

$$\dim H^i(\mathfrak{g}_n) = \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix}$$

que claramente son no nulos.

Con este ejemplo hacemos evidente el hecho que la cohomología de de Rham de un grupo de Lie G no coincide con la cohomología de su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Veremos que en realidad la cohomología de $\mathfrak{g}$ está relacionada a la cohomología de de Rham de las variedades homogéneas $\Gamma\backslash G$ conformadas a partir de un grupo de Lie conexo G con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y un subgrupo discreto cocompacto Γ. Mas aún, en el caso que G (o $\mathfrak{g}$) sea nilpotente $H^i(\mathfrak{g})$ coincide con $H^i_{dR}(\Gamma\backslash G)$.

Sea G un grupo de Lie con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, Γ es un subgrupo discreto y ω una forma diferencial en G invariante por la multiplicación a izquierda. Claramente ω es invariante por elementos del subgrupo Γ. Por lo tanto define una forma diferencial $\tilde{\omega}$ en la variedad homogénea $\Gamma\backslash G$. Además, si ω_1 y ω_2 son k-formas invariantes en G de manera que $\omega_1 - \omega_2 = d\,\sigma$ con σ una $k-1$-forma invariante a izquierda, entonces $\tilde{\omega}_1$ y $\tilde{\omega}_2$ son cohomólogas en $\Gamma\backslash G$. Recordemos que las formas invariantes a izquierda en G se identifican con elementos en $\Lambda^*\mathfrak{g}^*$. Queda definida entonces una inyección $H^i(\mathfrak{g}) \mapsto H^i_{dR}(\Gamma\backslash G)$. En virtud del siguiente resultado, si G (o $\mathfrak{g}$) es nilpotente esta aplicación es un isomorfismo.

Teorema 1.2.12 ([58]). *Sea N un grupo de Lie conexo nilpotente con álgebra de Lie $\mathfrak{n}$ y Γ un subgrupo discreto de manera que $\Gamma\backslash N$ sea compacto. Entonces*

$$H^p_{dR}(\Gamma\backslash N) \simeq H^p(\mathfrak{n}), \qquad p \geq 0. \tag{1.5}$$

Este resultado es conocido dentro de la geometría diferencial como el *Teorema de Nomizu.*

Las variedades homogéneas $\Gamma\backslash N$, con N un grupo de Lie nilpotente conexo y Γ un subgrupo discreto cocompacto (i.e. $\Gamma\backslash N$ es compacto), se llaman *nilvariedades*. Una consecuencia del Teorema de Nomizu es que todas las nilvariedades obtenidas a partir de un grupo de Lie nilpotente N tienen igual cohomología de de Rham, independientemente del subgrupo Γ.

Además, los números de Betti de la nilvariedad $M = \Gamma\backslash N$ coinciden con la dimensión de los grupos de cohomología de $\mathfrak{n}$, álgebra de Lie de N. Es decir, $\beta_p = \dim H^p(\mathfrak{n})$ para todo $p \geq 0$. Haciendo abuso del lenguaje, diremos que β_p es el p-ésimo número de Betti de $\mathfrak{n}$.

Otra consecuencia es que toda nilvariedad es orientable. En efecto, si $\{e_1, \dots, e_m\}$ es una base de $\mathfrak{n}$, la clase de cohomología de la m-forma $\sigma = e^1 \wedge e^2 \wedge \dots \wedge e^m$ define una m-forma no nula en $\Gamma\backslash N$ (ver Teorema 1.2.11).

El resultado de Nomizu no se extiende a variedades homogéneas generales. Yamada en [73] y Console, Ovando y Subils en [11] presentan ejemplos de solvariedades, variedades de la forma $\Gamma\backslash G$ con G soluble, donde no vale (1.5). En [55], Mostow encuentra una condición suficiente para que dado un grupo de Lie soluble G y Γ un subgrupo cocompacto, valga $H^p(\mathfrak{n}) \simeq H^p_{dR}(\Gamma\backslash N)$, $\forall p \geq 0$. Otro tipo de condiciones para grupos solubles fueron trabajadas en artículos recientes como [30], [12] y sus referencias.

1.3. Nilradicales de las subálgebras de Borel

Las subálgebras de Borel son subálgebras solubles de álgebras de Lie semisimples complejas. Su nilradical (subálgebra nilpotente maximal) será nuestro objeto de estudio. Para entender la estructura de esta álgebra de Lie nilpotente, trabajamos con conocidos sistemas de raíces.

En general, los sistemas de raíces son una herramienta para descomponer las álgebras de Lie en subálgebras más pequeñas. Daremos en lo que sigue una breve introducción al estudio de sistemas de raíces para álgebras de Lie semisimples complejas del cual se probará que cada una de ellas es suma de una subálgebra abeliana y dos nilpotentes. Éste permite también clasificar las álgebras de Lie simples complejas (ver Teorema 3.2.2 a continuación) y en consecuencia las semisimples sobre ese cuerpo.

En el Capítulo 3 haremos uso de estos preliminares para determinar la cohomología intermedia de estas álgebras nilpotentes que son nilradicales de subálgebras de Borel.

En esta sección daremos conceptos relacionados a álgebras de Lie semisimples. Veremos que en el cuerpo de los complejos, cada álgebra de Lie semisimple puede escribirse de manera única (salvo isomorfismos) como suma directa de una subálgebra abeliana maximal $\mathfrak{h}$ llamada subálgebra de Cartan y dos subálgebras nilpotentes complejas $\mathfrak{n}^+$ y $\mathfrak{n}^-$ isomorfas entre sí, es decir

$$\mathfrak{g} \text{ álgebra de Lie semisimple sobre } \mathbb{C} \;\Rightarrow\; \mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+. \tag{1.6}$$

El álgebra de Lie compleja $\mathfrak{n}^+$ admite una base $\{X_\alpha\}$ de manera que sus coeficientes de estructura son reales, por lo tanto define un álgebra de Lie real $\mathfrak{n} = \bigoplus_\alpha \mathbb{R}X_\alpha$ donde el corchete de Lie es el heredado de $\mathfrak{n}^+$. En el final de la sección nos abocamos al estudio de propiedades de esta álgebra de Lie nilpotente real.

En el transcurso de la sección incluiremos resultados sin sus pruebas, salvo aquellos que sean específicos del álgebra nilpotente $\mathfrak{n}$. Seguimos mayormente la presentación que se da en los libros de Helgason, Knapp y Wallach [34, 44, 70] a los cuales referimos al lector para las demostraciones y otras propiedades.

Definición 1.3.1. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $B(x, y) = \mathrm{traza}(\mathrm{ad}_x \, \mathrm{ad}_y)$ la forma de Killing de $\mathfrak{g}$. Diremos que $\mathfrak{g}$ es semisimple si B es una forma bilineal no degenerada sobre $\mathfrak{g}$.*

Definición 1.3.2. *Un álgebra de Lie sobre $\mathbb{K}$ se dice simple si es no abeliana y no posee ideales propios no triviales.*

El radical de Killing de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es el conjunto de elementos del álgebra donde la forma de Killing es degenerada, es decir

$$\mathrm{rad}_K = \{x \in \mathfrak{g} : B(x, y) = 0 \; \forall y \in \mathfrak{g}\}.$$

Este conjunto es siempre un ideal de $\mathfrak{g}$. Entonces $\mathrm{rad}_K = 0$ si $\mathfrak{g}$ es simple, resultando que toda álgebra de Lie simple es semisimple.

Proposición 1.3.3. *Un álgebra de Lie semisimple $\mathfrak{g}$ es suma directa de ideales simples $\mathfrak{g}_i$, $i = 1, \ldots, s$,*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_s.$$

Además, cada ideal $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$ es suma de ideales $\mathfrak{g}_i$ para algunos i.

Por esto, clasificar las álgebras de Lie simples sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ conduce a la clasificación de las semisimples sobre el mismo cuerpo.

Definición 1.3.4. *Una subálgebra de Cartan de un álgebra de Lie semisimple $\mathfrak{g}$ es una subálgebra $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ abeliana maximal y de manera que ad_H es semisimple para todo $H \in \mathfrak{h}$.*

Dada un álgebra de Lie semisimple $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{C}$ siempre existen subálgebras de Cartan en $\mathfrak{g}$ y son no triviales. De aquí en más trabajaremos con álgebras de Lie complejas semisimples, salvo que se especifique lo contrario.

Dadas dos subálgebras de Cartan $\mathfrak{h}_1$ y $\mathfrak{h}_2$ de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, existe un automorfismo de $\mathfrak{g}$ tal que $\sigma(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}_2$. Fijamos una subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$. Para cada funcional lineal $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ el conjunto

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} \, : \, \mathrm{ad}_H X = \alpha(H)X, \; \forall H \in \mathfrak{h}\}$$

es un subespacio de $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$ diremos que α es una raíz de $\mathfrak{g}$ respecto de $\mathfrak{h}$, o simplemente raíz cuando se sobreentienda en el contexto la subálgebra de Cartan a la que hacemos referencia. En el caso que $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$, el espacio $\mathfrak{g}_\alpha$ se llama espacio raíz. Observemos que $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$. Denotaremos con $\triangle$ al conjunto de las raíces no nulas.

Proposición 1.3.5. *[34, Teorem 4.2] Sea* $\mathfrak{g}$ *un álgebra de Lie semisimple compleja,* $\mathfrak{h}$ *una subálgebra de Cartan de* $\mathfrak{g}$ *y* $\triangle$ *el conjunto de raíces no nulas. Entonces*

1. $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \triangle} \mathfrak{g}_\alpha$.

2. $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$, *para cada* $\alpha \in \triangle$.

3. *si* α, β *son raíces y* $\alpha + \beta$ *es raíz no nula entonces* $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$. *Si* $\alpha + \beta$ *no es raíz, entonces* $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = 0$.

4. *Si* α *es raíz, también lo es* $-\alpha$.

5. *La forma de Killing* B *es definida positiva en* $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$. *Además para cada* $\alpha \neq 0$ *existe un* $H_\alpha \in \mathfrak{h}$ *tal que* $B(H_\alpha, H) = \alpha(H)$ *para todo* $H \in \mathfrak{h}$. *En particular,* $\alpha(H_\alpha)$ *es un número real positivo.*

Como consecuencia del primer y segundo punto, toda álgebra de Lie semisimple tiene una cantidad finita de raíces. Entre aquellas no nulas, definimos la noción de positividad. Fijamos una subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ y $X_1, X_2, \ldots, X_r$ una base de $\mathfrak{h}$. Diremos que una raíz no nula φ es positiva y lo notaremos $\varphi > 0$ si existe un índice j de manera que $\varphi(X_i) = 0$ para todo $1 \leq i \leq j-1$ y $\varphi(X_j) > 0$.

El conjunto $\triangle$ queda particionado en el conjunto de raíces positivas $\triangle^+$ y el conjunto de negativas $\triangle^-$. Claramente si $\alpha \in \triangle^+$ entonces $-\alpha \in \triangle^-$. Además, si α, β son raíces positivas y $\alpha + \beta$ es raíz, se tiene que $\alpha + \beta \in \triangle^+$. De manera análoga si la suma de dos raíces negativas es raíz, ésta es una raíz negativa. Por lo tanto,

$$\mathfrak{n}^+ = \bigoplus_{\alpha \in \triangle^+} \mathfrak{g}_\alpha \quad \text{y} \quad \mathfrak{n}^- = \bigoplus_{\alpha \in \triangle^-} \mathfrak{g}_\alpha \tag{1.7}$$

son ideales de $\mathfrak{g}$.

Definición 1.3.6. *En las notaciones de arriba, una subálgebra de Borel de un álgebra de Lie semisimple compleja* $\mathfrak{g}$ *es la subálgebra* $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \triangle^+} \mathfrak{g}_\alpha$ *que se obtiene una vez fijada la subálgebra de Cartan* $\mathfrak{h}$.

El *nilradical* de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es un ideal nilpotente que contiene a todo otro ideal nilpotente. Es obvio que los nilradicales de las álgebras de Lie nilpotentes son el álgebra en su totalidad. Probaremos que los nilradicales de las subálgebras de Borel de las álgebras de Lie semisimples complejas son las álgebras $\mathfrak{n}^+$ definidas en (1.7).

Supongamos que $\mathfrak{n}^+$ es nilpotente (ver Proposición 1.3.11 a continuación). Entonces el nilradical I de $\mathfrak{b}$ contiene a $\mathfrak{n}^+$. Si $I \neq \mathfrak{n}$ entonces debe existir un elemento $X_{\mathfrak{h}} \in \mathfrak{h} \cap I$. Pero $X_{\mathfrak{h}}$ actúa de manera semisimple en $\mathfrak{n}^+$. Luego debe ser $I = \mathfrak{n}^+$.

Nos focalizamos en probar que $\mathfrak{n}^+$ y $\mathfrak{n}^-$ son nilpotentes e isomorfas entre sí. Para ello, haremos uso de ciertas propiedades de las raíces que enunciamos a continuación.

Definición 1.3.7. *Diremos que una raíz es simple si es positiva y no puede escribirse como suma de dos raíces positivas. Notamos con* $\triangle_0$ *al conjunto de raíces simples.*

Proposición 1.3.8. *[34, Teorema 5.7] Sea* $\triangle_0 = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ *el conjunto de raíces simples. Entonces* $r = \dim \mathfrak{h}$ *y cada* $\alpha \in \triangle^+$ *se escribe de manera única como* $\alpha = \sum_{i=1}^r n_i\alpha_i$ *con* $n_i \in \mathbb{N}_0$*.*

Además existe una única raíz positiva $\beta = \sum_{i=1}^r d_i\alpha_i$ *tal que para toda otra raíz* $\alpha \in \triangle^+$ *con* $\alpha = \sum_{i=1}^r n_i\alpha_i$*, se tiene* $n_i \leq d_i$*,* $\forall i$*.*

Definición 1.3.9. *Dada una raíz positiva* $\alpha = \sum_{i=1}^r n_i\alpha_i$ *definimos su* longitud *como* $\ell(\alpha) = \sum_{i=1}^r n_i$*.*

Una raíz es simple si y sólo si tiene longitud uno. Si $\alpha, \beta, \alpha+\beta$ son raíces positivas, entonces $\ell(\alpha+\beta) = \ell(\alpha)+\ell(\beta)$. Llamamos raíz máxima a la raíz β de la proposición anterior y la notaremos $\alpha_{\text{máx}}$. Es claro que $\ell(\alpha) \leq \ell(\alpha_{\text{máx}})$ para toda $\alpha \in \triangle^+$.

Proposición 1.3.10. *Para cada* $\alpha \in \triangle$ *existe un vector* $X_\alpha \in \mathfrak{n}^+$ *de manera que si* $\alpha, \beta \in \triangle$ *y* $[X_\alpha, X_\beta] = N_{\alpha,\beta}X_{\alpha+\beta}$ *para* $N_{\alpha,\beta} \in \mathbb{C}$*, entonces* $N_{\alpha,\beta} = -N_{-\alpha,-\beta}$*.*

Proposición 1.3.11. *En las definiciones anteriores, las álgebras* $\mathfrak{n}^+$ *y* $\mathfrak{n}^-$ *son álgebras de Lie nilpotentes e isomorfas entre sí.*

Prueba. Consideramos las bases $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\triangle^+}$ y $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\triangle^-}$ de $\mathfrak{n}^+$ y $\mathfrak{n}^-$ respectivamente dadas en la Proposición 1.3.10. La aplicación $\Psi : \mathfrak{n}^+ \longrightarrow \mathfrak{n}^-$ que en tales bases vale $\Psi(X_\alpha) = -X_{-\alpha}$, para todo $\alpha \in \triangle^+$ es una transformación $\mathbb{C}$-lineal y un isomorfismo de álgebras de Lie. En efecto,

$$\begin{aligned}
\Psi[X_\alpha, X_\beta] &= \Psi(N_{\alpha,\beta}X_{\alpha+\beta}) = -N_{\alpha,\beta}X_{-(\alpha+\beta)},\\
[\Psi X_\alpha, \Psi X_\beta] &= [-X_{-\alpha}, -X_{-\beta}] = N_{-\alpha,-\beta}X_{-(\alpha+\beta)} = -N_{\alpha,\beta}X_{-(\alpha+\beta)}.
\end{aligned}$$

Probaremos que $\mathfrak{n}^+$ es nilpotente. Para cada $i \geq 1$, $P_i = \bigoplus_{\ell(\alpha)\geq i} \mathfrak{g}_\alpha$ es una subálgebra de $\mathfrak{n}^+$. Observemos que $P_1 = \mathfrak{n}^+$ y si $k = \ell(\alpha_{\text{máx}})$, entonces la dimensión de P_k es uno y $P_i = 0$ si $i > k$. Además para cada $i \geq 1$, el i-ésimo término de la serie central descendente de $\mathfrak{n}^+$ es

$$[\mathfrak{n}^+, (\mathfrak{n}^+)^{i-1}] = (\mathfrak{n}^+)^i = \bigoplus_{j\geq i+1} P_j. \tag{1.8}$$

En efecto, cada $x \in (\mathfrak{n}^+)'$ se escribe como $x = [y, z]$ con $y, z \in \mathfrak{n}^+$. Descomponemos $y = \sum_{\alpha\in\triangle^+} y_\alpha$, $z = \sum_{\alpha\in\triangle^+} z_\alpha$ según la ecuación (1.7). Entonces $x = [\sum_{\alpha\in\triangle^+} y_\alpha, \sum_{\beta\in\triangle^+} z_\beta] = \sum_{\alpha,\beta}[y_\alpha, z_\beta]$. Del punto 3. de la Proposición 1.3.5 cada corchete $[y_\alpha, z_\beta]$ o es cero o bien $0 \neq [y_\alpha, z_\beta] \in \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$. Por lo tanto, si $[y_\alpha, z_\beta] \neq 0$ entonces $[y_\alpha, z_\beta] \in P_{\ell(\alpha)+\ell(\beta)}$. Luego $x \in \bigoplus_{j\geq 2} P_j$.

Dado $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ con $\ell(\alpha) \geq 2$, existen $\beta_1, \beta_2 \in \triangle^+$ tal que $\beta_1 + \beta_2 = \alpha$. Como $[\mathfrak{g}_{\beta_1}, \mathfrak{g}_{\beta_2}] = \mathfrak{g}_\alpha$ existen y_1, y_2 de manera que $x = [y_1, y_2]$ y por lo tanto $x \in (\mathfrak{n}^+)'$. Luego $\bigoplus_{j\geq 2} P_j = \bigoplus_{\ell(\alpha)\geq 2} \mathfrak{g}_\alpha \subseteq (\mathfrak{n}^+)'$, obteniendo la igualdad (1.8) para $i = 1$.

De manera inductiva, supongamos que $(\mathfrak{n}^+)^i = \bigoplus_{j\geq i+1} P_j$ y sea $x \in (\mathfrak{n}^+)^{i+1}$, $x = [y, z]$ con $y \in \mathfrak{n}^+$, $z \in (\mathfrak{n}^+)^i$. Entonces $y = \sum_{\alpha\in\triangle^+} y_\alpha$, $z = \sum_{\alpha:\, \ell(\alpha)\geq i+1} z_\alpha$ y $x = \sum_{\alpha,\beta} [y_\alpha, z_\beta]$. Resulta cada corchete $[y_\alpha, z_\beta]$ cero o bien de longitud al menos $i+2$, por lo tanto $x \in \bigoplus_{j\geq i+2} P_j$.

Recíprocamente si $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ con $\ell(\alpha) \geq i+2$, existen $\beta_1, \beta_2 \in \triangle^+$ tal que $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ y $\ell(\beta_1) \leq i+1$. Como antes, existe $y_1 \in \mathfrak{g}_{\beta_1}$ $y_2 \in \mathfrak{g}_{\beta_2}$ tal que $x = [y_1, y_2]$. Por hipótesis inductiva $y_1 \in (\mathfrak{n}^+)^i$ lo cual implica $x \in (\mathfrak{n}^+)^{i+1}$, quedando probada la porposición. ■

Finalizada esta prueba podemos afirmar que $\mathfrak{n}^+$ es el nilradical de la subálgebra de Borel $\mathfrak{b}$.

Las distintas álgebras de Borel que surgen de los distintos sistemas de raíces de un álgebra de Lie semisimple $\mathfrak{g}$ son isomorfas. Por lo tanto sus nilradicales también lo son.

Observación 1.3.12. *Si $\alpha_{\text{máx}} = \sum_{i=1}^r d_i\alpha_i$ es la raíz máxima y $k = d_1 + \cdots + d_r$, entonces $\mathfrak{n}^+$ es k-pasos nilpotente. En efecto, de (1.8), $(\mathfrak{n}^+)^{k-1} = P_k = \mathfrak{g}_{\alpha_{\text{máx}}}$ y $(\mathfrak{n}^+)^k = 0$.*

Ejemplo 1.3.13. *$A_n = \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$ el álgebra de Lie de las matrices cuadradas complejas de tamaño $n+1$ y de traza cero.*

Dadas X, Y dos matrices en $\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$, la forma de Killing es ([34])

$$B(X, Y) = \text{traza}(\text{ad}_X\, \text{ad}_Y) = 2\,(n+1)\, X\, Y$$

y por lo tanto no degenerada. Luego, A_n es semisimple.

Notamos con $E_{i,j}$ la matriz que tiene un 1 en la posición ij y ceros en el resto. Una base de A_n es $\{H_i := E_{i,i} - E_{i+1,i+1}, E_{j,k},\ i = 1, \ldots, n,\ 1 \leq j \neq k \leq n+1\}$. Esta base descompone a A_n como

$$A_n = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{i\neq j} \mathbb{C}E_{i,j}, \tag{1.9}$$

donde $\mathfrak{h} = span\{H_i, i = 1, \ldots, n\}$. Observemos que $\mathfrak{h}$ es una subálgebra de A_n y es abeliana al estar conformada por matrices diagonales. Además, si $H = diag(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}) \in \mathfrak{h}$,

$$[H, E_{i,j}] = (a_i - a_j)\, E_{i,j}, \qquad \text{para todo } i \neq j.$$

Esto implica, junto con (1.9), que $\mathfrak{h}$ es subálgebra abeliana maximal cuyos elementos actúan de manera semisimple. Luego $\mathfrak{h}$ es una subálgebra de Cartan de A_n.

Para cada $i = 1, \ldots, n+1$, definimos los funcionales $e_i : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathbb{C}$, de manera que para cada $H = diag(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}) \in \mathfrak{h}$, $e_i(H) = a_i$. Estos elementos satisfacen,

$$[H, E_{i,j}] = (e_i - e_j)(H)\, E_{i,j}.$$

Es decir, los elementos $\{e_i - e_j\}_{1\leq i\neq j\leq n}$ de $\mathfrak{h}^*$ son las raíces de A_n. Claramente, el espacio raíz de $e_i - e_j$ es $\mathfrak{g}_{e_i - e_j} = \mathbb{C}E_{i,j}$.

Tomando una base de $\mathfrak{h}$ de manera que para cada H en la base sea $a_i > a_j \geq 0$ si $1 \leq i < j \leq n$ y $a_{n+1} = -\sum_{i=1}^n a_i$, se tiene que las raíces positivas son $e_i - e_j$ con $1 \leq i < j \leq n+1$

Luego la subálgebra de Borel asociada a A_n con este sistema de raíces es

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{1 \leq i < j \leq n+1} \mathfrak{g}_{e_i - e_j}$$

y su nilradical

$$\mathfrak{n}^+ = \bigoplus_{1 \leq i < j \leq n+1} \mathfrak{g}_{e_i - e_j} = \bigoplus_{1 \leq i < j \leq n+1} \mathbb{C}E_{i,j}$$

que no es otra cosa que el álgebra de Lie de matrices triangulares superiores estrictas.

Las constantes de estructura $N_{\alpha,\beta}$ correspondientes a la base $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \triangle^+}$ de $\mathfrak{n}^+$ dada en la Proposición 1.3.10 son en principio números complejos. Sin embargo es posible probar que $N_{\alpha,\beta} \in \mathbb{R}$, $\forall\, \alpha, \beta \in \triangle^+$ (ver [69, Teorema 3.5.7]).

En consecuencia, el álgebra de Lie $\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha \in \triangle^+} \mathbb{R}X_\alpha$ es un álgebra de Lie real, nilpotente y con iguales coeficientes de estructura que el álgebra de Lie compleja $\mathfrak{n}^+$. A este álgebra de Lie real la notamos con $\mathfrak{n}$ y la seguiremos llamando nilradical de la subálgebra de Borel $\mathfrak{b}$. Estudiamos la estructura de $\mathfrak{n}$ como álgebra de Lie.

Todo nilradical de una subálgebra de Borel es un álgebra de Lie $\mathbb{N}$-graduada. Es decir puede descomponerse como suma directa de subespacios tal que

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_i \mathfrak{g}_i, \quad i \in \mathbb{N}, \qquad [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subseteq \mathfrak{g}_{i+j}, \quad \forall i, j, \in \mathbb{N}. \tag{1.10}$$

Una graduación de $\mathfrak{n}$ es aquella que para cada $i \in \mathbb{N}$, $L_i = \bigoplus_{\alpha : \ell(\alpha) = i} \mathbb{R}X_\alpha$. Estos subespacios son, por ejemplo, $L_1 = span_{\mathbb{R}}\{X_\alpha : \alpha \in \triangle_0\}$ y $L_k = span_{\mathbb{R}}\{X_{\alpha_{\text{máx}}}\}$. Observemos que, en comparación con aquellos subespacios $\{P_j\}_{j \geq 1}$ definidos en la Proposición 1.3.11, se tiene $P_i = \bigoplus_{j=i}^k L_j$. En particular, $\mathfrak{n} = \bigoplus_{j \geq 1} L_j$ y $[L_j, L_i] = L_{i+j}$.

En lo que resta del capítulo notaremos $\{\gamma_\alpha \,:\, \alpha \in \triangle^+\}$ la base de $\mathfrak{n}^*$, dual a la base $\{X_\alpha\}$ proveniente de la Proposición 1.3.10 y L_i^* el espacio dual a L_i es decir, $L_i^* = span_{\mathbb{R}}\{\gamma_\alpha : \ell(\alpha) = i\}$.

Corolario 1.3.14. *Sea $\alpha \in \triangle^+$ y $m = \ell(\alpha)$. Entonces $d\gamma_\alpha \in \bigoplus_{i+j=m} L_i^* \wedge L_j^*$. En particular $d\gamma_\alpha = 0$ si y sólo si α es una raíz simple ($\alpha \in \triangle_0$).*

Prueba. Como la diferencial de $\mathfrak{n}$ es la aplicación dual del corchete de Lie, tenemos que

$$d\gamma_\alpha = \frac{1}{2} \sum_{\beta,\delta} -\gamma_\alpha([X_\beta, X_\delta])\, \gamma_\beta \wedge \gamma_\delta.$$

Salvo que $\beta + \delta = \alpha$, se tiene $\gamma_\alpha([X_\alpha, X_\beta]) = 0$ de lo cual se desprende el resultado. ■

Para cerrar esta sección, determinamos los subespacios V_j, $j = 0, 1, \ldots$ de $\mathfrak{n}^*$ definidos en (1.2). Los mismos se describen a partir de la graduación del álgebra de Lie y, por lo tanto, en término de longitudes de raíces. Las Proposiciones 1.3.11 y 1.2.6 implican:

Corolario 1.3.15. *Sea* $\mathfrak{n}$ *el álgebra de Lie real asociada a un álgebra de Lie semisimple compleja y* $k = \ell(\alpha_{\text{máx}})$*. Entonces* $V_j = span\{\gamma_\beta : \ell(\beta) \leq j\} = L_1^* \oplus \cdots \oplus L_j^*$ *para cada* $j \geq 1$*. En particular,*

$$V_1 = span\{\gamma_\beta : \ell(\beta) = 1\} = L_1^*, \quad V_2 = span\{\gamma_\beta : \ell(\beta) \leq 2\} = L_1^* \oplus L_2^*, \ \cdots \quad V_k = \mathfrak{n}^* = L_1^* \oplus \cdots \oplus L_k^*.$$

Capítulo 2

Introducción a la Cohomología Intermedia

En esta sección introduciremos el concepto de cohomología intermedia de un álgebra de Lie nilpotente. Para ello, consideramos una filtración del complejo de Chevalley-Eilenberg que aparece naturalmente cuando el álgebra de Lie es nilpotente. Precisamente es la filtración que se construye a partir de los anuladores de los ideales en la serie central descendente del álgebra.

Esta filtración induce una sucesión espectral de cohomología que converge a la cohomología del álgebra de Lie con coeficientes triviales. Como consecuencia de esta convergencia, obtenemos una descomposición en suma directa de cada grupo de cohomología del álgebra de Lie. Más precisamente, los términos límites de esta sucesión espectral refinan la cohomología usual de álgebras de Lie.

La organización del capítulo es la siguiente. Comenzamos con una breve introducción a las sucesiones espectrales, focalizándonos en aquellas provenientes de una filtración de un complejo de cocadenas. Como caso particular, aplicamos tales conceptos al complejo de Chevalley-Eilenberg de las álgebras de Lie nilpotentes y a través de ello surge la definición de cohomología intermedia.

A continuación, estudiamos propiedades de esta cohomología y desarrollamos s que ilustran cómo calcularla a través de la diferencial del álgebra. También mostramos una manera conveniente y resumida de expresar esta cohomología presentando las tablas de cohomología intermedia.

Cerramos el capítulo dando las tablas de cohomología intermedia de las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión menor o igual que seis.

2.1. Sucesión espectral de una filtración

Daremos a continuación las nociones básicas de complejos de cadena, filtraciones de los mismos y sucesiones espectrales. Introducimos este tema con la generalidad necesaria para este trabajo. Remitimos al libro de Weibel [71] para definiciones más generales dadas a través de la teoría de categorías y álgebra homológica. Otra referencia que tiene una presentación más informal pero aporta claridad a los conceptos es el libro de P. Griffiths y J. Harris [29], particularmente para la demostración del Teorema 2.1.4.

Definición 2.1.1. *Un* complejo de cocadenas (C^*, d) *es una familia* $C^* = \{C^i\}_{i\in\mathbb{N}_0}$ *de espacios vectoriales donde* $C^0 = \{0\}$ *junto con transformaciones lineales* $\{d^i : C^i \longrightarrow C^{i+1}\}_{i\geq 0}$ *de manera que* $d^{i+1} \circ d^i = 0$ *para* $i \geq 0$*. Por esta última propiedad, las aplicaciones* d^i *se llaman* diferenciales*. El i-ésimo grupo de cohomología de* (C^*, d) *se define*

$$H^i(C^*) = \frac{ker\,\{d^i : C^i \longrightarrow C^{i+1}\}}{Im\,\{d^{i-1} : C^{i-1} \longrightarrow C^i\}}.$$

Cuando no haya lugar a confusión notaremos el complejo con C^*. Dado un complejo de cocadenas, se llama i-cociclos a los elementos de $Z^i = ker\,\{d^i : C^i \longrightarrow C^{i+1}\}$ e i-cobordes a los de $B^i = Im\,\{d^{i-1} : C^{i-1} \longrightarrow C^i\}$. Según la definición anterior, $H^i(C^*) = Z^i/B^i$.

Si para cada i, J^i es un subespacio de C^i y $d(J^i) \subset J^{i+1}$ $\forall i \geq 0$, se define $d^i_J : J^i \longrightarrow J^{i+1}$ como la restricción de d^i a J^i. En ese caso diremos que (J^*, d_J) es un *subcomplejo* de (C^*, d). Cuando J^* es un subcomplejo de C^* resulta bien definido el complejo cociente

$$\frac{C^*}{J^*} : \frac{C^0}{J^0} \longrightarrow \frac{C^1}{J^1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \frac{C^i}{J^i} \longrightarrow \cdots$$

donde las diferenciales son las inducidas por d al cociente.

Más generalmente, una *filtración decreciente* de un complejo de cocadenas (C^*, d) es una sucesión decreciente de subcomplejos de la forma

$$0 \subseteq F^kC^* \subset F^{k-1}C^* \subset \ldots \subset F^pC^* \subset F^{p-1}C^* \subset \ldots \subset F^1C^* \subset F^0C^* = C^*. \tag{2.1}$$

La filtración es *acotada* si $F^kC^* = 0$ para algún k. Dada una filtración de un complejo C^*, se obtiene una familia de complejos cocientes F^kC^*, $F^{k-1}C^*/F^kC^*$, ..., $F^pC^*/F^{p+1}C^*$, ..., C^*/F^1C^*. En lo que sigue trabajamos con filtraciones acotadas de un complejo C^* y veremos que en este caso la cohomología del mismo puede obtenerse a partir de la cohomología de los complejos cocientes provenientes de la filtración, para ello introducimos el concepto de sucesión espectral.

Definición 2.1.2. *Una* sucesión espectral de cohomología *es una familia de espacios vectoriales* $\{E_r^{p,q}\}_{r\geq 0}^{p,q\in\mathbb{Z}}$ *junto con funciones lineales* $d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \longrightarrow E_r^{p+r,q-r+1}$ *para cada* $r \geq 0, p, q \in \mathbb{Z}$ *que verifican*

$$d_r^{p+r,q-r+1} \circ d_r^{p,q} = 0 \qquad y \qquad E_{r+1}^{p,q} \cong \frac{ker\, d_r^{p,q}}{Im\, d_r^{p-r,q+r-1}} \qquad \forall r \geq 1,\ p, q \in \mathbb{Z}.$$

Si $r > 1$, las líneas de pendiente $(r-1)/r$ del espacio vectorial bigraduado $\{E_r^{p,q}\}_{p,q\in\mathbb{Z}}$ forman complejos de cocadenas ya que la diferencial preserva esas rectas. El *grado total* del término $E_r^{p,q}$ es $n := p+q$; los términos de grado total n se encuentran en una recta por el origen de pendiente -1 y cada diferencial $d_r^{p,q}$ aumenta el grado total en 1. Cuando referencia a un elemento genérico $E_r^{p,q}$ de la sucesión espectral donde p,q no sea de relevancia, notaremos E_r.

Una sucesión espectral se dice *acotada* si para cada entero n existen sólo una cantidad finita de términos no nulos de grado total n en E_0; es decir, para cada n existen enteros s_n y S_n de manera que $E_0^{p,q}=0$ salvo para $s_n \leq p \leq S_n$. Dado que cada E_r es un subcociente de E_0 resulta que sólo hay una cantidad finita de términos no nulos de grado total n en E_r para todo $r \geq 0$ si la sucesión espectral es acotada.

Para una sucesión espectral acotada y para cada p_0, q_0 fijos existe un r_0 tal que $E_r^{p,q} = E_{r_0}^{p,q}$ si $r \geq r_0$. En efecto, sea $n = p_0 + q_0$ el grado total de $E_r^{p_0,q_0}$. Tomando r suficientemente grande será $p_0 + r > S_{n+1}$ y por lo tanto la función $d_r^{p_0,q_0} : E_r^{p_0,q_0} \longrightarrow E_r^{p_0+r,q_0-r+1}$ es nula. De la misma forma, existe un r suficientemente grande que además verifica $p_0 - r < s_{n-1}$ y por lo tanto $E_r^{p_o-r,q_0+r-1} = 0$. Luego $d_r^{p_0+r,q_0-r+1} : E_r^{p_0+r,q_0-r+1} \longrightarrow E_r^{p_0,q_0}$ también es nula. Dado que E_{r+1} es la cohomología de E_r, tendremos $E_{r+1}^{p_0,q_0} = E_r^{p_0,q_0}$. Más aún $E_{r+k}^{p,q} = E_r^{p,q}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Notaremos con $E_\infty^{p_0,q_0}$ a este valor estable (o límite) de la sucesión espectral. Este valor límite que aparece en las sucesiones espectrales acotadas está asociado al concepto de convergencia de la sucesión.

Definición 2.1.3. *Sea $H^* = \{H^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una familia de espacios vectoriales. La sucesión espectral $\{E_r^{p,q}\}$* converge *a H^* si para cada n existe una filtración finita*

$$0 = F^tH^n \subseteq \ldots \subseteq F^{p+1}H^n \subseteq F^pH^n \subseteq F^{p-1}H^n \subseteq \ldots \subseteq F^0H^n = H^n,$$

e isomorfismos $E_\infty^{p,q} \cong F^pH^{p+q}/F^{p+1}H^{p+q}$.

Si la sucesión espectral $\{E_r^{p,q}\}$ converge a H^*, notaremos

$$E_r^{p,q} \Rightarrow H^{p+q},$$

y en ese caso

$$H^n \;\cong\; \frac{H^n}{F^1H^n} \oplus \cdots \oplus \frac{F^{p-1}H^n}{F^pH^n} \oplus \frac{F^pH^n}{F^{p+1}H^n} \oplus \cdots \oplus \frac{F^{t-1}H^n}{F^tH^n} \oplus F^tH^n \;\cong\; \bigoplus_{i=0}^{t} E_\infty^{i,n-i}.$$

Supongamos que C^* es un complejo de cocadenas que posee una filtración como en (2.1). Para cada $p, i \geq 0$ definimos $F^pB^i := B^i \cap F^pC^i$ y $F^pZ^i := Z^i \cap F^pC^i$. Observemos que $F^pB^i = d(\{x \in C^{i-1} : dx \in F^pC^i\})$, $F^pZ^i = \{x \in F^pC^i : dx = 0\}$ y claramente $F^pB^i \subseteq F^pZ^i$. Además si denotamos $F^pH^i = F^pZ^i/F^pB^i$ entonces la inclusión canónica de F^pH^i en $F^{p-1}H^i$ está dada por

$$\begin{aligned} \iota : F^pZ^i/F^pB^i &\longrightarrow F^{p-1}Z^i/F^{p-1}B^i \\ x + F^pB^i &\longrightarrow x + F^{p-1}B^i. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Luego si C^* es un complejo filtrado por la filtración $\{F^pC^*\}_p$, ésta induce una filtración de los grupos de cohomología

$$0 = F^kH^i \subseteq \ldots \subseteq F^{p+1}H^i \subseteq F^pH^i \subseteq F^{p-1}H^i \subseteq \ldots \subseteq F^0H^i = H^i \qquad i = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2.3}$$

En consecuencia, en caso que un complejo C^* posea una filtración en subcomplejos, la cohomología del complejo original admite una filtración como en (2.3).

El concepto de filtración de un complejo de cocadenas se relaciona con las sucesiones espectrales mediante el siguiente teorema. Específicamente toda filtración de un complejo de cocadenas C^* define una sucesión espectral. La misma es siempre acotada y converge a la cohomología de C^*. La prueba a continuación sigue las ideas de la dada en el libro de Weibel [71] para sucesiones espectrales de homología junto con elementos tomados de [29].

Teorema 2.1.4. *Dado un complejo de cocadenas (C^*, d) y una filtración del mismo*

$$0 = F^kC^* \subseteq F^{k-1}C^* \subseteq \ldots \subseteq F^2C^* \subseteq F^1C^* \subseteq F^0C^* = C^*, \tag{2.4}$$

existe una sucesión espectral acotada $\{E_r^{p,q}\}_{r\geq 0}^{p,q\in\mathbb{Z}}$ donde:

$$E_0^{p,q} = \frac{F^pC^{p+q}}{F^{p+1}C^{p+q}}, \qquad E_1^{p,q} = H^{p+q}(F^pC^*/F^{p+1}C^*), \qquad E_\infty^{p,q} = \frac{F^pH^{p+q}(C^*)}{F^{p+1}H^{p+q}(C^*)}.$$

Para la demostración del teorema se definen espacios $E_r^{p,q}$ y aplicaciones $d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \longrightarrow E_r^{p+r,q-r+1}$ para todo $r \geq 0$, $p, q \in Z$. Probaremos que estos espacios y las diferenciales forman una sucesión espectral, es decir, E_{r+1} es la cohomología de (E_r, d_r).

Según la última igualdad en el enunciado, tal sucesión espectral converge a la cohomología de C^*. En símbolos: $E_r^{p,q} \Rightarrow H^*(C^*)$. Este hecho será probado mediante la filtración de los grupos de cohomología como fue descripto en (2.3) que induce (2.4). De ahí se obtendrán los isomorfismos para la convergencia de la sucesión espectral.

Prueba del teorema. Para aportar a la legibilidad de la prueba, prescindiremos del superíndice q a lo largo de la misma. Notamos $\eta^p : F^pC \longrightarrow \frac{F^pC}{F^{p+1}C}$ la proyección canónica y consideramos los subespacios

$$A_r^p = \{x \in F^pC : dx \in F^{p+r}C\}, \qquad Z_r^p = \eta^p(A_r^p), \qquad B_r^p = \eta^p(d(A_{r-1}^{p-r+1})).$$

Observemos que que $Z_0^p = \frac{F^pC}{F^{p+1}C}$ y $B_0^p = 0$. Para cada p fijo, tenemos la siguiente cadena de inclusiones de subespacios

$$0 = B_0^p \subseteq B_1^p \subseteq \ldots \subseteq B_r^p \subseteq B_{r+1}^p \subseteq \ldots\ldots \subseteq Z_{r+1}^p \subseteq Z_r^p \subseteq \ldots \subseteq Z_1^p \subseteq Z_0^p,$$

en efecto

- es fácil ver que
$$x \in A_{r+1}^p \Rightarrow dx \in F^{p+r+1}C \Rightarrow dx \in F^{p+r}C \Rightarrow x \in A_r^p.$$
Luego, $Z_{r+1}^p = \eta^p(A_{r+1}^p) \subseteq \eta^p(A_r^p) = Z_r^p$ para todo $r \geq 0$ y por lo tanto vale $\ldots \subseteq Z_{r+1}^p \subseteq Z_r^p \subseteq \ldots \subseteq Z_1^p \subseteq Z_0^p$.

- Dado que $A_{r-1}^{p-r+1} \subseteq A_r^{p-r}$ para todo $r \geq 0$ se tiene $B_r^p = \eta^p(d(A_{r-1}^{p-r+1})) \subset \eta^p(d(A_r^{p-r})) = B_{r+1}^p$. Luego $B_0^p \subseteq B_1^p \subseteq \ldots \subseteq B_r^p \subseteq B_{r+1}^p \subseteq \ldots$,

- Para cada r fijo, $B_r^p \subseteq Z_s^p$ para todo $s \geq 0$ pues

$$
\begin{aligned}
x \in d(A_{r-1}^{p-r+1}) \quad &\Rightarrow \quad x = du \; con \; u \in F^{p-r+1}C \wedge du \in F^pC \\
&\Rightarrow \quad x = du \in F^pC \wedge dx = d^2u = 0 \in F^{p+s}C \;\; \forall s \geq 0 \\
&\Rightarrow \quad x \in A_s^p \;\; \forall s \geq 0.
\end{aligned}
$$

  Entonces $B_r^p = \eta^p(d(A_{r-1}^{p-r+1})) \subseteq \eta^p(A_r^s) = Z_s^p \; \forall s \geq 0$ como queríamos demostrar.

Se define para cada $r, p \geq 0$ los espacios E_r^P como $E_r^p = \frac{Z_r^p}{B_r^p}$. Haciendo uso de los teoremas de isomorfismos de espacios vectoriales (enunciados en, por ejemplo, [37]) se prueba que

$$E_r^p = \frac{Z_r^p}{B_r^p} \cong \frac{A_r^p + F^{p+1}C}{d(A_{r-1}^{p-r+1}) + F^{p+1}C} \cong \frac{A_r^p}{d(A_{r-1}^{p-r+1}) + A_{r-1}^{p+1}}. \tag{2.5}$$

El primer isomorfismo se debe a que $\eta^p(A_r^p) = Z_r^p \cong A_r^p / A_r^p \cap F^{p+1}C \cong A_r^p + F^{p+1}C/F^{p+1}C$ y una igualdad análoga para B_r^p. El segundo de los isomorfismos se obtiene del hecho que para espacios vectoriales U, V, W con $W \subset U$ vale $U + V/W + V \cong U/W + (V \cap U)$. Denotamos con φ al isomorfismo en (2.5) entre E_r^p y $A_r^p / d(A_{r-1}^{p-r+1}) + A_{r-1}^{p+1}$

El isomorfismo en (2.5) permite definir las funciones diferenciales para cada r, p, q. Consideramos la aplicación lineal

$$
\begin{aligned}
\psi : \tfrac{A_r^p}{d(A_{r-1}^{p-r+1}) + A_{r-1}^{p+1}} \quad &\longrightarrow \quad \tfrac{A_r^{p+r}}{d(A_{r-1}^{p+1}) + A_{r-1}^{p+r+1}} \\
u + d(A_{r-1}^{p-r+1}) + A_{r-1}^{p+1} \quad &\mapsto \quad du + d(A_{r-1}^{p+1}) + A_{r-1}^{p+r+1}
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

La misma está bien definida. En efecto, consideremos $u \in A_r^p$, entonces $du \in F^{p+r}C$ y $d(du) = d^2u = 0 \in F^{p+2r}C$. Entonces $du \in A_r^{p+r}$. Además, si $u, v \in A_r^p$ y $u - v \in d(A_{r-1}^{p-r+1}) + A_{r-1}^{p+1} \Rightarrow u - v = dx + y$ con $x \in A_{r-1}^{p-r+1}$, $y \in A_{r-1}^{p+1}$. Resulta $d(u - v) = dy \in d(A_{r-1}^{p+1})$. Es casi trivial que $d_r^{p+r,q-r+1} \circ d_r^{p,q} = 0$ dado que ambas son inducidas por d que es un diferencial de un complejo.

Con estos elementos definimos $d_r^p : E_r^p \longrightarrow_r^{p+r}$ como $d_r^p = \varphi^{-1} \, \psi \, \varphi$.

Hasta el momento hemos construido los espacios $\{E_r^p\}$ y las diferenciales d_r^p, resta probar que forman una sucesión espectral.

La función (2.6) tiene núcleo

$$ker \, d_r^p = \varphi^{-1} \left(\frac{\{u \in A_r^p : dx \in d(A_{r-1}^{p+1}) + A_{r-1}^{p+r+1}\}}{d(A_{r-1}^{p-r+1}) + A_{r-1}^{p+1}} \right) \cong \frac{A_{r+1}^p + A_{r-1}^{p+1}}{d(A_{r-1}^{p-r+1}) + A_{r-1}^{p+1}} \cong \frac{Z_{r+1}^p}{B_r^p} \tag{2.7}$$

Para seguir con la prueba del teorema haremos uso del siguiente lema.

Lema 2.1.5.
$$\frac{Z_r^p}{Z_{r+1}^p} \cong \frac{B_{r+1}^{p+r}}{B_r^{p+r}}.$$

Prueba del lema. Continuamos con la notación anterior. Utilizando teoremas de isomorfismo $Im\,\eta_p \cong A_r^p/ker\,\eta_p$. De la definición $Im\,\eta_p = Z_r^p$. Además el núcleo de η_p es $A_r^p \cap F^{p+1}C = \{x \in F^pC : dx \in F^{p+r}C \wedge x \in F^{p+1}C\} = A_{r-1}^{p+1}$. Luego

$$Z_r^p \cong \frac{A_r^p}{A_{r-1}^{p+1}} \qquad y \qquad \frac{Z_r^p}{Z_{r+1}^p} \cong \frac{A_r^p/A_{r-1}^{p+1}}{A_{r+1}^p/A_r^{p+1}}. \tag{2.8}$$

Sabemos que
$$\left(A_{r-1}^{p+1} + A_{r+1}^p\right)/A_{r-1}^{p+1} \cong A_{r+1}^p/\left(A_{r-1}^{p+1} \cap A_{r+1}^p\right) = A_{r+1}^p/A_r^{p+1}. \tag{2.9}$$

De (2.8) y (2.9)

$$\frac{Z_r^p}{Z_{r+1}^p} \cong \frac{A_r^p/A_{r-1}^{p+1}}{\left(A_{r-1}^{p+1} + A_{r+1}^p\right)/A_{r-1}^{p+1}} \cong \frac{A_r^p}{\left(A_{r-1}^{p+1} + A_{r+1}^p\right)}. \tag{2.10}$$

Recordemos que $B_r^{p+r} = \eta^{p+r}(d(A_{r-1}^{p+1}))$ entonces $B_r^{p+r} \cong d(A_{r-1}^{p+1})/d(A_r^{p+1})$. De manera análoga se obtiene
$$\frac{B_{r+1}^{p+r}}{B_r^{p+r}} \cong \frac{d(A_{r-1}^{p+1})/d(A_r^{p+1})}{d(A_r^p)/d(A_{r+1}^p)} \cong \frac{d(A_r^p)}{d\left(A_{r-1}^{p+1} + A_{r+1}^p\right)}. \tag{2.11}$$

La aplicación $d : A_r^P \longrightarrow F^{p+r}C$ induce un isomorfsimo entre los cocientes (2.10) y (2.11). ∎

Continuamos con la prueba del Teorema 2.1.4. A partir del lema anterior, $d_r^p : E_r^p \longrightarrow E_r^{p+r}$ puede verse como la composición

$$E_r^p = Z_r^p/B_r^p \hookrightarrow Z_r^p/Z_{r+1}^p \xrightarrow{\cong} B_{r+1}^{p+r}/B_r^{p+r} \hookrightarrow Z_r^{p+r}/B_r^{p+r} = E_r^{p+r},$$

de donde se ve que $Im\,d_r^p = B_{r+1}^{p+r}/B_r^{p+r} \Rightarrow Im\,d_r^{p-r} = B_{r+1}^p/B_r^p$. De esto y de (2.7) se obtiene

$$\frac{ker\,d_r^p}{Im\,d_r^{p-r}} \cong \frac{Z_{r+1}^p/B_r^p}{B_{r+1}^p/B_r^p} \cong \frac{Z_{r+1}^p}{B_{r+1}^p} = E_{r+1}^p.$$

Resumiendo, armamos una sucesión espectral $\{E_r^{p,q}\}$ donde

$$E_0^p = \frac{Z_0^p}{B_0^p} = \frac{F^pC}{F^{p+1}C} \qquad y$$

$$E_1^p = \frac{Z_1^p}{B_1^p} \cong \frac{A_1^p + F^{p+1}C}{d(A_0^p) + F^{p+1}C} = \frac{\{x \in F^pC : dx \in F^{p+1}C\}}{d(F^pC) + F^{p+1}C} = H^p(F^pC^*/F^{p+1}C^*).$$

Resta probar que ésta converge a la cohomología del complejo C^*. Introduciendo el índice q en la ecuación (2.5) tenemos

$$E_r^{p,q} = \frac{\{x \in F^pC^{p+q} : dx \in F^{p+r}C^{p+q+1}\}}{d(\{x \in F^{p-r+1}C^{p+q-1} : dx \in F^pC^{p+q}\}) + \{x \in F^{p+1}C^{p+q} : dx \in F^{p+r}C^{p+q+1}\}}. \tag{2.12}$$

La sucesión es acotada, por lo tanto para cada grado n existe un r suficientemente grande para el cual

$$E_\infty^{p,q} = \frac{\{x \in F^pC^{p+q} : dx = 0\}}{d(\{x \in C^{p+q-1} : dx \in F^pC^{p+q}\}) + \{x \in F^{p+1}C^{p+q} : dx = 0\}} = \frac{F^{p+q}Z^{p+q}}{F^pB^{p+q} + F^{p+1}Z^{p+q}}$$

para todo p, q tal que $p + q = n$.

El homomorfismo $h : F^pH^{p+q} \longrightarrow E_\infty^{p,q}$ definido como $x + F^pB^{p+q} \mapsto x + F^pB^{p+q} + F^{p+1}Z^{p+q}$ induce un isomorfismo $F^pH^{p+q}/F^{p+1}H^{p+q} \cong E_\infty^{p,q}$ quedando probado el teorema. ■

A cada complejo de cocadenas filtrado le corresponde una sucesión espectral de cohomología. Veamos que esta correspondencia se mantiene salvo isomorfismos.

Supongamos que (C^*, d) y $(\tilde{C}^*, \tilde{d})$ son complejos de cocadenas con respectivas filtraciones en subcomplejos F^pC^* y $F^p\tilde{C}^*$, $p = 0, \ldots, k$. Diremos que un morfismo de cocadenas $f : C^* \longrightarrow \tilde{C}^*$ es compatible con las filtraciones si $f(F^pC^i) \subset F^p\tilde{C}^*$ para todo $p = 1, \ldots, k$. Por otro lado, tenemos la noción de morfismo de sucesiones espectrales.

Definición 2.1.6. *Un homomorfismo $f : E \longrightarrow E'$ de sucesiones espectrales es una familia de transformaciones lineales $f_r^{p,q} : E_r^{p,q} \longrightarrow {E'}_r^{p,q}$ tal que $d_r^{p,q}f_r^{p-r,q+r-1} = f_r^{p,q}{d'}_r^{p,q}$ para todo $r \geq 0$, $p, q \in \mathbb{Z}$ y de manera que $f_{r+1}^{p,q}$ es el mapa inducido por $f_r^{p,q}$.*

La primera condición de la definición anterior indica que, para cada r fijo, existe un homomorfismo de cadenas entre el complejo de la línea de pendiente $(r-1)/r$ de E y el de E'.

Decimos que dos sucesiones espectrales E y E' son equivalentes si existe un homomorfismo $f : E \longrightarrow E'$ y un r tal que $f_s^{p,q}$ es un isomorfismo para todo $s \geq r$, $p, q \in \mathbb{Z}$. En el caso que dos sucesiones espectrales acotadas sean equivalentes, se tiene $E_\infty^{p,q} \cong {E'}_\infty^{p,q}$ para todo $p, q \in \mathbb{Z}$.

Haciendo uso del lema de los cinco se prueba que si $f : E \longrightarrow E'$ es tal que para un r fijo, $f_r^{p,q}$ es un isomorfismo para todo p, q, entonces las sucesiones espectrales son equivalentes. En particular si $E_r^{p,q} \Rightarrow H^{p+q}$ y ${E'}_r^{p,q} \Rightarrow {H'}^{p+q}$ entonces $H^{p+q} \cong {H'}^{p+q}$.

Sea $f : C \longrightarrow \tilde{C}$ un morfismo de complejos de cocadenas. El mismo induce homomorfismos $f^i : H^i(C) \longrightarrow H^i(\tilde{C})$ entre los grupos de cohomología. Supongamos que los complejos C y $\tilde{C}$ poseen filtraciones F^pC y $G^p\tilde{C}$, $p = 0, \ldots, k$ respectivamente. Se dice que f es compatible con las mismas cuando $f(F^pC) \subseteq G^p\tilde{C}$ para todo $p = 0, 1, \ldots, k$. En el caso que exista un isomorfismo $f : C \longrightarrow \tilde{C}$ compatible con las filtraciones, diremos que éstas son equivalentes.

Un homomorfismo $f : C \longrightarrow \tilde{C}$ compatible con las filtraciones F^pC y $G^p\tilde{C}$ induce un homomorfismo entre las sucesiones espectrales por ellas definidas $f_r^{p,q} : E_r^{p,q}(C) \longrightarrow E_r^{p,q}(\tilde{C})$ y una aplicación

$f_\infty : E_\infty^{p,q}(C) \longrightarrow E_\infty^{p,q}(\tilde{C})$. En particular, si f es un isomorfismo también lo son f^i, $f_r^{p,q}$ y f_∞. Por lo tanto, dos complejos de cadena con filtraciones equivalentes inducen sucesiones espectrales equivalentes.

2.2. Sucesiones espectrales en álgebras de Lie nilpotentes

En un álgebra de Lie $\mathfrak{n}$ nilpotente es posible definir una sucesión creciente de subespacios de $\mathfrak{n}^*$, el dual de $\mathfrak{n}$. Precisamente los anuladores de la serie central descendente. Esta sucesión se preserva por la diferencial del complejo de Chevalley-Eilenberg del álgebra de Lie y por lo tanto define una filtración del mismo. Aplicamos los resultados de la Sección 2.1 a dicho complejo filtrado y obtenemos una sucesión espectral natural asociada a $\mathfrak{n}$. En virtud del Teorema 2.1.4 dicha sucesión espectral converge y lo hace a la cohomología del álgebra de Lie.

A lo largo de la sección trabajaremos con esta sucesión espectral. Desarrollaremos con detalle ejemplos en dimensiones tres y cuatro. Estudiaremos propiedades de esta cohomología que harán más sencillo su cálculo.

De aquí en más $\mathfrak{n}$ denotará un álgebra de Lie nilpotente. Consideraremos los subespacios del dual de $\mathfrak{n}$ ya definidos en (1.2)

$$V_0 = 0, \qquad V_i = \{\alpha \in \mathfrak{n}^* : d\alpha \in \Lambda^2 V_{i-1}\} \qquad i \geq 1.$$

Por el Corolario 1.2.7, si $\mathfrak{n}$ es k-pasos nilpotente se verifica

$$0 = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \ldots \subsetneq V_{k-1} \subsetneq V_k = \mathfrak{n}^*. \tag{2.13}$$

Además, inducen inclusiones en el producto exterior: si $m = dim\, \mathfrak{n}$, para cada $q = 1, \ldots, m$ se tiene

$$0 = \Lambda^q V_0 \subsetneq \Lambda^q V_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \Lambda^q V_{k-1} \subsetneq \Lambda^q V_k = \Lambda^q \mathfrak{n}^* \tag{2.14}$$

Recordar que $\Lambda^0 V_i = \mathbb{R}$ para $i = 1, \ldots, m$ y $\Lambda^0 V_0 = 0$.

Denotamos C^* al complejo de Chevalley-Eilenberg definido en (1.3). Para cada i fijo, $\{\Lambda^q V_i\}_{q \geq 0}$ constituye un subcomplejo de C^* como se prueba en la siguiente proposición.

Proposición 2.2.1. *Con las definiciones anteriores, se verifica que $d(\Lambda^q V_i) \subset \Lambda^{q+1} V_i$ para todo $0 \leq q \leq m$, $i \geq 0$.*

Prueba. Considere $\{e^1, \ldots, e^{s_1}, e^{s_1+1}, \ldots, e^{s_{k-1}}, \ldots, e^m\}$ una base de $\mathfrak{n}^*$ de manera que $\{e^1, \ldots, e^{s_i}\}$ es base de V_i. Luego $\Lambda^q(V_i) = span\{e^{j_1} \wedge e^{j_2} \wedge \ldots \wedge e^{j_q} : \; j_1 < j_2 < \ldots < j_q, \;\; j_r \in \{1, \ldots, s_i\}, \forall r = 1, \ldots, q\}$.

Utilizando la fórmula de la diferencial dada en (1.4) se tiene

$$d(e^{j_1} \wedge \ldots \wedge e^{j_q})(e_{r_1}, e_{r_2}, \ldots, e_{r_{q+1}}) = \sum_{u<v} (-1)^{u+v} e^{j_1} \wedge \ldots \wedge e^{j_q}([e_{r_u}, e_{r_v}], e_{r_1}, \ldots, \check{e_{r_u}}, \ldots, \check{e_{r_v}}, \ldots, e_{r_{q+1}}).$$

Si algún $r_u \notin \{1, \ldots, s_i\}(r_u > s_i) \Rightarrow e_{r_u} \in \mathfrak{n}^i$ y por lo tanto $d(e^{j_1} \wedge \ldots \wedge e^{j_q})(e_{r_1}, e_{r_2}, \ldots, e_{r_{q+1}}) = 0$. Luego $d(e^{j_1} \wedge \ldots \wedge e^{j_q}) \in \Lambda^{q+1} V_i$ quedando demostrada la proposición. ■

Luego, para cada $p = 0, \ldots, k$

$$F^p C^* : 0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow V_{k-p} \longrightarrow \Lambda^2 V_{k-p} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Lambda^m V_{k-p} \longrightarrow 0 \tag{2.15}$$

es un subcomplejo de C^* y estos subcomplejos se ordenan de manera decreciente: $0 \equiv F^k C^* \subseteq F^{k-1} C^* \subseteq \ldots \subseteq F^{p+1} C^* \subseteq F^p C^* \subseteq \ldots \subseteq F^1 C^* \subseteq F^0 C^* = C^*$, siendo k el índice de nilpotencia.

Llamamos *filtración canónica* o *filtración natural* de un álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{n}$ a la filtración (2.15) del complejo de Chevalley-Eilenberg. Como resultado del Teorema 2.1.4, esta filtración natural da lugar a una sucesión espectral que tiene como término inicial

$$E_0^{p,q} = \frac{F^p C^{p+q}}{F^{p+1} C^{p+q}} = \frac{\Lambda^{p+q} V_{k-p}}{\Lambda^{p+q} V_{k-(p+1)}}. \tag{2.16}$$

La ecuación (2.12) se traduce en

$$E_r^{p,q} \cong \frac{\{x \in \Lambda^{p+q} V_{k-p} : dx \in \Lambda^{p+q+1} V_{k-p-r}\}}{d(\{x \in \Lambda^{p+q-1} V_{k-p+r-1} : dx \in \Lambda^{p+q} V_{k-p}\}) + \{x \in \Lambda^{p+q} V_{k-p-1} : dx \in \Lambda^{p+q+1} V_{k-p-r}\}}. \tag{2.17}$$

El término límite es

$$E_\infty^{p,q} \cong \frac{\{x \in \Lambda^{p+q} V_{k-p} : dx = 0\}}{d(\{x \in \Lambda^{p+q-1} \mathfrak{n}^* : dx \in \Lambda^{p+q} V_{k-p}\}) + \{x \in \Lambda^{p+q} V_{k-p-1} : dx = 0\}}. \tag{2.18}$$

Notemos que un isomorfismo entre dos álgebras de Lie nilpotentes preserva las filtraciones canónicas e induce isomorfismos entre las sucesiones espectrales. Esto implica que hay una sucesión espectral asociada a cada clase de isomorfismo de álgebras de Lie nilpotentes.

Propiedades de las sucesiones espectrales construidas a partir de filtraciones de un complejo aplicadas a esta filtración natural, permiten obtener relaciones entre los términos de dicha sucesión espectral.

Proposición 2.2.2. *Sea $\mathfrak{n}$ un álgebra de Lie nilpotente y considere la filtración canónica de $\mathfrak{n}$. Entonces la sucesión espectral $E_r^{p,q}$ determinada por (2.16) verifica:*

1. *$E_0^{p,q} = 0$ si $p < 0$ o $p \geq k$,*

2. *para cada $n \in \{0, \ldots, m\}$, $m = \dim \mathfrak{n}$ y cada $r \geq 0$ los elementos de grado total n son $E_r^{0,n}$, $E_r^{1,n-1}, \ldots, E_r^{k-1,n-k+1}$ donde k es el índice de nilpotencia de $\mathfrak{n}^*$,*

3. *en el caso particular $r = 0$, los elementos de grado n son precisamente:*

$$E_0^{0,n} = \frac{\Lambda^n \mathfrak{n}^*}{\Lambda^n V_{k-1}}, \quad E_0^{1,n-1} = \frac{\Lambda^n V_{k-1}}{\Lambda^n V_{k-2}}, \quad \ldots\ldots \quad E_0^{k-1,n-k+1} = \frac{\Lambda^n V_1}{\Lambda^n V_0} = \Lambda^n V_1,$$

4. *en el límite, el único término no nulo de grado 1 es $E_\infty^{k-1,2-k}$ que coincide con $V_1 = Z^1$. Para grado total 0, el único término no nulo es $E_\infty^{k-1,1-k} = H^0(\mathfrak{n}) = \mathbb{R}$,*

5. *los términos E_1 de la sucesión espectral se corresponde con la cohomología de los complejos*

$$0 \longrightarrow \frac{V_{k-p}}{V_{k-(p+1)}} \longrightarrow \frac{\Lambda^2 V_{k-p}}{\Lambda^2 V_{k-(p+1)}} \longrightarrow \ldots \longrightarrow \frac{\Lambda^m V_{k-p}}{\Lambda^m V_{k-(p+1)}} \longrightarrow 0,$$

6. *el valor r_0 para el cual la sucesión se estabiliza ($E_r = E_\infty$, $\forall r \geq r_0$) depende del índice de nilpotencia k de $\mathfrak{n}$.*

Prueba. El primer punto es consecuencia de $F^pC^* = 0$ si $p < 0$ y $F^pC^* = 0$ si $p \geq k$, ver (2.15). El segundo y tercer punto se desprenden de lo anterior y (2.16).

El punto 4. se debe a que $E_r \Rightarrow H^*(\mathfrak{n})$. Por lo tanto $E_\infty^{p,q} \cong \frac{F^P H^{p+q}}{F^{p+1}H^{p+q}}$, en particular

$$E_\infty^{k-1,2-k} \cong \frac{F^{k-1}H^1}{F^k H^1} \cong F^{k-1}H^1 = \frac{F^{k-1}Z^1}{F^{k-1}B^1} = \frac{Z^1 \cap V_1}{B^1 \cap V_1}.$$

Recordemos que, por definición $B^1 = 0$ y $V_1 = Z_1$, entonces $E_\infty^{k-1,2-k} = Z^1$. Además por (2.17), $E_r^{p,-p} = 0$ para $p = 0, 1, .., k-2$ y $E_r^{k-1,1-k} = \mathbb{R}$.

Uno de los resultados del Teorema 2.1.4 es que el término E_1 es la cohomología de los complejos cociente del enunciado de donde se deduce el punto 5.

Sobre el valor r_0 que da la convergencia de la sucesión espectral, notemos que la filtración es finita y vale la expresión (2.17). Entonces, para cada $p = 0, \ldots, k-1$, si $k-p-r \leq 0$ y $k-p+r-1 \geq k$ ($r \geq k-p$, $r \geq p+1$) se tiene en el numerador $\Lambda^{p+q+1}V_{k-p-r} = V_0 = \{0\}$ y en el denominador $\Lambda^{p+q-1}V_{k-p+r-1} = \mathfrak{n}^*$. Comparando con la ecuación (2.18), si $r \geq r_0 := \text{máx}\{k-p, p+1\}$ resulta $E_r = E_\infty$. ■

La sucesión espectral construida a partir de una filtración acotada de un complejo de cocadenas como en el Teorema 2.1.4 converge a la cohomología del complejo original. Este hecho para la filtración canónica de un álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{n}$ significa que la sucesión espectral converge a la cohomología del álgebra de Lie dada. Explícitamente, para cada i se tiene la sucesión de subespacios de $H^i(\mathfrak{n})$

$$0 = F^k H^i(\mathfrak{n}) \subseteq \ldots \subseteq F^{p+1}H^i(\mathfrak{n}) \subseteq F^p H^i(\mathfrak{n}) \subseteq F^{p-1}H^i(\mathfrak{n}) \subseteq \ldots \subseteq F^0 H^i(\mathfrak{n}) = H^i(\mathfrak{n}),$$

donde $F^pB^i := d(\Lambda^{i-1}\mathfrak{n}^*) \cap \Lambda^i V_{k-p}$, $F^pZ^i := \{x \in \Lambda^i\mathfrak{n}^* : dx = 0\} \cap \Lambda^i V_{k-p}$ y $F^pH^i = F^pZ^i/F^pB^i$. También $E_\infty^{p,q} \cong F^pH^{p+q}(\mathfrak{n})/F^{p+1}H^{p+q+1}(\mathfrak{n})$. Luego

$$H^i(\mathfrak{n}) \cong \bigoplus_{p+q=i} E_\infty^{p,q}. \tag{2.19}$$

Por lo tanto el cálculo del límite de la sucesión espectral inducida por la filtración (2.15) permite escribir a la cohomología usual de $\mathfrak{n}$ como suma directa de subespacios. Vale aclarar que estos subespacios son, en general no nulos y diferentes del espacio total. Esta propiedad motiva la siguiente definición.

Definición 2.2.3. *Los* grupos de cohomología intermedia de grado i *de un álgebra Lie nilpotente* $\mathfrak{n}$ *son los espacios vectoriales* $E_\infty^{p,q}(\mathfrak{n})$ *donde* $p+q=i$.

Para ilustrar la manera de calcular esta cohomología y para realizar comparaciones con la cohomología usual de álgebras de Lie, presentamos los cálculos en ejemplos sencillos como las álgebras de Lie abelianas y las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión tres y cuatro.

Cohomología intermedia de álgebras abelianas: Si $\mathfrak{n}$ es abeliana de dimensión m entonces k es uno y por lo tanto $V_1=\mathfrak{n}^*$. En la filtración del complejo resulta F^1C^* el complejo nulo y

$$F^0C^*: 0\longrightarrow \mathbb{R}\longrightarrow \mathfrak{n}^*\longrightarrow \Lambda^2\mathfrak{n}^*\longrightarrow\cdots\longrightarrow\Lambda^m\mathfrak{n}^*\longrightarrow 0.$$

Para obtener los términos iniciales de la sucesión espectral se reemplaza la filtración en la ecuación (2.16), obteniéndose

$$E_0^{p,q}=\begin{cases}\Lambda^{p+q}\mathfrak{n}^* & si\ p=0\\ \{0\} & si\ p\neq 0\end{cases}.$$

Luego, la sucesión espectral sólo tiene elementos no nulos en la columna $p=0$, los cuales son $E_0^{0,q}=\Lambda^q\mathfrak{n}^*$ si $q=1,\ldots,m$. Es decir, en $p=0$ se tienen los espacios del complejo de Chevalley-Eilenberg. En consecuencia las diferenciales $d_0^{p,q}: E_0^{p,q}\longrightarrow E_0^{p,q+1}$ son nulas, salvo en $p=0$ donde coinciden con la diferencial del álgebra de Lie. El término E_1 de la sucesión espectral es la cohomología de E_0, por lo tanto $E_1^{p,q}=\{0\}$ si $p\neq 0$. Para $q=1,\ldots,m$, hay sólo un término no nulo de grado q y es $E_1^{0,q}=H^q(\mathfrak{n})$. La sucesión espectral tiene como límite el valor en E_1 ya que $d_r^{p,q}$ tienen como dominio o codominio al espacio $\{0\}$ si $r\geq 1$. Por ello, $E_\infty=E_1$.

Es decir

$$H^p(\mathfrak{n},\mathbb{R})=E_\infty^{0,p}(\mathfrak{n})\qquad \forall p=0,\ldots,\dim\mathfrak{n}.$$

Cohomología intermedia del álgebra de Heisenberg $\mathfrak{h}_1$: Consideramos la base $\{e_1,e_2,e_3\}$ con corchetes no nulos $[e_1,e_2]=-e_3$ por lo tanto es dos pasos nilpotente. En la base dual $\{e^1,e^2,e^3\}$ de $\mathfrak{h}_1^*$, la diferencial vale $d(e^1)=d(e^2)=0$ y $d(e^3)=e^1\wedge e^2$. Resultan $V_0=\{0\}$, $V_1=\langle\{e^1,e^2\}\rangle$ y $V_2=\mathfrak{h}_1^*$. En la filtración resulta F^2C^* el complejo nulo, F^0C^* el complejo de Chevalley-Eilenberg $0\longrightarrow\mathbb{R}\longrightarrow\mathfrak{h}_1^*\longrightarrow\Lambda^2\mathfrak{h}_1^*\longrightarrow\Lambda^3\mathfrak{h}_1^*\longrightarrow 0$ y F^1C^* el subcomplejo formado por

$$F^1C^*:\qquad 0\longrightarrow\mathbb{R}\longrightarrow V_1\longrightarrow\Lambda^2V_1\longrightarrow 0.$$

Nuevamente, utilizando la fórmula (2.16) para el término inicial resulta que $E_0^{p,q}=\{0\}$ salvo para $p=0,1$ para los cuales

$$E_0^{0,0}=0,\ E_0^{0,q}=\frac{\Lambda^q\mathfrak{h}_1^*}{\Lambda^qV_1}\ \ q=1,2,3,\qquad E_0^{1,-1}=\mathbb{R},\ E_0^{1,q}=\Lambda^{q+1}V_1\ \ q=0,1.$$

Las diferenciales de la sucesión espectral en el paso inicial son verticales, por lo que el término E_1 será, en $p=1$ la cohomología del complejo F^1C^* y en $p=0$ la cohomología del complejo cociente. Es posible utilizar directamente las fórmulas (2.17) para obtener E_1, E_2, etc. De esta forma es como se han realizado los cálculos siguientes.

En el caso de $\mathfrak{h}_1$ resultan:

$$E_1^{0,0}=0,\ E_1^{0,1}=\frac{\mathfrak{h}_1^*}{V_1}\qquad E_1^{0,2}=\frac{\{x\in\Lambda^2\mathfrak{h}_1^*: dx\in\Lambda^3V_1=\{0\}\}}{d(\{x\in\mathfrak{h}_1^*: dx\in\Lambda^2\mathfrak{h}_1^*\})+\{x\in\Lambda^2V_1: dx\in\Lambda^3V_1\}}=\frac{\Lambda^2\mathfrak{h}_1^*}{\Lambda^2V_1}$$

$$E_1^{0,3}=\Lambda^3\mathfrak{h}_1^*\qquad E_1^{1,-1}=\mathbb{R},\ E_1^{1,0}=V_1\qquad E_1^{1,1}=\Lambda^2V_1.$$

Es decir, E_1 coincide con E_0.

El término E_2:

$$E_2^{0,0}=0,\ E_2^{0,1}=\frac{\{x\in\mathfrak{h}_1^*: dx=0\}}{d(\mathfrak{h}_1^*)+\{x\in V_1: dx=0\}}=\frac{V_1}{V_1}\cong\{0\}$$

$$E_2^{0,2}=\frac{\{x\in\Lambda^2\mathfrak{h}_1^*: dx=0\}}{d(\mathfrak{h}_1^*)+\{x\in\Lambda^2V_1: dx=0\}}=\frac{\Lambda^2\mathfrak{h}_1^*}{\Lambda^2V_1}\qquad E_2^{0,3}=\Lambda^3\mathfrak{h}_1^*\qquad E_1^{1,-1}=\mathbb{R},\ E_2^{1,0}=V_1$$

$$E_2^{1,1}=\frac{\{x\in\Lambda^2V_1: dx=0\}}{d(\{x\in\mathfrak{h}_1^*: dx\in\Lambda^2V_1\})}\cong\{0\}.$$

E_2 es el término límite de la sucesión espectral y por lo tanto tenemos

$$H^0(\mathfrak{h}_1)=\mathbb{R},\ H^1(\mathfrak{h}_1)\cong E_2^{0,1}\oplus E_2^{1,0}\cong\{0\}\oplus V_1,\ H^2(\mathfrak{h}_1)\cong E_2^{0,2}\oplus E_2^{1,1}\cong\frac{\Lambda^2\mathfrak{h}_1^*}{\Lambda^2V_1}\oplus\{0\},\ H^3(\mathfrak{h}_1)=\Lambda^3\mathfrak{h}_1^*.$$

Observación 2.2.4. *Observe que en los dos ejemplos anteriores los grupos de cohomología intermedia son cero o bien coinciden con el grupo de cohomología usual de $\mathfrak{n}$. Es decir, en estos dos casos, la cohomología intermedia no refina la usual. Veremos que este no siempre es el caso con los dos ejemplos siguientes.*

Cohomología intermedia de las álgebras nilpotentes de dimensión 4: Existen dos álgebras de Lie nilpotentes de dimensión cuatro, éstas son:

1. $\mathfrak{n}=\langle\{e_1,e_2,e_3,e_4\}\rangle$ con único corchete no nulo $[e_2,e_3]=-e_4$. Esta álgebra es isomorfa a $\mathbb{R}\oplus\mathfrak{h}_1$, también es dos pasos nilpotente y si tomamos la base dual en $\mathfrak{n}^*$ la diferencial resulta $d(e^1)=d(e^2)=d(e^3)=0$, $d(e^4)=e^2\wedge e^3$. La sucesión de subespacios de $\mathfrak{n}^*$ es

$$V_0=\{0\},\qquad V_1=\left\langle\{e^1,e^2,e^3\}\right\rangle,\qquad V_2=\left\langle\{e^1,e^2,e^3,e^4\}\right\rangle.$$

F^2C^* es el complejo nulo y F^0C^* es $0\longrightarrow\mathbb{R}\longrightarrow\mathfrak{n}^*\longrightarrow\Lambda^2\mathfrak{n}^*\longrightarrow\Lambda^3\mathfrak{n}^*\longrightarrow\Lambda^4\mathfrak{n}^*\longrightarrow 0$. Como en todo caso dos pasos nilpotente hay sólo un subcomplejo intermedio que es $F^1C^*:\ 0\longrightarrow\mathbb{R}\longrightarrow V_1\longrightarrow\Lambda^2V_1\longrightarrow\Lambda^3V_1\longrightarrow 0$. La filtración es $C^*=F^0C^*\supset F^1C^*\supset F^2C^*=0$. En la columna $p=0$ del término E_0 se tiene el complejo cociente F^0C^*/F^1C^* y en $p=1$ a F^1C^*.

Calculando el término inicial se obtiene

$$E_0^{0,0} = 0 \qquad E_0^{0,1} = \frac{\mathfrak{n}^*}{V_1} \qquad E_0^{0,2} = \frac{\Lambda^2\mathfrak{n}^*}{\Lambda^2 V_1} \qquad E_0^{0,3} = \frac{\Lambda^3\mathfrak{n}^*}{\Lambda^3 V_1} \qquad E_0^{0,4} = \Lambda^4\mathfrak{n}^*$$

$$E_0^{1,-1} = \mathbb{R} \qquad E_0^{1,0} = V_1 \qquad E_0^{1,1} = \Lambda^2 V_1 \qquad E_0^{1,2} = \Lambda^3 V_1.$$

El término E_1 es

$$E_1^{0,0} = 0 \qquad E_1^{0,1} = \frac{\{x \in \mathfrak{n}^* : dx \in \Lambda^2 V_1\}}{d(\mathfrak{n}^*) + \{x \in V_1 : dx = 0\}} = \frac{\mathfrak{n}^*}{V_1}$$

$$E_1^{0,2} = \frac{\{x \in \Lambda^2\mathfrak{n}^* : dx \in \Lambda^3 V_1\}}{d(\mathfrak{n}^*) + \{x \in \Lambda^2 V_1 : dx \in \Lambda^3 V_1\}} = \frac{\Lambda^2\mathfrak{n}^*}{\Lambda^2 V_1} \qquad E_1^{0,3} = \frac{\Lambda^3\mathfrak{n}^*}{\Lambda^3 V_1} \qquad E_1^{0,4} = \Lambda^4\mathfrak{n}^*$$

$$E_1^{1,-1} = \mathbb{R}, \qquad E_1^{1,0} = \{x \in V_1 : dx = 0\} = V_1,$$

$$E_1^{1,1} = \frac{\{x \in \Lambda^2 V_1 : dx = 0\}}{d(V_1)} \cong \Lambda^2 V_1, \qquad E_1^{1,2} = \Lambda^3 V_1.$$

Y por último el término límite $E_\infty = E_2$

$$E_2^{0,1} = \frac{\{x \in \mathfrak{n}^* : dx = 0\}}{d(\mathfrak{n}^*) + \{x \in V_1 : dx = 0\}} \cong \{0\}$$

$$E_2^{0,2} = \frac{\{x \in \Lambda^2\mathfrak{n}^* : dx = 0\}}{d(\mathfrak{n}^*) + \Lambda^2 V_1} = \frac{\Lambda^2 V_1 + \big\langle\{e^2 \wedge e^4, e^3 \wedge e^4\}\big\rangle}{\Lambda^2 V_1}$$

$$E_2^{0,0} = 0 \qquad E_2^{0,3} = \frac{\{x \in \Lambda^3\mathfrak{n}^* : dx = 0\}}{d(\Lambda^2\mathfrak{n}^*) + \Lambda^3 V_1} = \frac{\Lambda^3\mathfrak{n}^*}{\Lambda^3 V_1} \qquad E_2^{0,4} = \Lambda^4\mathfrak{n}^*$$

$$E_2^{1,-1} = \mathbb{R} \;\; E_2^{1,0} = \frac{\{x \in V_1 : dx = 0\}}{d(\{x \in \mathfrak{n}^* : dx \in V_1\})} \cong V_1$$

$$E_2^{1,1} = \frac{\{x \in \Lambda^2 V_1 : dx = 0\}}{d(\{x \in \mathfrak{n}^* : dx \in \Lambda^2 V_1\})} = \frac{\Lambda^2 V_1}{\langle\{d(e^4) = e^2 \wedge e^3\}\rangle}$$

$$E_2^{1,2} = \frac{\{x \in \Lambda^3 V_1 : dx = 0\}}{d(\{x \in \Lambda^2\mathfrak{n}^* : dx \in \Lambda^3 V_1\})} = \frac{\Lambda^3 V_1}{\Lambda^3 V_1} \cong \{0\}.$$

Muchas de las igualdades anteriores surgen del hecho que la diferencial restringida al complejo $F^{k-1}C^*$ es nula, en este caso a F^1C^*. La homología usual del $\mathfrak{n}^*$ queda descompuesta de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}
H^0(\mathfrak{n}) &= \mathbb{R} \\
H^1(\mathfrak{n}) &\cong E_2^{0,1} \oplus E_2^{1,0} \cong \{0\} \oplus V_1 \\
H^2(\mathfrak{n}) &\cong E_2^{0,2} \oplus E_2^{1,1} \cong \tfrac{\Lambda^2 V_1 + \{\langle\{e^2 \wedge e^4, e^3 \wedge e^4\}\rangle}{\Lambda^2 V_1} \oplus \tfrac{\Lambda^2 V_1}{\langle\{e^2 \wedge e^3\}\rangle} \\
H^3(\mathfrak{n}) &= \Lambda^3\mathfrak{n}^* \\
H^4(\mathfrak{n}) &= \Lambda^4\mathfrak{n}^*.
\end{aligned}$$

Por el Teorema de Nomizu los números de Betti de una nilvariedad $\Gamma\backslash N$ donde $\mathfrak{n}$ es el álgebra de Lie N son

$$\beta_0 = 1, \quad \beta_1 = 3, \quad \beta_2 = 2+2 = 4, \quad \beta_3 = 3, \quad \beta_4 = 1.$$

2. $\mathfrak{n} = \langle\{e_1, e_2, e_3, e_4\}\rangle$ donde los corchetes no nulos son $[e_1, e_2] = e_3$ y $[e_1, e_3] = e_4$. Es tres pasos nilpotente y la diferencial en la base dual es $d(e^1) = d(e^2) = 0$, $d(e^3) = -e^1 \wedge e^2$ y $d(e^4) = -e^1 \wedge e^3$. En este caso se tiene

$$V_0 = \{0\}, \qquad V_1 = \left\langle\{e^1, e^2\}\right\rangle, \qquad V_2 = \left\langle\{e^1, e^2, e^3\}\right\rangle, \qquad V_3 = \mathfrak{n}_1^*.$$

Una vez más F^3C^* es el complejo nulo y F^0C^* es todo el complejo $0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{n}^* \longrightarrow \Lambda^2\mathfrak{n}^* \longrightarrow \Lambda^3\mathfrak{n}^* \longrightarrow \Lambda^4\mathfrak{n}^* \longrightarrow 0$. Los subcomplejos intermedios son

$$\begin{aligned} F^1C^* :\quad & 0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow V_2 \longrightarrow \Lambda^2 V_2 \longrightarrow \Lambda^3 V_2 \longrightarrow 0 \\ F^2C^* :\quad & 0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow V_1 \longrightarrow \Lambda^2 V_1 \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Se observa claramente la filtración $C^* = F^0C^* \supset F^1C^* \supset F^2C^* \supset F^3C^* = 0$. Dado que el grado de nilpotencia es tres, se tienen tres columnas no nulas en el término inicial de la sucesión espectral: aquellas correspondientes a $p = 0, 1, 2$. En este caso el término inicial es

$$E_0^{0,0} = 0 \qquad E_0^{0,1} = \frac{\mathfrak{n}^*}{V_2} \qquad E_0^{0,2} = \frac{\Lambda^2\mathfrak{n}^*}{\Lambda^2 V_2} \qquad E_0^{0,3} = \frac{\Lambda^3\mathfrak{n}^*}{\Lambda^3 V_2} \qquad E_0^{0,4} = \frac{\Lambda^4\mathfrak{n}^*}{\Lambda^4 V_2}$$

$$E_0^{1,-1} = 0 \qquad E_0^{1,0} = \frac{V_2}{V_1} \qquad E_0^{1,1} = \frac{\Lambda^2 V_2}{\Lambda^2 V_1} \qquad E_0^{1,2} = \Lambda^3 V_2$$

$$E_0^{2,-2} = \mathbb{R} \qquad E_0^{2,-1} = V_1 \qquad E_0^{2,0} = \Lambda^2 V_1.$$

La cohomología de E_0 es

$$E_1^{0,1} = \frac{\{x \in \mathfrak{n}^* : dx \in \Lambda^2 V_2\}}{\{x \in V_2 : dx \in \Lambda^2 V_2\}} = \frac{\mathfrak{n}^*}{V_2}$$

$$E_1^{0,3} = \frac{\{x \in \Lambda^3\mathfrak{n}^* : dx = 0\}}{d(\Lambda^2\mathfrak{n}^*) + \{\Lambda^3 V_2 : dx = 0\}} = \frac{\Lambda^3\mathfrak{n}^*}{\langle\{e^1 \wedge e^2 \wedge e^4\}\rangle + \Lambda^3 V_2}$$

$$E_1^{0,2} = \frac{\{x \in \Lambda^2\mathfrak{n}^* : dx \in \Lambda^3 V_2\}}{d(\mathfrak{n}^*) + \{x \in \Lambda^2 V_2 : dx \in \Lambda^3 V_2\}} = \frac{\left\langle\{e^1 \wedge e^4, e^2 \wedge e^4\}\right\rangle + \Lambda^2 V_2}{\Lambda^2 V_2} \qquad E_1^{0,4} = \Lambda^4\mathfrak{n}^*.$$

$$E_1^{1,0} = \frac{V_2}{V_1} \qquad E_1^{1,1} = \frac{\{x \in \Lambda^2 V_2 : dx = 0\}}{d(V_2) + \{x \in \Lambda^2 V_1 : dx = 0\}} = \frac{\Lambda^2 V_2}{\Lambda^2 V_1}$$

$$E_1^{1,2} = \frac{\{x \in \Lambda^3 V_2 : dx = 0\}}{d(\Lambda^2 V_2)} = \Lambda^3 V_2.$$

$$E_1^{0,0} = 0 \qquad E_1^{1,-1} = 0 \qquad E_1^{2,-2} = \mathbb{R} \qquad E_1^{2,-1} = V_1 \qquad E_1^{2,0} = \Lambda^2 V_1.$$

Observando la ecuación (2.18), se ve que los términos $E_1^{0,3}$, $E_1^{0,4}$, $E_1^{0,0}$, $E_1^{1,-1}$ y $E_1^{2,-2}$ son los valores límites. A pesar que en el numerador de $E_1^{1,1}$ contiene los elementos cerrados, no es posible asegurar que sea el valor límite debido a que en el denominador se tiene $d(V_2)$ en vez de $d(\mathfrak{n}^*)$.

Los restantes términos de E_2 son:

$$E_2^{0,1} = \frac{\{x \in \mathfrak{n}^* : dx \in \Lambda^2 V_1\}}{\{x \in V_2 : dx \in \Lambda^2 V_1\}} = \frac{V_2}{V_2} \cong \{0\}, \qquad E_2^{1,0} = \frac{\{x \in V_2 : dx = 0\}}{\{x \in V_1 : dx = 0\}} = \frac{V_1}{V_1} \cong \{0\},$$

$$E_2^{0,2} = \frac{\{x \in \Lambda^2 \mathfrak{n}^* : dx = 0\}}{d(\mathfrak{n}^*) + \{x \in \Lambda^2 V_2 : dx = 0\}} = \frac{\Lambda^2 V_2 + \big\langle \{e^1 \wedge e^4\} \big\rangle}{\Lambda^2 V_2},$$

$$E_2^{1,1} = \frac{x \in \Lambda^2 V_2 : dx = 0\}}{d(\{x \in \mathfrak{n}^* : dx \in \Lambda^2 V_2\}) + \Lambda^2 V_1} = \frac{\Lambda^2 V_2}{\langle \{e^1 \wedge e^3\} \rangle + \Lambda^2 V_1},$$

$$E_2^{1,2} = \frac{x \in \Lambda^3 V_2 : dx = 0\}}{d(\{x \in \Lambda^2 \mathfrak{n}^* : dx \in \Lambda^3 V_2\})} = \frac{\Lambda^3 V_2}{\langle \{e^1 \wedge e^2 \wedge e^3\} \rangle} \cong \{0\},$$

$$E_2^{2,-1} = V_1 \qquad E_2^{2,0} \cong \{0\}.$$

Finalmente, la cohomología usual queda escrita como

$$\begin{array}{rcl}
H^0(\mathfrak{n}) & = & \mathbb{R} \\
H^1(\mathfrak{n}) & \cong & E_2^{0,1} \oplus E_2^{1,0} \oplus E_2^{2,-1} = \{0\} \oplus \{0\} \oplus V_1, \\
H^2(\mathfrak{n}) & \cong & E_2^{0,2} \oplus E_2^{1,1} \oplus E_2^{2,0} = \frac{\Lambda^2 V_2 + \langle \{e^1 \wedge e^4\} \rangle}{\Lambda^2 V_2} \oplus \frac{\Lambda^2 V_2}{\langle \{e^1 \wedge e^3\} \rangle + \Lambda^2 V_1} \oplus \{0\} \\
H^3(\mathfrak{n}) & \cong & E_2^{0,3} \oplus E_2^{1,2} = \frac{\Lambda^3 \mathfrak{n}^*}{\langle \{e^1 \wedge e^2 \wedge e^4\} \rangle + \Lambda^3 V_2} \oplus \{0\} \\
H^4(\mathfrak{n}) & \cong & E_2^{0,4} = \Lambda^4 \mathfrak{n}^*;
\end{array}$$

y los números de Betti de $\mathfrak{n}$

$$\beta_0 = 1, \;\; \beta_1 = 2, \;\; \beta_2 = 1 + 1 = 2, \;\; \beta_3 = 2, \;\; \beta_4 = 1.$$

Observación 2.2.5. *El valor r_0 para el cual se estabiliza la sucesión espectral depende del grado de nilpotencia de $\mathfrak{n}$ como fue probado en la Proposición 2.2.2. Relevando este valor para los ejemplos recién vistos, tenemos que en el caso abeliano $r_0 = 1$ y en dimensiones tres y cuatro vale $r_0 = 2$.*

Más adelante veremos que en dimensión seis se obtendrán distintos valores de r_0, aunque siempre $r_0 \leq 3$.

La fórmula de Künneth en el caso de la cohomología de álgebras de Lie, permite describir la cohomología de un álgebra de Lie que es suma directa de dos ideales, en función de la cohomología de los factores directos.

Es nuestro interés determinar una fórmula similar para la cohomología intermedia de un álgebra de Lie $\mathfrak{n}$ en función de la cohomología intermedia de sus factores directos, en el caso que los tenga.

Teorema 2.2.6. *Sea $\mathfrak{n}$ un álgebra de Lie k-pasos nilpotente que descompone como suma directa de ideales $\mathfrak{n} = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{h}$. Entonces $\mathfrak{h}$ es k-pasos nilpotente y $\forall\, r \geq 0$, $r = \infty$ resulta:*

1. $E_r^{p,q}(\mathfrak{n}) = E_r^{p,q}(\mathfrak{h}) = 0$ *si* $p < 0$, $p \geq k$ *o* $p + q < 0$.
2. $E_r^{p,-p}(\mathfrak{n}) = 0$ *para todo* $p = 0, \ldots, k-2$ *y* $E_r^{k-1,1-k}(\mathfrak{n}) \cong \mathbb{R}$.
3. $E_r^{k-1,2-k}(\mathfrak{n}) \cong E_r^{k-1,2-k}(\mathfrak{h}) \oplus \mathbb{R}$,
4. $E_r^{p,1-p}(\mathfrak{n}) \cong E_r^{p,1-p}(\mathfrak{h}) \qquad$ *si* $p \leq k-2$,
5. $E_r^{p,q}(\mathfrak{n}) \cong E_r^{p,q}(\mathfrak{h}) \oplus E_r^{p,q-1}(\mathfrak{h}) \qquad$ *si* $p + q \geq 2$.

Prueba. Sólo presentaremos algunas identidades que permitirán llegar a la prueba. Supongamos $\mathfrak{n} = \mathbb{R}x \oplus \mathfrak{h}$. Notaremos con x^* al elemento en $\mathfrak{n}^*$ tal que $x^*(x) = 1$, $x^*(\mathfrak{h}) = 0$ e identificamos $\mathfrak{h}^* \subseteq \mathfrak{n}^*$. Claramente $dx^* = 0$ y $\mathfrak{h}^*$ es invariante por d, siendo la restricción de d a $\mathfrak{h}^*$ la diferencial correspondiente a $\mathfrak{h}$ como álgebra de Lie.

Los subespacios $\widetilde{V}_0 \subseteq \widetilde{V}_1 \subseteq \cdots \subseteq \widetilde{V}_k = \mathfrak{h}^*$ y $V_0 \subseteq V_1 \subseteq \cdots \subseteq V_k = \mathfrak{n}^*$ que filtran $\mathfrak{h}^*$ y $\mathfrak{n}^*$ respectivamente están relacionados por:

$$\widetilde{V}_0 = V_0 = 0, \qquad V_i = \widetilde{V}_i \oplus \mathbb{R}x^*,\ i = 1, \ldots, k.$$

El término inicial E_0 se obtiene por la ecuación (2.16). Para grado total 1 se tiene

$$E_0^{p,1-p}(\mathfrak{n}) = \frac{V_{k-p}}{V_{k-p-1}} = \begin{cases} (\widetilde{V}_{k-p} \oplus \mathbb{R}x^*)/(\widetilde{V}_{k-p-1} \oplus \mathbb{R}x^*) \cong \widetilde{V}_{k-p}/\widetilde{V}_{k-p-1} = E_0^{p,1-p}(\mathfrak{h}) & si \quad p \neq k-1 \\ \\ V_1 = \widetilde{V} \oplus \mathbb{R}x^* & si \quad p = k-1 \end{cases}.$$

Si el grado total es mayor o igual a 2 entonces $\Lambda^{p,q}V_{k-p} = \Lambda^{p,q}\widetilde{V}_{k-p} \oplus \mathbb{R}x^* \wedge \Lambda^{p+q-1}\widetilde{V}_{k-p}$ de donde

$$\begin{aligned} E_0^{p,q}(\mathfrak{n}) &= \frac{\Lambda^{p,q}V_{k-p}}{\Lambda^{p,q}V_{k-p-1}} = \frac{\Lambda^{p,q}\widetilde{V}_{k-p} \oplus \mathbb{R}x^* \wedge \Lambda^{p+q-1}\widetilde{V}_{k-p}}{\Lambda^{p,q}\widetilde{V}_{k-p-1} \oplus \mathbb{R}x^* \wedge \Lambda^{p+q-1}\widetilde{V}_{k-p-1}} \cong \frac{\Lambda^{p,q}\widetilde{V}_{k-p}}{\Lambda^{p,q}\widetilde{V}_{k-p-1}} \oplus \frac{\Lambda^{p+q-1}\widetilde{V}_{k-p}}{\Lambda^{p+q-1}\widetilde{V}_{k-p-1}} \\ &\cong E_0^{p,q}(\mathfrak{h}) \oplus E_0^{p,q-1}(\mathfrak{h}). \end{aligned}$$

Para $r \geq 1$ trabajamos con la fórmula (2.17) de donde

$$E_r^{k-1,q}(\mathfrak{n}) = \frac{\{y \in \Lambda^{k+q-1}V_1 : dy = 0\}}{d(\{y \in \Lambda^{k+q-2}V_r : dy \in \Lambda^{k+q-1}V_1\})}. \tag{2.20}$$

Si $q = 2-k$ entonces $E_r^{k-1,2-k}(\mathfrak{n}) = \{x \in V_1 : dy = 0\} = V_1 = \widetilde{V}_1 \oplus \mathbb{R}x^* \cong E_r^{k-1,2-k}(\mathfrak{h}) \oplus \mathbb{R}$.

En el caso $q \geq 3-k$ ($\Leftrightarrow k+q-1 \geq 2$) se tiene el isomorfismo canónico

$$\Lambda^{k+q-1}V_1 \cong \Lambda^{k+q-1}\widetilde{V}_1 \oplus \mathbb{R}x^* \wedge \Lambda^{k+q-2}\widetilde{V}_1,$$

es decir $\omega \in \Lambda^{k+q-1}V_1 \Leftrightarrow \omega = \omega_1 + x^* \wedge \omega_2$ con $\omega_1 \in \Lambda^{k+q-1}\widetilde{V}_1$, $\omega_2 \in \Lambda^{k+q-2}\widetilde{V}_1$. Además $d\omega = 0 \Leftrightarrow d\omega_1 + x^* \wedge d\omega_2 = 0 \Leftrightarrow d\omega_1 = d\omega_2 = 0$. Luego el numerador en (2.20) se escribe

$$\{y \in \Lambda^{k+q-1}V_1 : dy = 0\} = \{x \in \Lambda^{k+q-1}\widetilde{V}_1 : dy = 0\} \oplus \mathbb{R}x^* \wedge \{x \in \Lambda^{k+q-2}\widetilde{V}_1 : dy = 0\}.$$

Para describir el denominador debemos separar en el caso que $k+q-2 = 1$ ($\Leftrightarrow q = 3-k$) o bien $k+q-2 \geq 2$. En el primer caso

$$d(\{y \in \Lambda^{k+q-2}V_r : dy \in \Lambda^{k+q-1}V_1\}) = d(\{y \in V_r : dy \in \Lambda^2 V_1\}) = d(V_2) = d(\widetilde{V}_2),$$

resultando

$$\begin{aligned} E_r^{k-1,3-k}(\mathfrak{n}) &= \frac{\{x \in \Lambda^2\widetilde{V}_1 : dy = 0\} \oplus \mathbb{R}x^* \wedge \{x \in \widetilde{V}_1 : dy = 0\}}{d(\widetilde{V}_2)} \cong E_r^{k-1,3-k}(\mathfrak{h}) \oplus \underbrace{\mathbb{R}x^* \wedge \widetilde{V}_1}_{\cong \widetilde{V}_1} \\ &\cong E_r^{k-1,3-k}(\mathfrak{h}) \oplus E_r^{k-1,2-k}(\mathfrak{h}). \end{aligned}$$

En el caso $k+q-2 \geq 2$ ($\Leftrightarrow q \geq 4-k$) $\Lambda^{k+q-2}V_r = \Lambda^{k+q-2}\widetilde{V}_r \oplus (\mathbb{R}x^* \wedge \Lambda^{k+q-3}\widetilde{V}_r)$. Entonces, cada $\omega \in \Lambda^{k+q-2}V_r$ puede ser escrita como $\omega = \omega_1 + x^* \wedge \omega_2$ donde $\omega_1 \in \Lambda^{k+q-2}\widetilde{V}_r$ y $\omega_2 \in \Lambda^{k+q-3}\widetilde{V}_r$. Además $\Lambda^{k+q-1}V_1 = \Lambda^{k+q-1}\widetilde{V}_1 \oplus \mathbb{R}x^* \wedge \Lambda^{k+q-2}\widetilde{V}_1$.

Entonces para $\omega \in \Lambda^{k+q-2}V_r$

$$d\omega = d\omega_1 + x^* \wedge d\omega_2 \ \in \ \Lambda^{k+q-1}V_1 \ \text{ si y sólo si } \ d\omega_1 \in \Lambda^{k+q-1}\widetilde{V}_1 \ \text{ y } \ d\omega_2 \in \Lambda^{k+q-2}\widetilde{V}_1.$$

Luego

$$\begin{aligned} d(\{y \in \Lambda^{k+q-2}V_r : dy \in \Lambda^{k+q-1}V_1\}) &= \\ = d(\{y \in \Lambda^{k+q-2}\widetilde{V}_r : dy \in \Lambda^{k+q-1}\widetilde{V}_1\}) &\oplus \mathbb{R}x^* \wedge d(\{y \in \Lambda^{k+q-3}\widetilde{V}_r : dy \in \Lambda^{k+q-2}\widetilde{V}_1\}). \end{aligned}$$

Combinando las fórmulas del numerador y denominador, la ecuación (2.20) resulta

$$E_r^{k-1,q}(\mathfrak{n}) \cong E_r^{k-1,q}(\mathfrak{h}) \oplus E_r^{k-1,q-1}(\mathfrak{h})$$

Para aquellos $p \neq k-1$ la prueba es análoga. ■

La primer álgebra de Lie $\mathfrak{n}$ de dimensión cuatro dada en los ejemplos es suma directa de ideales: $\mathfrak{n} = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathfrak{h}$, donde $\mathfrak{h}$ es el álgebra de Lie nilpotente de dimensión tres (Heisenberg). Pueden compararse la cohomología intermedia de $\mathfrak{n}$ con la de $\mathfrak{h}$ y se verá que la relación entre ellas es la dada en el teorema anterior.

Para las álgebras de Lie nilpotentes que sean suma directa de ideales $\mathfrak{n} = \mathbb{R}^s \oplus \mathfrak{h}$, con $s \geq 1$ es posible aplicar inductivamente el teorema anterior.

Corolario 2.2.7. *Sea $\mathfrak{n}$ un álgebra de Lie nilpotente de la forma $\mathfrak{n} = \mathbb{R}^s \oplus \mathfrak{h}$ con $s \geq 1$. Entonces los términos de la sucesión espectral canónica $E_r^{p,q}(\mathfrak{n})$ de $\mathfrak{n}$ se escribe en función de la correspondiente a $\mathfrak{h}$, $E_\infty^{p,q}(\mathfrak{h})$.*

2.3. Diagramas de cohomología intermedia

Aquí presentamos una manera conveniente de presentar la cohomología intermedia de un álgebra de Lie k-pasos nilpotente $\mathfrak{g}$ de dimensión m, en vez de listarla término por término como fue hecho en la sección anterior. Esto permite una rápida lectura de la misma una vez dispuesta en tablas.

Luego de haber calculado los términos $E_0, E_1, \dots, E_r = E_\infty$ de la sucesión espectral, en vez de describir cada término E_r como cociente, sólo daremos la dimensión de los mismos como espacio vectorial. Esta información es expuesta dentro de $r+1$ tablas, cada una de k filas y $m+1$ columnas. Fijado $j \in \{0, \dots, r = \infty\}$, la tabla correspondiente a E_j muestra en la primera columna los términos de grado total 0, en la segunda columna aquellos de grado total 1, y así sucesivamente. Más precisamente, la tabla correspondiente a E_j se ve como la siguiente:

$\dim E_r^{k-1,1-k}$	$\dim E_r^{k-1,2-k}$	$\dim E_r^{k-1,3-k}$	$\cdots$	$\dim E_r^{k-1,m+1-k}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
$\dim E_r^{1,-1}$	$\dim E_r^{1,0}$	$\dim E_r^{1,1}$	$\cdots$	$\dim E_r^{1,m-1}$
$\dim E_r^{0,0}$	$\dim E_r^{0,1}$	$\dim E_r^{0,2}$	$\cdots$	$\dim E_r^{0,m}$

Cuadro 2.1: E_j

Las tablas de los ejemplos trabajados anteriormente son

Álgebras abelianas: Como $k = 1$ se obtendrán tablas de 1 fila y $m+1$ columnas si la dimensión del álgebra de Lie es m. El término E_0 se conforma con las dimensiones de los espacios $\Lambda^{p+q}\mathfrak{n}^*$ y, como fue visto en la sección anterior, resulta que E_1 la cohomología usual de $\mathfrak{n}^*$. Como el álgebra es abeliana se tiene $E_1 = E_0$. El hecho que la diferencial es nula en todos los grados implica que $E_\infty = E_0$ y se tiene sólo una tabla como resultado.

$E_0 = E_\infty$

1	m	$\binom{m}{2}$	$\cdots$	$\binom{m}{m-1}$	$\binom{m}{m}$

Álgebra de dimensión 3: Las tablas correspondientes a $\mathfrak{h}_1$ poseen dos filas por ser dos pasos nilpotente y cuatro columnas por ser la dimensión de $\mathfrak{h}_1$ igual a 3.

$$
\begin{array}{ccc}
E_0 & E_1 & E_2 = E_\infty \\
\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} &
\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} &
\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}
\end{array}
\tag{2.21}
$$

Álgebras de dimensión 4**:** Separando los dos casos como antes se tiene

1. $d(e^1) = d(e^2) = d(e^3) = 0$, $d(e^4) = e^2 \wedge e^3$. Aquí serán tablas de dos filas y cinco columnas.

$$
\begin{array}{ccc}
E_0 & E_1 & E_2 = E_\infty \\
\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ \hline \end{array} &
\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ \hline \end{array} &
\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ \hline \end{array}
\end{array}
\tag{2.22}
$$

   Observe que a pesar que $E_0 = E_1$ éste valor no es el límite de la sucesión espectral. En el caso abeliano sí lo es pues además las diferenciales son nulas.

2. $d(e^1) = d(e^2) = 0$, $d(e^3) = -e^1 \wedge e^2$ y $d(e^4) = -e^1 \wedge e^3$. Se agrega una fila al caso anterior pues el grado de nilpotencia en este caso es tres.

$$
\begin{array}{ccc}
E_0 & E_1 & E_2 = E_\infty \\
\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ \hline \end{array} &
\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} &
\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}
\end{array}
$$

Algunas propiedades de la estructura del álgebra de Lie $\mathfrak{n}$ y de su cohomología intermedia se evidencian en estas tablas.

Por ejemplo, la tabla correspondiente a E_0 de un álgebra de Lie nilpotente queda completamente determinada por la filtración de su dual. Esto se debe a que para $r = 0$ los términos de grado n son los dados en el ítem 3 de la Proposición 2.2.2. Entonces, si dos álgebras de Lie nilpotentes poseen filtraciones V_i con iguales dimensiones, las mismas tendrán igual tabla de E_0 independientemente de la diferencial (los corchetes) que la determinan.

Otras propiedades de los diagramas de cohomología intermedia asociados a un álgebra de Lie nilpotente pueden deducirse de las definiciones y proposiciones antes establecidas.

Corolario 2.3.1. *Sea $\mathfrak{n}$ un álgebra de Lie nilpotente y considere la sucesión espectral canónica asociada a $\mathfrak{n}$. Entonces su diagrama de cohomología intermedia correspondiente a E_∞ verifica:*

1. *la primera y segunda columnas están formadas por ceros, salvo en los números superiores $\dim E_\infty^{k-1,1-k}$ y $\dim E_\infty^{k-1,2-k}$ que son 1 y la dimensión del núcleo de la diferencial d respectivamente.*

2. *la última columna en la tabla correspondiente a E_∞ consiste de ceros, salvo por el número inferior que es uno.*

3. *la suma por columnas de los números correspondientes a la tabla de E_∞ dan como resultado los números de Betti del álgebra de Lie. Es decir*

$$\beta_n = \sum_{p+q=n} \dim\, E_\infty^{p,q}.$$

4. *(dualidad de Poincaré) la suma de los elementos de la columna i-ésima coincide con la suma de la $(m-i)$-ésima columna.*

5. *cada suma por columnas es mayor o igual a 2 (salvo para la primera y última).*

Prueba. El primer punto se desprende del ítem 4 en la Proposición 2.2.2 tomando $r = \infty$. Por otro lado, si $\dim \mathfrak{n} = m$, el grupo de cohomología $H^m(\mathfrak{n})$ está generado por una clase de la forma $e^1 \wedge e^2 \wedge \cdots \wedge e^m$ (ver Teorema 1.2.11). Esta m-forma es un elemento no nulo en $\Lambda^m \mathfrak{n}^*$ que no pertence a $\Lambda^m V_{k-1}$ y no es exacto. De (2.18),

$$E_\infty^{0,m} = \frac{\{x \in \Lambda^m \mathfrak{n}^* : dx = 0\}}{d(\Lambda^{m-1}\mathfrak{n}^*) + \{x \in \Lambda^{m-1} V_{k-1}\}}$$

tenemos que $e^1 \wedge e^2 \wedge \cdots \wedge e^m$ define un elemento no nulo en $E_\infty^{0,m}$. Luego, de esto y (2.19) resulta que $E_\infty^{p,m-p} = 0$ para todo $p \geq 1$. Nuevamente, haciendo uso de (2.19) deducimos el tercer punto.

La dualidad de Poincaré mencionada en el Teorema 1.2.11 junto con el hecho que la suma de cada columna es el i-ésimo número de Betti de $\mathfrak{n}$ implican el cuarto punto de este corolario. En particular, sabemos que los números de Betti de un álgebra de Lie nilpotente son siempre mayores o iguales a 2 ([18]) excepto $\beta_0 = 1 = \beta_m$. Observemos que dado que la segunda columna tiene sólo un valor distinto de cero, éste es siempre es mayor o igual a dos. ■

En el caso que un álgebra de Lie $\mathfrak{n}$ k-pasos nilpotente de dimensión m se escriba como suma directa de ideales $\mathfrak{n} = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{h}$ es posible armar el diagrama de $\mathfrak{n}$ a partir del de $\mathfrak{h}$. Denotemos $e_r^{p,q}$ a la dimensión de $E_r^{p,q}(\mathfrak{h})$. Notemos que el tamaño de la tabla de $\mathfrak{h}$ es de k filas y m columnas. Entonces, partiendo de la misma, agregamos una columna en el extremo derecho al cual le colocamos ceros en todas las filas y un uno en la de abajo. Para las primeras m columnas $(0, 1, \ldots, m-1)$, en virtud del Teorema 2.2.6 se construye la tabla de $\mathfrak{n}$ de la siguiente manera:

1	$e_r^{k-1,2-k} + 1$	$e_r^{k-1,3-k} + e_r^{k-1,2-k}$	$e_r^{k-1,4-k} + e_r^{k-1,3-k}$	$\cdots$	$e_r^{k-1,m-k} + e_r^{k-1,m-k-1}$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	0	$e_r^{1,1} + e_r^{1,0}$	$e_r^{1,2} + e_r^{1,1}$	$\cdots$	$e_r^{1,m-2} + e_r^{1,m-3}$	0
0	0	$e_r^{0,2} + e_r^{0,1}$	$e_r^{0,3} + e_r^{0,2}$	$\cdots$	$e_r^{0,m-1} + e_r^{0,m-2}$	1

Puede observarse este procedimiento de armado de tablas comparando las correspondientes al álgebra de Lie de dimension cuatro $\mathfrak{n}$ con único corchete no nulo $[e_2, e_3] = e_4$ (2.22) y la del álegebra de Heisenberg de dimensión tres (2.21). En este caso, $\mathfrak{n} = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{h}$.

Observación 2.3.2. *De acuerdo con el Corolario 2.2.7, si $\mathfrak{n} \cong \mathbb{R}^s \oplus \mathfrak{h}$ con $\mathfrak{h}$ nilpotente puede usarse el caso anterior e inducción sobre s para expresar $e_r(\mathfrak{n})$ en función de $e_r(\mathfrak{h})$.*

Del punto 1. del Corolario 2.3.1 y del Corolario 2.2.7 se obtiene:

Corolario 2.3.3. *Si $\mathfrak{n} = \mathbb{R}^s \oplus \mathfrak{h}$ es un álgebra de Lie nilpotente y $s \geq 1$ entonces $E_\infty^{0,2}(\mathfrak{n}) = E_\infty^{0,2}(\mathfrak{h})$.*

Dada un álgebra de Lie $\mathfrak{n}$, un factor abeliano $\mathfrak{a}$ es un ideal abeliano de $\mathfrak{n}$ que admite un ideal complementario $\mathfrak{h}$ de manera que $\mathfrak{n}$ descompone como suma directa de ideales $\mathfrak{n} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}$. A través de la tabla de cohomología intermedia es posible determinar una cota superior de la dimensión del mayor factor abeliano contenido en $\mathfrak{n}$. En efecto,

Corolario 2.3.4. *Si $\mathfrak{n}$ es un álgebra de Lie nilpotente con un factor abeliano de dimensión s entonces el elemento en la primera fila, segunda columna de la tabla E_0 (por lo tanto E_r para todo r) es mayor o igual a $s + 2$.*

2.4. Cohomología intermedia en dimensión ≤ 6

Las álgebras de Lie nilpotentes reales están clasificadas hasta dimensión siete, sin embargo seis es la máxima dimensión para la cual existe una cantidad finita salvo isomorfismos (ver [55],[48]). Por esta razón calculamos la cohomología intermedia de las álgebras de Lie nilpotentes reales de dimensión menor o igual a seis.

En dimensión uno y dos las únicas álgebras de Lie nilpotentes son abelianas. Salvo isomorfismos, en dimensión tres hay una sóla álgebra de Lie y en dimensión cuatro hay dos. La cohomología intermedia en estos casos fue desarrollada en los ejemplos de la sección anterior.

En esta sección presentamos la cohomología intermedia de álgebras de dimensión cinco y seis, la cual será mostrada a través de los diagramas de cohomología intermedia. El orden en el cual se listan dichas tablas es en orden creciente por dimensión. En el caso de dimensión seis, notamos que el orden es el mismo que en el trabajo de S. Salamon [62].

La notación que utilizamos es la usual. El álgebra de Lie notada como $\mathfrak{n} = (0, 0, 12, 13, 23, 14 + 25)$ es un álgebra de dimensión seis con base dual $\{e^1, e^2, e^3, e^4, e^5, e^6\}$ y donde la diferencial en esta base resulta:

$$de^1 = 0 \qquad de^2 = 0 \qquad de^3 = e^1 \wedge e^2 \qquad de^4 = e^1 \wedge e^3 \qquad de^5 = e^2 \wedge e^3 \qquad de^6 = e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^5.$$

Según la fórmula de Maurer-Cartan, en términos de corchetes las igualdades anteriores dicen:

$$[e_1, e_2] = -e_3, \qquad [e_1, e_3] = -e_4, \qquad [e_2, e_3] = -e_5 \qquad [e_1, e_4] = -e_6 = [e_2, e_5],$$

si $\{e_i : i = 1, \dots, 6\}$ es la base dual de $\{e^i : i = 1, \dots, 6\}$.

Explicitaremos cuando el álgebra de Lie $\mathfrak{n}$ listada pueda descomponerse como suma directa de ideales $\mathfrak{n} = \mathbb{R}^s \oplus \mathfrak{h}$ para que el lector pueda comparar las tablas de $\mathfrak{n}$ y $\mathfrak{h}$ de acuerdo al Corolario 2.2.7.

Para las álgebras de Lie de dimensión seis, transcribimos datos sobre existencia de estructuras simplécticas y complejas obtenidas del trabajo de S. Salamon [62]. Estos dos tipos de estructuras se definirán más adelante en el trabajo y nos será útil tener como referencia estos datos en dimenisón seis.

Dimensión cinco

(1) • $\mathfrak{n} = (0, 0, 12, 13, 14 + 23)$:

E_0

1	2	1	0	0	0
0	1	2	1	0	0
0	1	3	3	1	0
0	1	4	6	4	1

E_1

1	2	1	0	0	0
0	1	2	1	0	0
0	1	2	2	1	0
0	1	2	2	2	1

E_2

1	2	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	2	0	0
0	0	2	1	2	1

(2) • $\mathfrak{n} = (0, 0, 12, 13, 14)$:

E_0

1	2	1	0	0	0
0	1	2	1	0	0
0	1	3	3	1	0
0	1	4	6	4	1

E_1

1	2	1	0	0	0
0	1	2	1	0	0
0	1	2	2	1	0
0	1	2	2	2	1

E_2

1	2	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	2	0	0
0	0	2	1	2	1

(3) • $\mathfrak{n} = (0, 0, 12, 13, 23)$:

E_0

1	2	1	0	0	0
0	1	2	1	0	0
0	2	7	9	5	1

E_1

1	2	1	0	0	0
0	1	2	1	0	0
0	1	4	3	2	1

E_2

1	2	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	3	3	2	1

(4) • $\mathfrak{n} = (0, 0, 0, 12, 14 + 23)$:

E_0

1	3	3	1	0	0
0	1	3	3	1	0
0	1	4	6	4	1

E_1

1	3	3	1	0	0
0	1	3	3	1	0
0	1	3	4	3	1

E_2

1	3	2	0	0	0
0	0	1	1	0	0
0	0	1	3	3	1

(5) • $\mathfrak{n} = (0, 0, 0, 12, 24)$: $\mathfrak{n} = \mathbb{R}e_3 \oplus \mathfrak{h}$ donde $\mathfrak{h}$ es el álgebra de Lie 3-pasos nilpotente de dimensión 4.

E_0

1	3	3	1	0	0
0	1	3	3	1	0
0	1	4	6	4	1

E_1

1	3	3	1	0	0
0	1	3	3	1	0
0	1	3	4	3	1

E_2

1	3	2	0	0	0
0	0	1	1	0	0
0	0	1	3	3	1

(6) • $\mathfrak{n} = (0, 0, 0, 12, 13)$:

E_0

1	3	3	1	0	0
0	2	7	9	5	1

E_1

1	3	3	1	0	0
0	2	6	6	3	1

E_2

1	3	1	0	0	0
0	0	5	6	3	1

(7) • $\mathfrak{n} = (0, 0, 0, 0, 12)$: $\mathfrak{n} = \mathbb{R}e_3 \oplus \mathbb{R}e_4 \oplus \mathfrak{h}$ donde $\mathfrak{h}$ es el álgebra de Lie nilpotente de dimensión 3.

E_0

1	4	6	4	1	0
0	1	4	6	4	1

E_1

1	4	6	4	1	0
0	1	4	6	4	1

E_2

1	4	5	2	0	0
0	0	2	5	4	1

(8) • $\mathfrak{n} = (0, 0, 0, 0, 12 + 34)$:

E_0

1	4	6	4	1	0
0	1	4	6	4	1

E_1

1	4	6	4	1	0
0	1	4	6	4	1

E_2

1	4	5	0	0	0
0	0	0	5	4	1

Dimensión seis

(1) • $\mathfrak{n} = (0, 0, 12, 13, 14 + 23, 34 + 52)$: No admite estructuras complejas ni simplécticas.

E_0

1	2	1	0	0	0	0
0	1	2	1	0	0	0
0	1	3	3	1	0	0
0	1	4	6	4	1	0
0	1	5	10	10	5	1

E_1

1	2	1	0	0	0	0
0	1	2	1	0	0	0
0	1	2	2	1	0	0
0	1	2	2	2	1	0
0	1	2	3	3	2	1

E_2

1	2	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	2	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0
0	0	2	1	2	2	1

$E_3 = E_\infty$

1	2	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0
0	0	0	1	2	2	1

(2) • $\mathfrak{n} = (0, 0, 12, 13, 14, 34 + 52)$: No admite estructuras complejas ni simplécticas.

E_0

1	2	1	0	0	0	0
0	1	2	1	0	0	0
0	1	3	3	1	0	0
0	1	4	6	4	1	0
0	1	5	10	10	5	1

E_1

1	2	1	0	0	0	0
0	1	2	1	0	0	0
0	1	2	2	1	0	0
0	1	2	2	2	1	0
0	1	2	3	3	5	1

E_2

1	2	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	2	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0
0	0	2	1	2	2	1

$E_3 = E_\infty$

1	2	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0
0	0	0	1	2	2	1

(3) • $\mathfrak{n} = (0, 0, 12, 13, 14, 15)$: No admite estructuras complejas pero sí estructuras simplécticas.

E_0

1	2	1	0	0	0	0
0	1	2	1	0	0	0
0	1	3	3	1	0	0
0	1	4	6	4	1	0
0	1	5	10	10	5	1

E_1

1	2	1	0	0	0	0
0	1	2	1	0	0	0
0	1	2	2	1	0	0
0	1	2	2	2	1	0
0	1	2	3	3	2	1

E_2

1	2	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	2	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0
0	0	2	2	2	2	1

$E_3 = E_\infty$

1	2	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	2	2	2	1

(4) • $\mathfrak{n} = (0, 0, 12, 13, 14{+}23, 15{+}24)$: No admite estructuras complejas pero sí estructuras simplécticas.

E_0

1	2	1	0	0	0	0
0	1	2	1	0	0	0
0	1	3	3	1	0	0
0	1	4	6	4	1	0
0	1	5	10	10	5	1

E_1

1	2	1	0	0	0	0
0	1	2	1	0	0	0
0	1	2	2	1	0	0
0	1	2	2	2	1	0
0	1	2	3	2	2	1

E_2

1	2	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	2	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0
0	0	2	2	2	2	1

$E_3 = E_\infty$

1	2	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	2	2	2	1

(5) • $\mathfrak{n} = (0, 0, 12, 13, 14, 15{+}23)$: No admite estructuras complejas pero sí estructuras simplécticas.

E_0

1	2	1	0	0	0	0
0	1	2	1	0	0	0
0	1	3	3	1	0	0
0	1	4	6	4	1	0
0	1	5	10	10	5	1

E_1

1	2	1	0	0	0	0
0	1	2	1	0	0	0
0	1	2	2	1	0	0
0	1	2	2	2	1	0
0	1	2	3	3	2	1

E_2

1	2	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	2	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0
0	0	2	2	2	2	1

$E_3 = E_\infty$

1	2	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	2	2	2	1

(6) • $\mathfrak{n} = (0, 0, 12, 13, 23, 14)$: No admite estructuras complejas pero sí estructuras simplécticas.

E_0

1	2	1	0	0	0	0
0	1	2	1	0	0	0
0	2	7	9	5	1	0
0	1	5	10	10	5	1

E_1

1	2	1	0	0	0	0
0	1	2	1	0	0	0
0	2	4	3	2	1	0
0	1	2	3	3	2	1

$E_2 = E_\infty$

1	2	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	2	3	2	0	0
0	0	2	3	2	2	1

(7) • $\mathfrak{n} = (0, 0, 12, 13, 23, 14{-}25)$: No admite estructuras complejas pero sí estructuras simplécticas.

E_0

1	2	1	0	0	0	0
0	1	2	1	0	0	0
0	2	7	9	5	1	0
0	1	5	10	10	5	1

E_1

1	2	1	0	0	0	0
0	1	2	1	0	0	0
0	2	4	3	2	1	0
0	1	2	3	3	2	1

$E_2 = E_\infty$

1	2	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	2	3	2	0	0
0	0	2	3	2	2	1

(8) • $\mathfrak{n} = (0, 0, 12, 13, 23, 14{+}25)$: Admite estructuras complejas nilpotentes y estructuras simplécticas.

E_0

1	2	1	0	0	0	0
0	1	2	1	0	0	0
0	2	7	9	5	1	0
0	1	5	10	10	5	1

E_1

1	2	1	0	0	0	0
0	1	2	1	0	0	0
0	2	4	3	2	1	0
0	1	2	3	3	2	1

$E_2 = E_\infty$

1	2	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	2	3	2	0	0
0	0	2	3	2	2	1

(9) • $\mathfrak{n} = (0, 0, 0, 12, 14{-}23, 15{+}34)$: No admite estructuras complejas pero sí estructuras simplécticas.

E_0

1	3	3	1	0	0	0
0	1	3	3	1	0	0
0	1	4	6	4	1	0
0	1	5	10	10	5	1

E_1

1	3	3	1	0	0	0
0	1	3	3	1	0	0
0	1	3	4	3	1	0
0	1	3	4	4	3	1

E_2

1	3	2	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0
0	0	0	2	1	0	0
0	0	2	2	3	3	1

$E_3 = E_\infty$

1	3	2	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	2	1	0	0
0	0	1	2	3	3	1

(10) • $\mathfrak{n} = (0, 0, 0, 12, 14, 15{+}23)$: No admite estructuras complejas pero sí estructuras simplécticas.

E_0

1	3	3	1	0	0	0
0	1	3	3	1	0	0
0	1	4	6	4	1	0
0	1	5	10	10	5	1

E_1

1	3	3	1	0	0	0
0	1	3	3	1	0	0
0	1	3	4	3	1	0
0	1	3	4	4	3	1

$E_2 = E_\infty$

1	3	2	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0
0	0	0	2	2	0	0
0	0	2	3	3	3	1

(11) • $\mathfrak{n} = (0, 0, 0, 12, 14, 15{+}23{+}24)$: No admite estructuras complejas pero sí estructuras simplécticas.

E_0

1	3	3	1	0	0	0
0	1	3	3	1	0	0
0	1	4	6	4	1	0
0	1	5	10	10	5	1

E_1

1	3	3	1	0	0	0
0	1	3	3	1	0	0
0	1	3	4	3	1	0
0	1	3	4	4	3	1

$E_2 = E_\infty$

1	3	2	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0
0	0	0	2	2	0	0
0	0	2	3	3	3	1

(12) • $\mathfrak{n} = (0, 0, 0, 12, 14, 15 + 24)$: $\mathfrak{n} = \mathbb{R}e_3 \oplus \mathfrak{h}$ donde $\mathfrak{h}$ es el álgebra (1) de dimensión 5. No admite estructuras complejas pero sí simplécticas.

E_0

1	3	3	1	0	0	0
0	1	3	3	1	0	0
0	1	4	6	4	1	0
0	1	5	10	10	5	1

E_1

1	3	3	1	0	0	0
0	1	3	3	1	0	0
0	1	3	4	3	1	0
0	1	3	4	4	3	1

$E_2 = E_\infty$

1	3	2	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0
0	0	0	2	2	0	0
0	0	2	3	3	3	1

(13) • $\mathfrak{n} = (0, 0, 0, 12, 14, 15)$: $\mathfrak{n} = \mathbb{R}e_3 \oplus \mathfrak{h}$ donde $\mathfrak{h}$ es el álgebra (2) de dimensión 5. No admite estructuras complejas pero sí simplécticas.

E_0

1	3	3	1	0	0	0
0	1	3	3	1	0	0
0	1	4	6	4	1	0
0	1	5	10	10	5	1

E_1

1	3	3	1	0	0	0
0	1	3	3	1	0	0
0	1	3	4	3	1	0
0	1	3	4	4	3	1

$E_2 3 = E_\infty$

1	3	2	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0
0	0	0	2	2	0	0
0	0	2	3	3	3	1

(14) • $\mathfrak{n} = (0, 0, 0, 12, 13, 14 + 35)$: No admite estructuras complejas ni simplécticas.

E_0

1	3	3	1	0	0	0
0	2	7	9	5	1	0
0	1	5	10	10	5	1

E_1

1	3	3	1	0	0	0
0	2	6	6	3	1	0
0	1	3	6	6	3	1

$E_2 = E_\infty$

1	3	1	0	0	0	0
0	0	4	3	0	0	0
0	0	0	3	5	3	1

(15) • $\mathfrak{n} = (0, 0, 0, 12, 23, 14 + 35)$: No admite estructuras complejas ni simplécticas.

E_0

1	3	3	1	0	0	0
0	2	7	9	5	1	0
0	1	5	10	10	5	1

E_1

1	3	3	1	0	0	0
0	2	6	6	3	1	0
0	1	3	6	6	3	1

$E_2 = E_\infty$

1	3	1	0	0	0	0
0	0	4	3	0	0	0
0	0	0	3	5	3	1

(16) • $\mathfrak{n} = (0, 0, 0, 12, 23, 14 - 35)$: Admite estructuras complejas nilpotentes pero no estructuras simplécticas.

E_0

1	3	3	1	0	0	0
0	2	7	9	5	1	0
0	1	5	10	10	5	1

E_1

1	3	3	1	0	0	0
0	2	6	6	3	1	0
0	1	3	6	6	3	1

$E_2 = E_\infty$

1	3	1	0	0	0	0
0	0	4	3	0	0	0
0	0	0	3	5	3	1

(17) • $\mathfrak{n} = (0, 0, 0, 12, 14, 24)$:$\mathfrak{n} = \mathbb{R}e_3 \oplus \mathfrak{h}$ donde $\mathfrak{h}$ es el álgebra (3) de dimensión 5. No admite estructuras complejas ni simplécticas.

E_0

1	3	3	1	0	0	0
0	1	3	3	1	0	0
0	2	9	16	14	6	1

E_1

1	3	3	1	0	0	0
0	1	3	3	1	0	0
0	2	6	7	5	3	1

$E_2 = E_\infty$

1	3	2	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	3	6	5	3	1

(18) • $\mathfrak{n} = (0, 0, 0, 12, 13 - 24, 14 + 23)$: Admite estructuras complejas y simplécticas.

E_0

1	3	3	1	0	0	0
0	1	3	3	1	0	0
0	2	9	16	14	6	1

E_1

1	3	3	1	0	0	0
0	1	3	3	1	0	0
0	2	6	7	5	3	1

$E_2 = E_\infty$

1	3	2	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	3	6	5	3	1

(19) • $\mathfrak{n} = (0, 0, 0, 12, 14, 13 - 24)$: Admite estructuras complejas y estructuras simplécticas.

E_0

1	3	3	1	0	0	0
0	1	3	3	1	0	0
0	2	9	16	14	6	1

E_1

1	3	3	1	0	0	0
0	1	3	3	1	0	0
0	2	6	7	5	3	1

$E_2 = E_\infty$

1	3	2	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	3	6	5	3	1

(20) • $\mathfrak{n} = (0, 0, 0, 12, 13 + 14, 24)$: Admite estructuras complejas y estructuras simplécticas.

E_0

1	3	3	1	0	0	0
0	1	3	3	1	0	0
0	2	9	16	14	6	1

E_1

1	3	3	1	0	0	0
0	1	3	3	1	0	0
0	2	6	7	5	3	1

$E_2 = E_\infty$

1	3	2	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	3	6	5	3	1

(21) • $\mathfrak{n} = (0, 0, 0, 12, 13, 14 + 23)$: Admite estructuras complejas y estructuras simplécticas.

E_0

1	3	3	1	0	0	0
0	2	7	9	5	1	0
0	1	5	10	10	5	1

E_1

1	3	3	1	0	0	0
0	2	6	6	3	1	0
0	1	3	6	6	3	1

$E_2 = E_\infty$

1	3	1	0	0	0	0
0	0	4	4	1	0	0
0	0	1	4	5	3	1

(22) • $\mathfrak{n} = (0, 0, 0, 12, 13, 24)$: Admite estructuras complejas y estructuras simplécticas.

E_0

1	3	3	1	0	0	0
0	2	7	9	5	1	0
0	1	5	10	10	5	1

E_1

1	3	3	1	0	0	0
0	2	6	6	3	1	0
0	1	3	6	6	3	1

$E_2 = E_\infty$

1	3	1	0	0	0	0
0	0	4	4	1	0	0
0	0	1	4	5	3	1

(23) • $\mathfrak{n} = (0, 0, 0, 12, 13, 14)$: Admite estructuras complejas y estructuras simplécticas.

E_0

1	3	3	1	0	0	0
0	2	7	9	5	1	0
0	1	5	10	10	5	1

E_1

1	3	3	1	0	0	0
0	2	6	6	3	1	0
0	1	3	6	6	3	1

$E_2 = E_\infty$

1	3	1	0	0	0	0
0	0	4	4	1	0	0
0	0	1	4	5	3	1

(24) • $\mathfrak{n} = (0, 0, 0, 12, 13, 23)$: Admite estructuras complejas y estructuras simplécticas.

E_0

1	3	3	1	0	0	0
0	3	12	19	15	6	1

E_1

1	3	3	1	0	0	0
0	3	9	12	8	3	1

$E_2 = E_\infty$

1	3	0	0	0	0	0
0	0	8	12	8	3	1

(25) • $\mathfrak{n} = (0, 0, 0, 0, 12, 15 + 34)$: No admite estructuras complejas ni simplécticas.

E_0

1	4	6	4	1	0	0
0	1	4	6	4	1	0
0	1	4	10	10	4	1

E_1

1	4	6	4	1	0	0
0	1	4	6	4	1	0
0	1	4	7	7	4	1

E_2

1	4	5	2	0	0	0
0	0	1	2	0	0	0
0	0	1	3	6	4	1

$E_3 = E_\infty$

1	4	5	1	0	0	0
0	0	1	2	0	0	0
0	0	0	3	6	4	1

(26) • $\mathfrak{n} = (0, 0, 0, 0, 12, 15)$: $\mathfrak{n} = \mathbb{R}e_3 \oplus \mathbb{R}e_4 \oplus \mathfrak{h}$ donde $\mathfrak{h}$ es el álgebra 4, 3 pasos nilpotente. No admite estructuras complejas pero sí simplécticas.

E_0						
1	4	6	4	1	0	0
0	1	4	6	4	1	0
0	1	5	10	10	4	1

E_1						
1	4	6	4	1	0	0
0	1	4	6	4	1	0
0	1	4	7	7	4	1

$E_2 = E_\infty$						
1	4	5	2	0	0	0
0	0	1	2	1	0	0
0	0	1	4	6	4	1

(27) • $\mathfrak{n} = (0, 0, 0, 0, 12, 14 + 25)$: Admite estructuras complejas nilpotentes y estructuras simplécticas.

E_0						
1	4	6	4	1	0	0
0	1	4	6	4	1	0
0	1	5	10	10	5	1

E_1						
1	4	6	4	1	0	0
0	1	4	6	4	1	0
0	1	4	7	7	4	1

$E_2 = E_\infty$						
1	4	5	2	0	0	0
0	0	1	2	1	0	0
0	0	1	4	6	4	1

(28) • $\mathfrak{n} = (0, 0, 0, 0, 13 + 42, 14 + 23)$: Admite estructuras complejas y estructuras simplécticas.

E_0						
1	4	6	4	1	0	0
0	2	9	16	14	6	1

E_1						
1	4	6	4	1	0	0
0	2	8	11	8	4	1

$E_2 = E_\infty$						
1	4	4	0	0	0	0
0	0	4	10	8	4	1

(29) • $\mathfrak{n} = (0, 0, 0, 0, 12, 14 + 23)$: Admite estructuras complejas y estructuras simplécticas.

E_0						
1	4	6	4	1	0	0
0	2	9	16	14	6	1

E_1						
1	4	6	4	1	0	0
0	2	8	11	8	4	1

$E_2 = E_\infty$						
1	4	4	0	0	0	0
0	0	4	10	8	4	1

(30) • $\mathfrak{n} = (0, 0, 0, 0, 12, 34)$: Admite estructuras complejas y estructuras simplécticas.

E_0						
1	4	6	4	1	0	0
0	2	9	16	14	6	1

E_1						
1	4	6	4	1	0	0
0	2	8	11	8	4	1

$E_2 = E_\infty$						
1	4	4	0	0	0	0
0	0	4	10	8	4	1

(31) • $\mathfrak{n} = (0, 0, 0, 0, 12, 13)$: $\mathfrak{n} = \mathbb{R}e_4 \oplus \mathfrak{h}$ donde $\mathfrak{h}$ es el álgebra (6) de dimensión 5. Admite estructuras complejas y simplécticas.

E_0						
1	4	6	4	1	0	0
0	2	9	16	14	6	1

E_1						
1	4	6	4	1	0	0
0	2	8	12	9	4	1

$E_2 = E_\infty$						
1	4	4	1	0	0	0
0	0	5	11	9	4	1

(32) • $\mathfrak{n} = (0, 0, 0, 0, 0, 12 + 34)$: $\mathfrak{n} = \mathbb{R}e_5 \oplus \mathfrak{h}$ donde $\mathfrak{h}$ es el álgebra (8) de dimensión 5. Admite estructuras complejas pero no simplécticas.

E_0						
1	5	10	10	5	1	0
0	1	5	10	10	5	1

E_1						
1	5	10	10	5	1	0
0	1	5	10	10	5	1

$E_2 = E_\infty$						
1	5	9	5	0	0	0
0	0	0	5	9	5	1

(33) • $\mathfrak{n} = (0, 0, 0, 0, 0, 12)$:$\mathfrak{n} = \mathbb{R}e_3 \oplus \mathbb{R}e_4 \oplus \mathfrak{h}$ donde $\mathfrak{h}$ es el álgebra de Lie de dimensión 3. Admite estructuras complejas y simplécticas.

E_0

1	5	10	10	5	1	0
0	1	5	10	10	5	1

E_1

1	5	10	10	5	1	0
0	1	5	10	10	5	1

$E_2 = E_\infty$

1	5	9	7	2	0	0
0	0	2	7	9	5	1

Por simple inspección de las tablas podemos ver que, por ejemplo, las álgebras de Lie $\mathfrak{n}_6$ y $\mathfrak{n}_7$ correspondientes a los números (6) y (7) anteriores tienen iguales diagramas de cohomología intermedia y sin embargo son no isomorfas. En efecto $\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{n}_6) = 2 \neq 1 = \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{n}_7)$.

Proposición 2.4.1. *Existen álgebras de Lie no isomorfas con igual cohomología intermedia.*

Capítulo 3

Aplicaciones de la Cohomología Intermedia

En el capítulo anterior presentamos la definición de la cohomología intermedia de un álgebra de Lie nilpotente, realizamos cálculos explícitos y establecimos algunas propiedades de esta cohomología en relación a la estructura del álgebra de Lie. En este capítulo introducimos aplicaciones de la cohomología intermedia.

En la primera sección damos un resultado que vincula uno de los términos de la cohomología intermedia con la existencia de estructuras simplécticas. En las secciones siguientes aplicamos este resultado para probar que los nilradicales de las subálgebras de Borel no admiten tales estructuras (ver Teorema 3.2.3). También a través del mismo obtenemos una prueba alternativa de un resultado de Dotti y Tirao [21] sobre las álgebras de tipo Heisenberg que admiten estructuras simplécticas.

3.1. Estructuras simplécticas y cohomología intermedia

El Teorema 3.1.3 introduce una obstrucción para la existencia de estructuras simplécticas en álgebras de Lie nilpotentes. Esta obstrucción se da en términos de la cohomología intermedia.

Aquí presentamos el concepto de estructura simpléctica en álgebras de Lie y utilizamos algunas propiedades básicas de las mismas. Más adelante en el Capítulo 4, desarrollaremos el tema de estructuras simplécticas en álgebras de Lie nilpotentes con más profundidad. Referimos a la introducción de ese capítulo para ejemplos y propiedades conocidos sobre este tema.

Definición 3.1.1. *Una estructura simpléctica en un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensión par $2s$, es una 2-forma σ en $\mathfrak{g}$ cerrada y tal que* $\sigma^s = \underbrace{\sigma \wedge \sigma \wedge \cdots \wedge \sigma}_{s} \neq 0$.

Equivalentemente, una estructura simpléctica σ en $\mathfrak{g}$ es un elemento de $\Lambda^2\mathfrak{g}^*$ tal que $\sigma = 0$ y que, como forma bilineal antisimétrica definida en $\mathfrak{g}$, es no degenerada. En particular es un elemento de $Z^2 = \ker(d : \Lambda^2\mathfrak{g}^* \longrightarrow \Lambda^3\mathfrak{g}^*)$ y por lo tanto define una clase de cohomología $[\sigma]$ en $H^2(\mathfrak{g})$.

Esta definición está motivada por su correspondiente en variedades. Una forma simpléctica ω en una variedad diferenciable M de dimensión par es una 2-forma diferenciable cerrada que es no degenerada en cada punto de la variedad.

Una obstrucción que da la cohomología de de Rham para la existencia de estructuras simplécticas en variedades compactas es la siguiente (ver Sección 4.1)

$$\text{si } M \text{ es una variedad compacta simpléctica, entonces } H^2_{dR}(M) \neq 0.$$

Por esta obstrucción se deduce que las esferas de dimensión par $\mathbb{S}^{2n}$, $n \geq 2$ no son simplécticas, en efecto $H^2_{dR}(\mathbb{S}^{2n}) = 0$ si $n \geq 2$.

En el caso particular de una nilvariedad $M = \Gamma\backslash N$, ésta es una variedad simpléctica si y sólo si el álgebra de Lie $\mathfrak{n}$ del grupo de Lie N admite estructuras simplécticas. Este hecho es consecuencia del teorema de Nomizu [58]. Esta equivalencia entre las estructuras simplécticas en M y las de $\mathfrak{n}$ permite reescribir la obstrucción anterior de la siguiente manera

$$\text{si } \mathfrak{n} \text{ es una álgebra de Lie nilpotente simpléctica, entonces } H^2(\mathfrak{n}) \neq 0.$$

Sin embargo, esta condición no es restrictiva para un álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{n}$ ya que siempre $\dim H^2(\mathfrak{n}) \geq 2$ como vimos en la Sección 1.2 (obtenido de [19]).

Por lo tanto, es necesaria la obtención de una obstrucción cohomológica diferente en álgebras de Lie nilpotentes. Una tal obstrucción es brindada en el Teorema 3.1.3, de allí la relevancia del mismo.

Dada un álgebra de Lie $\mathfrak{n}$ y ω una 2-forma cerrada en $\mathfrak{n}$, se contruye el álgebra de Lie $\tilde{\mathfrak{n}}$, la *extensión central de* $\mathfrak{n}$ *por* ω, como detallamos a continuación. Consideremos un elemento $z \notin \mathfrak{n}$ y definimos en $\tilde{\mathfrak{n}} = \mathfrak{n} \oplus \mathbb{R}z$ el corchete $[[\,,\,]]$ en $\tilde{\mathfrak{n}}$ a partir del corchete $[\,,\,]$ de $\mathfrak{n}$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} [[x, z]] &= 0 && \forall x \in \tilde{\mathfrak{n}} \\ [[x, y]] &= [x, y] + \omega(x, y)\, z && \forall x, y \in \mathfrak{n}. \end{aligned}$$

Resulta $\tilde{\mathfrak{n}}$ siempre un álgebra de Lie ya que ω es cerrada, y $\mathfrak{z}\,(\tilde{\mathfrak{n}}) = span\{z\}$ si y sólo si ω es no degenerada. Además, en ese caso, $\tilde{\mathfrak{n}}$ es $k+1$ pasos nilpotente si $\mathfrak{n}$ es k-pasos. Esta construcción permite vincular las estructuas simplécticas con la sucesión espectral asociada al álgebra de Lie.

Lema 3.1.2. *Sea* $\mathfrak{n}$ *un álgebra de Lie nilpotente y* ω *una estructura simpléctica. Sea* $\tilde{\mathfrak{n}}$ *la extensión central de* $\mathfrak{n}$ *por* ω*. Entonces* $\tilde{\mathfrak{n}}$ *es nilpotente y se verifica*

$$\dim E_\infty^{0,2}(\mathfrak{n}) = \dim E_\infty^{1,1}(\tilde{\mathfrak{n}}) + 1. \tag{3.1}$$

Prueba. Denotamos con V_i y $\widetilde{V}_i$ los subespacios asociados a $\mathfrak{n}$ y $\tilde{\mathfrak{n}}$ respectivamente se tiene:

$$\widetilde{V}_i = V_i,\ i = 0, \ldots, k, \qquad \widetilde{V}_{k+1} = \tilde{\mathfrak{n}}^*.$$

Sea $\tilde{d}$ la diferencial de $\tilde{\mathfrak{n}}$ y $\zeta \in \tilde{\mathfrak{n}}^*$ tal que $\zeta(z) = 1$, $\zeta(\mathfrak{n}) = 0$. Entonces $\tilde{d}\zeta = -\omega$, en efecto si $\{e_1, \ldots, e_m\}$ es una base de $\mathfrak{n}^*$

$$\begin{aligned}
\tilde{d}\zeta &= \sum_{1\leq i<j\leq m} -\zeta([[e_i, e_j]])e^i \wedge e^j + \sum_{i=1}^{m} \zeta(\underbrace{[[e_i, z]]}_{=0})e^i \wedge \zeta \\
&= \sum_{1\leq i<j\leq m} -\zeta([e_i, e_j] + \omega(e_i, e_j)\, z)e^i \wedge e^j \\
&= \sum_{1\leq i<j\leq m} -\omega(e_i, e_j)e^i \wedge e^j = -\omega
\end{aligned}$$

Además, la restricción de $\tilde{d}$ a $\mathfrak{n}$ coincide con la diferencial d de $\mathfrak{n}$. Con estos datos podemos calcular $E_\infty^{1,1}(\tilde{\mathfrak{n}})$.

$$\begin{aligned}
E_\infty^{1,1}(\tilde{\mathfrak{n}}) &= \frac{\{x \in \Lambda^2\widetilde{V}_k : \tilde{d}x = 0\}}{\tilde{d}(\{x \in \tilde{\mathfrak{n}}^* : \tilde{d}x \in \Lambda^2 V_k\}) + \{x \in \Lambda^2 V_{k-1} : \tilde{d}x = 0\}} \\
&= \frac{\{x \in \Lambda^2\mathfrak{n}^* : dx = 0\}}{\tilde{d}(\tilde{\mathfrak{n}}^*) + \{x \in \Lambda^2 V_{k-1} : dx = 0\}} = \frac{\{x \in \Lambda^2\mathfrak{n}^* : dx = 0\}}{\mathbb{R}\omega + d(\mathfrak{n}^*) + \{x \in \Lambda^2 V_{k-1} : dx = 0\}} \qquad (3.2) \\
&= \frac{\{x \in \Lambda^2\mathfrak{n}^* : dx = 0\}}{\mathbb{R}\omega + \{x \in \Lambda^2 V_{k-1} : dx = 0\}}.
\end{aligned}$$

Recordemos que $E_\infty^{0,2}(\mathfrak{n}) = \frac{\{x\in\Lambda^2\mathfrak{n}^*:dx=0\}}{\{x\in\Lambda^2 V_{k-1}:dx=0\}}$. Probaremos que $\omega \notin \Lambda^2 V_{k-1}$ y, junto con (3.2), obtendremos que $E_\infty^{1,1}(\tilde{\mathfrak{n}})$ tiene una dimensión menos que $E_\infty^{0,2}(\mathfrak{n})$, como queríamos probar.

Dada $\sigma \in \Lambda^2 V_{k-1}$, $\sigma(x, \cdot) = 0, \forall x \in \mathfrak{n}^{k-1}$ puesto que $V_{k-1} = (\mathfrak{n}^{k-1})^\circ$. Es decir, toda 2-forma en $\Lambda^2 V_{k-1}$ es degenerada en $\mathfrak{n}$. Como ω es simpléctica, es no degenerada y por lo tanto $\omega \notin \Lambda^2 V_{k-1}$. ■

Teorema 3.1.3. *Sea $\mathfrak{n}$ un álgebra de Lie nilpotente tal que $E_\infty^{0,2}(\mathfrak{n}) = 0$. Entonces el álgebra de Lie $\mathbb{R}^s \oplus \mathfrak{n}$ no admite estructuras simplécticas para todo $s \geq 0$.*

En particular, si $\mathfrak{n}$ es de dimensión par y $E_\infty^{0,2}(\mathfrak{n}) = 0$ entonces $\mathfrak{n}$ no admite estructuras simplécticas.

Prueba. Si $\mathbb{R}^s \oplus \mathfrak{n}$ admite una estructura simpléctica entonces dim $E_\infty^{0,2}(\mathbb{R}^s \oplus \mathfrak{n}) \geq 1$ por el lema anterior. Por otro lado $E_\infty^{0,2}(\mathfrak{n}) = E_\infty^{0,2}(\mathbb{R}^s \oplus \mathfrak{n}) \geq 1$ en virtud del Corolario 2.3.3, como queríamos probar.

■

El término $E_\infty^{0,2}(\mathfrak{n})$ se encuentra en la tabla correspondiente al término límite de la sucesión espectral de cohomología intermedia. Precisamente está ubicado en la última fila tercera columna, de izquierda a derecha.

Observación 3.1.4. *Dentro de la demostración del lema probamos que si $Z^2 \subseteq \Lambda^2 V_{k-1}$ entonces $\mathfrak{n}$ no admite estructuras simplécticas. Más aún, es posible mostrar que en un álgebra de Lie vale $E_\infty^{0,2}(\mathfrak{n}) = 0 \Leftrightarrow Z^2 \subseteq \Lambda^2 V_{k-1}$. En efecto,*

$$E_\infty^{0,2}(\mathfrak{n}) = \frac{\{x \in \Lambda^2\mathfrak{n}^* : dx = 0\}}{d(\mathfrak{n}^*) + \{x \in \Lambda^2 V_{k-1} : dx = 0\}} = \frac{Z^2}{\{x \in \Lambda^2 V_{k-1} : dx = 0\}},$$

pues $d(\mathfrak{n}^*) \subset \Lambda^2 V_{k-1}$.

La afirmación recíproca del teorema anterior no es válida en general. Como ejemplo mostramos una familia de álgebras de Lie nilpotentes para las cuales el término $E_\infty^{0,2} \neq 0$ y sin embargo no admiten estructuras simplécticas. Este ejemplo proviene de las álgebras de Lie nilpotentes libres.

Definición 3.1.5. *Denotamos con $\mathfrak{f}_m$ al álgebra de Lie libre en m generadores, con $m \geq 2$. El álgebra de Lie cociente $\mathfrak{n}_{m,k} = \mathfrak{f}_m/(\mathfrak{f}_m)^k$ es el* álgebra de Lie k-pasos nilpotente libre en m generadores.

Cada conjunto de generadores de $\mathfrak{f}_m$ desciende a un conjunto generador de $\mathfrak{n}_{m,k}$ y cada conjunto ordenado de generadores define una base particular llamada *base de Hall* ([33]).

A partir de la utilización de las bases de Hall, se demuestra que las álgebras de Lie nilpotentes libres de dimensión par y las extensiones por un factor abeliano de las de dimensión impar no admiten estructuras simplécticas, salvo los casos particulares $\mathbb{R} \oplus \mathfrak{n}_{2,2}$ y $\mathfrak{n}_{3,2}$. Este resultado forma parte de esta tesis y se incluye como el Teorema 4.2.4 en la Sección 4.2 del próximo capítulo. En esa sección trabajamos en detalle las bases de Hall e incluimos la prueba del resultado mencionado.

Ejemplo 3.1.6. *Sea $\mathfrak{n}_{m,3}$ el álgebra de Lie libre 3-pasos nilpotente en m generadores y sea $\{e_1, \ldots, e_m\}$ un conjunto de generadores de la misma. La base de Hall asociada a este conjunto es*

$$\mathcal{B} = \{e_i,\, [e_j, e_k],\, [[e_r, e_s], e_t],\, i = 1, \ldots, m,\, 1 \leq k < j \leq m,\, 1 \leq s < r \leq m,\, t \geq s\}.$$

Tomando la base dual de $\mathcal{B}$ en $\mathfrak{n}_{3,m}^*$, la base de 1-formas se escribe como

$$\mathcal{B}^* = \{\alpha^i,\, \alpha^{jk}, \alpha^{rst}\, i = 1, \ldots, m,\, 1 \leq k < j \leq m,\, 1 \leq s < r \leq m,\, t \geq s\}.$$

De los corchetes en $\mathfrak{n}_{m,3}$ se tiene que la diferencial en elementos de $\mathcal{B}^*$ es

$$\begin{cases} d\alpha^i = 0,\ i = 1..m, \\ d\alpha^{ij} = -\alpha^i \wedge \alpha^j,\ 1 \leq j < i \leq m, \\ d\alpha^{ijk} = -\alpha^{ij} \wedge \alpha^k,\ 1 \leq j < i \leq m,\ k \geq j. \end{cases}$$

Luego los espacios definidos en la ecuación (1.2) son:

$$V_1 = \{\alpha^i,\ i = 1..m\}, \quad V_2 = \{\alpha^{ij},\ 1 \leq j < i \leq m\} \quad y \quad V_3 = \mathfrak{n}_{m,3}^*.$$

Para cada $1 \leq j < i \leq m$, $k \geq j$, resulta $d(\alpha^{ijk} \wedge \alpha^k) = -\alpha^{ij} \wedge \alpha^k \wedge \alpha^k = 0$. Luego $\alpha^{ijk} \wedge \alpha^k \in Z^2 \cap (V_1 \wedge (\mathfrak{n}^3)^*)$ y $\alpha^{ijk} \wedge \alpha^k \notin \Lambda^2 V_2$. Por lo tanto $\alpha^{ijk} \wedge \alpha^k$ define un elemento no nulo en $E_\infty^{0,2}(\mathfrak{n}_{m,3})$ para cada $1 \leq j < i \leq m$, $k \geq j$ y $E_\infty^{0,2}(\mathfrak{n}_{m,3}) \neq 0$.

Consideramos el álgebra de Lie $\mathbb{R}^t \oplus \mathfrak{n}_{m,3}$, siendo $t = 0$ o $t = 1$ dependiendo de si $\dim \mathfrak{n}_{m,3}$ *es par o impar respectivamente. Resulta*

$$E_\infty^{0,2}(\mathbb{R}^t \oplus \mathfrak{n}_{m,3}) \neq 0$$

para todo t y m ya que, por el Teorema 2.2.6, $E_\infty^{0,2}(\mathbb{R}^t \oplus \mathfrak{n}_{m,3}) = E_\infty^{0,2}(\mathfrak{n}_{m,3})$.

Sin embargo, $\mathbb{R}^t \oplus \mathfrak{n}_{m,3}$ no admite estructuras simplécticas para ningún m, t (ver Teorema 4.2.4).

En conclusión, la afirmación recíproca del Teorema 3.1.3 no es válida: dada un álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{n}$*, el hecho que* $E_\infty^{0,2}(\mathfrak{n}) \neq 0$ *no garantiza la existencia de estructuras simplécticas en* $\mathfrak{n}$ *o* $\mathbb{R} \oplus \mathfrak{n}$ *según la paridad de* $\dim \mathfrak{n}$.

Notar que para $m = 2$*, el álgebra* $\mathfrak{n}_{2,3}$ *tiene dimensión cinco. El álgebra* $\mathbb{R} \oplus \mathfrak{n}_{3,2}$ *corresponde a la tabla número 17 dentro de las de dimensión seis, en la Sección 2.4.*

3.2. $E_\infty^{0,2}$ de nilradicales de subálgebras de Borel correspondientes a álgebras de Lie clásicas simples complejas.

El Teorema 3.1.3 brinda una condición necesaria para la existencia de estructuras simplécticas en las álgebras de Lie nilpotentes reales. Probaremos en esta sección que, dada $\mathfrak{b}$ una subálgebra de Borel de un álgebra de Lie simple clásica compleja $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{n}$ su nilradical, resulta $E_\infty^{0,2}(\mathfrak{n}) = 0$. De esta forma concluimos que para cada $s \geq 0$, $\mathbb{R}^s \oplus \mathfrak{n}$ no admite estructuras simplécticas.

Recordemos que los nilradicales $\mathfrak{n}$ de las subálgebras de Borel $\mathfrak{b}$ son álgebras de Lie $\mathbb{N}$-graduadas; este hecho fue visto en el Capítulo 1. A través de la graduación de $\mathfrak{n}$ y una descripción de las formas simplécticas en álgebras de Lie nilpotentes calculamos $E_\infty^{0,2}$ en las álgebras antes mencionadas.

El siguiente resultado se encuentra en el trabajo de C. Benson y C. Gordon [4] (Lema 2.8) e incluimos su prueba en la Sección 4.1.

Proposición 3.2.1. *En un álgebra de Lie* k *pasos nilpotente* $\mathfrak{n}$*,*

$$Z^2 \subseteq (V_1 \otimes (\mathfrak{n}^{k-1})^*) \oplus \Lambda^2 V_{k-1},$$

donde los espacios V_1 *y* V_{k-1} *son los definidos en (1.2) y* $(\mathfrak{n}^{k-1})^*$ *es el dual del último paso de la serie central descendente.*

Esta proposición inscribe al espacio de 2-formas cerradas dentro de un subespacio propio de $\Lambda^2\mathfrak{n}^*$. En particular si $\omega \in \Lambda^2\mathfrak{n}^*$ es cerrada, entonces $\omega = \sigma + \tilde{\omega}$ con $\sigma \in (\mathfrak{n}^{k-1})^* \wedge V_1$ y $\tilde{\omega} \in \Lambda^2 V_{k-1}$.

Vimos en el Capítulo 1 que los nilradicales $\mathfrak{n}$ de las subálgebras de Borel correspondientes a las álgebras de Lie semisimples complejas son álgebras de Lie $\mathbb{N}$-graduadas. En efecto, considerando los subespacios $L_i = \bigoplus_{\alpha:\ell(\alpha)=i} \mathbb{R}X_\alpha$ se tiene $\mathfrak{n} = \bigoplus_{j\geq 1} L_j$ y $[L_j, L_i] = L_{i+j}$ donde X_α es la base en la Proposición 1.3.10.

Para cada $\alpha \in \triangle^+$ denotamos γ_α el elemento de la base de $\mathfrak{n}^*$ dual a X_α. Resulta $L_i^* = span_{\mathbb{R}}\{\gamma_\alpha : \ell(\alpha) = i\}$ el espacio dual a L_i. La diferencial de estas 1-formas verifican (ver Corolario 1.3.14)

$$d\gamma_\alpha = 0 \text{ si y sólo si } \alpha \text{ es raíz simple} \quad \text{y} \quad \forall \alpha \in \triangle^+ \,/\, \ell(\alpha) = m \geq 1, \quad d\gamma_\alpha \in \bigoplus_{i+j=m} L_i^* \wedge L_j^*. \tag{3.3}$$

Para estas álgebras de Lie nilpotentes $\mathfrak{n}$ el índice de nilpotencia k coincide con la longitud de la raíz máxima $\ell(\alpha_{\text{máx}})$. Por el Corolario 1.3.15, los subespacios V_1, $V_2, \cdots, V_k$ quedan determinados por la graduación del álgebra $\mathfrak{n}$: $V_j = \operatorname{span}\{\gamma_\beta : \ell(\beta) \leq j\} = L_1^* \oplus \cdots \oplus L_j^*$ para cada $j \geq 1$. En particular,

$$V_1 = \operatorname{span}\{\gamma_\beta : \ell(\beta) = 1\} = L_1^*, \quad V_{k-1} = L_1^* \oplus \cdots \oplus L_{k-1}^*. \tag{3.4}$$

Consideramos ω una 2-forma cerrada en el nilradical $\mathfrak{n}$ de una subálgebra de Borel como antes. Entonces $\omega = \sigma + \tilde{\omega}$ con $\sigma \in V_1 \otimes (\mathfrak{n}^{k-1})^*$ y $\tilde{\omega} \in \Lambda^2 V_{k-1}$. Es decir,

$$\sigma \in L_1^* \wedge L_k^* \quad \text{y} \quad \tilde{\omega} \in \bigoplus_{1 \leq i < j \leq k-1} L_i^* \wedge L_j^*, \tag{3.5}$$

dado que $\mathfrak{n}^{k-1} = L_k$ y V_1 y V_{k-1} son como en (3.4).

La dimensión de L_k^* es uno y está generado por el elemento $\gamma_{\alpha_{\text{máx}}}$. Además, L_1^* está generado por las 1-formas γ_{α_i}, $i = 1, \ldots, n$ donde $\triangle_0 = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ es el conjunto de raíces simples. Luego $\sigma = \gamma_{\alpha_{\text{máx}}} \wedge \eta$, con $\eta = \sum_{i=1}^n r_i \, \gamma_{\alpha_i} \in V_1$, $r_i \in \mathbb{R}$ y $d\sigma = d\gamma_{\alpha_{\text{máx}}} \wedge \eta$.

De las propiedades de la diferencial en (3.3),

$$d\sigma \in L_{k-1}^* \wedge L_1^* \wedge L_1^* \oplus \bigoplus_{\substack{i+j=k \\ 1 \leq i < j \leq k-2}} L_i^* \wedge L_j^* \wedge L_1^*. \tag{3.6}$$

De (3.5) es posible escribir $\tilde{\omega}$ como suma de dos componentes $\tilde{\omega} = \omega_1 + \tilde{\omega}_1$ en subespacios complementarios. Estudiaremos tres descomposiciones diferentes que nos serán de utilidad en lo que resta de la sección.

Descomposición 1. Escribimos $\tilde{\omega} = \omega_1 + \tilde{\omega}_1$ con

$$\omega_1 \in L_{k-1}^* \wedge L_2^*, \qquad \tilde{\omega}_1 \in L_{k-1}^* \wedge \Big(\bigoplus_{\substack{j \leq k-1 \\ j \neq 2}} L_j^* \Big) \oplus \Lambda^2(L_{k-2}^* \oplus \cdots \oplus L_1^*). \tag{3.7}$$

Volviendo a utilizar (3.3),

$$d\omega_1 \in L_{k-1}^* \wedge L_1^* \wedge L_1^* \oplus \bigoplus_{i+j=k-1} L_i^* \wedge L_j^* \wedge L_2^*. \tag{3.8}$$

Comparamos la componente en $L_{k-1}^* \wedge L_1^* \wedge L_1^*$ de $d\sigma$ con la de $d\tilde{\omega}$. Como ω es cerrada, $d\omega = 0 = d\sigma + d\tilde{\omega}$. Entonces $d\sigma = -d\tilde{\omega} = -d\omega_1 - d\tilde{\omega}_1$ y las componentes de $d\sigma$ y $-d\omega - d\tilde{\omega}_1$ en $L_{k-1}^* \wedge L_1^* \wedge L_1^*$ coinciden.

La Fórmula (3.3) indica que la diferencial de un elemento en $L_{k-1}^* \wedge (\bigoplus_{\substack{j \leq k-1 \\ j \neq 2}} L_j^* \,) \oplus \Lambda^2(L_{k-2}^* \oplus \cdots \oplus L_1^*)$ tiene componente nula en $L_{k-1}^* \wedge L_1^* \wedge L_1^*$. En particular, $d\tilde{\omega}_1$ tiene componente nula en $L_{k-1}^* \wedge L_1^* \wedge L_1^*$ en virtud de (3.7). Por lo tanto, la componente de $d\sigma$ en ese subespacio coincide con la de $-d\tilde{\omega}_1$.

Descomposición 2. Escribimos $\tilde{\omega} = \omega_2 + \tilde{\omega}_2$ con

$$\omega_2 \in L_{k-1}^* \wedge L_2^* \oplus L_3^* \wedge L_{k-2}^*, \quad \text{y} \quad \tilde{\omega}_2 \in L_{k-1}^* \wedge \Big(\bigoplus_{\substack{j \leq k-1 \\ j \neq 2}} L_j^* \Big) \oplus L_{k-2}^* \wedge \Big(\bigoplus_{\substack{j \leq k-1 \\ j \neq 3}} L_j^* \Big) \oplus \Lambda^2(L_{k-3}^* \oplus \cdots \oplus L_1^*).$$

Entonces

$$d\omega_2 \in L_{k-1}^* \wedge L_1^* \wedge L_1^* \;\oplus\; L_{k-2}^* \wedge L_2^* \wedge L_1^*$$

y la componente de $d\tilde{\omega}_2$ es nula en ese espacio. Luego las componentes de $d\sigma$ y de $-d\omega_2$ en $L_{k-1}^* \wedge L_1^* \wedge L_1^* \;\oplus\; L_{k-2}^* \wedge L_2^* \wedge L_1^*$ coinciden.

Descomposición 3. Escribimos $\tilde{\omega} = \omega_3 + \tilde{\omega}_3$ con

$$\omega_3 \in L_2^* \wedge L_{k-1}^* \oplus L_3^* \wedge L_{k-2}^* \oplus L_4^* \wedge L_{k-3} \qquad \text{y}$$

$$\tilde{\omega}_3 \in L_{k-1}^* \wedge \Big(\bigoplus_{\substack{j \le k-1 \\ j \neq 2}} L_j^*\Big) \oplus L_{k-2}^* \wedge \Big(\bigoplus_{\substack{j \le k-1 \\ j \neq 3}} L_j^*\Big) \oplus L_{k-3}^* \wedge \Big(\bigoplus_{\substack{j \le k-3 \\ j \neq 4}} L_k^*\Big) \oplus \Lambda^2(L_{k-4}^* \oplus \cdots \oplus L_1^*).$$

Es fácil ver que $d\tilde{\omega}_3$ no tiene componentes en $L_{k-1}^* \wedge L_1^* \wedge L_1^* \;\oplus\; L_{k-2}^* \wedge L_2^* \wedge L_1^* \oplus L_{k-3}^* \wedge L_3^* \wedge L_1^*$. Por lo tanto la componente en ese espacio de $d\tilde{\omega}$ es la de $d\omega_3$.

Concluimos como en los otros casos que si ω es una 2-forma cerrada que se escribe como $\sigma + \omega$ donde $\sigma \in V_1 \wedge (\mathfrak{n}^{k-1})^*$ y $\omega \in \Lambda^2 V_{k-1}$, entonces las componentes en $L_{k-1}^* \wedge L_1^* \wedge L_1^* \;\oplus\; L_{k-2}^* \wedge L_2^* \wedge L_1^* \oplus L_{k-3}^* \wedge L_3^* \wedge L_1^*$ de $d\sigma$ y de $d\omega_3$ coinciden.

El objetivo de las comparaciones hechas es describir características de una 2-forma cerrada ω en $\mathfrak{n}$ con respecto a la descomposición como $\sigma + \tilde{\omega}$ antes considerada.

En algunas álgebras de Lie simples complejas se tiene $\dim L_{k-1} = 1$, mientras que en otras $\dim L_{k-1} = 2$. Por estas y otras diferencias necesitaremos trabajar de manera diferente cada familia de álgebras de Lie simples. Recordemos la clasificación de las álgebras de Lie simples complejas (ver por ejemplo [34, 44]).

Teorema 3.2.2. *Un álgebra de Lie simple compleja es isomorfa a una y sólo una de las siguientes álgebras de Lie:*

$$\begin{array}{llllll} A_n = \mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{C}),\ n \ge 1, & C_n = \mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C}),\ n \ge 3, & \mathfrak{e}_6, & \mathfrak{e}_8, & \\ & & & & \mathfrak{g}_2. \\ B_n = \mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{C}),\ n \ge 2, & D_n = \mathfrak{so}(2n,\mathbb{C}),\ n \ge 4, & \mathfrak{e}_7 & \mathfrak{f}_4, & \end{array}$$

Como mencionamos anteriormente, trabajaremos sólo con las álgebras de Lie clásicas simples, es decir en las familias A, B, C y D. Probamos el siguiente teorema sobre los términos $E_\infty^{0,2}$ de los nilradicales de las álgebras de Borel de cada una en la familia.

Teorema 3.2.3. *Sea $\mathfrak{n}_n$ el nilradical de la subálgebra de Borel correspondiente al álgebra de Lie clásica simple $\mathfrak{g}_n$. Entonces*

1. *si $\mathfrak{g}_n$ es de tipo A se tiene $E_\infty^{0,2}(\mathfrak{n}_n) = 0$ para todo $n \ge 2$,*

2. *si $\mathfrak{g}_n$ es de tipo B se tiene $E_\infty^{0,2}(\mathfrak{n}_n) = 0$ para todo $n \ge 5$,*

3. *si $\mathfrak{g}_n$ es de tipo C se tiene $E_\infty^{0,2}(\mathfrak{n}_n) = 0$ para todo $n \ge 4$,*

4. si $\mathfrak{g}_n$ es de tipo D se tiene $E_\infty^{0,2}(\mathfrak{n}_n) = 0$ para todo $n \geq 6$

Separamos la prueba del teorema por familias. En cada caso, explicitaremos el sistema de raíces correspondiente, las raíces simples, la raíz máxima y el grado de nilpotencia entre otros datos. Para estos utilizamos la notación dada en el libro de Helgason [34]. El orden que serán expuestos no es justamente el lexicográfico sino en orden creciente de dificultad: A, C, B, D.

Álgebras de tipo A:

La familia $A_n = \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$, $n \geq 1$ fue estudiada en el Ejemplo 1.3.13. El álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{n}_n$ asociada es el álgebra de Lie $\mathfrak{t}(n+1, \mathbb{R})$ de matrices triangulares superiores estrictas a coeficientes reales de tamaño $(n+1) \times (n+1)$; $\dim \mathfrak{n}_n = n(n+1)/2$. Consideramos la determinada subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ para la cual las raíces positivas son $e_i \pm e_j$ para $1 \leq i < j \leq n+1$. Las n raíces simples son $\triangle_0 = \{\alpha_i = e_i - e_{i+1} : i = 1, \ldots, n\}$.

La raíz máxima escrita como suma de raíces simples es $\alpha_{\text{máx}} = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ y por lo tanto el índice de nilpotencia de $\mathfrak{n}_n$ es $k = n$. Las raíces de longitud $k-1$ son $\delta_1 = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i$ y $\delta_2 = \sum_{i=2}^n \alpha_i$, es decir, $\dim L_{k-1} = 2$.

Prueba del Teorema 3.2.3, *punto 1.* Si $n = 2$, el álgebra de Lie $\mathfrak{n}_n$ es isomorfa al álgebra de Heisenberg $\mathfrak{h}_1$ y vimos en el capítulo anterior que $E_\infty^{0,2}(\mathfrak{h}_1) = 0$. En el caso que $n = 3$, el álgebra de matrices 4×4 triangulares superiores estrictas tiene dimensión 6. La cohomología intermedia de $\mathfrak{n}_3$ fue calculada y se presenta en la Sección 2.4, Capítulo 2, correspondiendo a la tabla número 16. Ahí puede verse que $E_\infty^{0,2}(\mathfrak{n}_3) = 0$

Suponemos que $n \geq 4$. Para estos casos, trabajamos con el análisis de formas cerradas en $\mathfrak{n}_n$ realizado anteriormente en esta sección. Una forma cerrada en $\Lambda^2 \mathfrak{n}_n^*$ se escribe $\omega = \sigma + \tilde{\omega}$ con $\sigma \in L_k^* \otimes L_1^*$ y $\tilde{\omega} \in \Lambda^2 V_{k-1}$. Luego $\sigma = \gamma_{\alpha_{\text{máx}}} \wedge \eta$ donde $\eta = \sum_{i=1}^n r_i \gamma_{\alpha_i}$ con $r_i \in \mathbb{R}$ $i = 1, \ldots, n$.

Observemos que para las raíces de longitud $k-1$ se tiene que $\delta_1 + \alpha_n = \delta_2 + \alpha_1 = \alpha_{\text{máx}}$, por lo tanto $d\gamma_{\alpha_{\text{máx}}} = a_1 \gamma_{\delta_1} \wedge \gamma_{\alpha_n} + a_2 \gamma_{\delta_2} \wedge \gamma_{\alpha_1} + \tau$ con $\tau \in \Lambda^2 V_{k-2} = \Lambda^2(L_{k-2}^* \oplus \cdots \oplus L_1^*)$ y $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ ambos no nulos. Dado que $d\sigma = d\gamma_{\alpha_{\text{máx}}} \wedge \eta$ su componente en $L_{k-1}^* \wedge L_1^* \wedge L_1^*$ es

$$\sum_{i=1}^n a_1 r_i \, \gamma_{\delta_1} \wedge \gamma_{\alpha_n} \wedge \gamma_{\alpha_i} + \sum_{i=1}^n a_2 r_i \, \gamma_{\delta_2} \wedge \gamma_{\alpha_1} \wedge \gamma_{\alpha_i} \tag{3.9}$$

Por otro lado, de acuerdo con la Descomposición 1 detallada arriba, escribimos $\tilde{\omega} = \omega_1 + \tilde{\omega}_1$ con $\omega_1 \in L_{k-1}^* \wedge L_2^*$ y $\tilde{\omega}_1 \in L_{k-1}^* \wedge (L_{k-1}^* \oplus \cdots \oplus L_3^* \oplus L_1^*)$. Vamos a utilizar los razonamientos de comparación hechos anteriormente. Como $n \geq 4$ resulta $L_{k-1}^* \neq L_2^*$. De acuerdo al sistema de raíces de A_n, las raíces de longitud 2 son $\{\alpha_i + \alpha_{i+1} : i = 1, \ldots, n-1\}$. Por esto, el espacio $L_{k-1}^* \wedge L_2^*$ tiene como base $\{\gamma_{\delta_1} \wedge \gamma_{\alpha_i + \alpha_{i+1}}, \gamma_{\delta_2} \wedge \gamma_{\alpha_i + \alpha_{i+1}} : i = 1, \ldots, n-1\}$, entonces

$$\omega_1 = \sum_{i=1}^{n-1} b_i \, \gamma_{\delta_1} \wedge \gamma_{\alpha_i + \alpha_{i+1}} + \sum_{i=1}^{n-1} c_i \, \gamma_{\delta_2} \wedge \gamma_{\alpha_i + \alpha_{i+1}}, \qquad \text{donde } b_i \, c_i \in \mathbb{R}, \ \forall i.$$

Por el Corolario 1.3.14 la diferencial de $\gamma_{\alpha_i+\alpha_{i+1}}$ es $\xi_i\gamma_{\alpha_i}\wedge\gamma_{\alpha_{i+1}}$ donde $\xi_i\neq 0$, para todo $i=1,\ldots,n-1$. Luego

$$\begin{aligned}-d\omega_1 &= \sum_{i=1}^{n-1} b_i\xi_i\gamma_{\delta_1}\wedge\gamma_{\alpha_i}\wedge\gamma_{\alpha_{i+1}}+\sum_{i=1}^{n-1} c_i\xi_i\gamma_{\delta_2}\wedge\gamma_{\alpha_i}\wedge\gamma_{\alpha_{i+1}}\\ &\quad -\sum_{i=1}^{n} b_i d\gamma_{\delta_1}\wedge\gamma_{\alpha_i+\alpha_{i+1}}-\sum_{i=1}^{n} c_i d\gamma_{\delta_2}\wedge\gamma_{\alpha_i+\alpha_{i+1}}.\end{aligned}$$

Como $\gamma_{\delta_i}\in L_{k-1}^*\subseteq V_{k-1}$, $d\gamma_{\delta_i}\in\Lambda^2V_{k-2}$ para $i=1,2$. Entonces, la componente de $-d\omega_1$ en $L_{k-1}^*\wedge L_1^*\wedge L_1^*$ es

$$\sum_{i=1}^{n-1} b_i\xi_i\gamma_{\delta_1}\wedge\gamma_{\alpha_i}\wedge\gamma_{\alpha_{i+1}}+\sum_{i=1}^{n-1} c_i\xi_i\gamma_{\delta_2}\wedge\gamma_{\alpha_i}\wedge\gamma_{\alpha_{i+1}}. \tag{3.10}$$

Igualando las componentes de $d\sigma$ y $-d\omega_1$ vistas en (3.9) y (3.10) tenemos

$$\sum_{i=1}^{n-1} b_i\xi_i\gamma_{\delta_1}\wedge\gamma_{\alpha_i}\wedge\gamma_{\alpha_{i+1}}+\sum_{i=1}^{n-1} c_i\xi_i\gamma_{\delta_2}\wedge\gamma_{\alpha_i}\wedge\gamma_{\alpha_{i+1}}=\sum_{i=1}^{n-1} a_1r_i\gamma_{\delta_1}\wedge\gamma_{\alpha_n}\wedge\alpha_i+\sum_{i=2}^{n} a_2r_i\gamma_{\delta_2}\wedge\gamma_{\alpha_1}\wedge\gamma_{\alpha_i}.$$

Observemos que, por ejemplo, el término $\gamma_{\delta_1}\wedge\gamma_{\alpha_n}\wedge\gamma_{\alpha_1}$ aparece en el lado derecho de la igualdad con coeficiente a_1r_1. Por el contrario, éste término no aparece del lado izquierdo. Esto implica que, como $a_1\neq 0$, $r_1=0$. De la misma manera para los términos $\gamma_{\delta_1}\wedge\gamma_{\alpha_n}\wedge\gamma_{\alpha_i}$, con $i=1,\ldots,n-2$ resulta $r_i=0$. Con un razonamiento análogo para los elementos $\gamma_{\delta_2}\wedge\gamma_{\alpha_1}\wedge\gamma_{\alpha_n}$ y $\gamma_{\delta_2}\wedge\gamma_{\alpha_1}\wedge\gamma_{\alpha_{n-1}}$, deducimos $r_{n-1}=0=r_n$ y por lo tanto $\eta=0$

Esto implica que, si $\omega=\sigma+\tilde\omega$ es cerrada, entonces $\sigma=0$. Entonces toda 2-forma cerrada tiene componente nula en $V_1\wedge(\mathfrak{n}^{k-1})^*$ y por lo tanto está contenida en Λ^2V_{k-1}. Observamos en 3.1.4 que esto implica $E_\infty^{0,2}(\mathfrak{n}_n)=0$. ∎

Álgebras de tipo C:

Para cada $n\geq 3$, $C_n=\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C})$. Sea la subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ asociado al conjunto de raíces positivas $\triangle^+=\{e_i\pm e_j : 1\leq i<j\leq n,\, 2e_i,\, i=1,\ldots,n\}$.

En particular, el subconjunto de raíces simples es $\triangle_0=\{\alpha_i:=e_i-e_{i+1} : i=1,\ldots,n-1,\alpha_n:=2e_n\}$. La raíz máxima escrita como suma de raíces simples es $\alpha_{\text{máx}}=\sum_{i=1}^{n-1}2\alpha_i+\alpha_n$ y por lo tanto el índice de nilpotencia de $\mathfrak{n}_n$ es $k=2n-1$. A diferencia del caso anterior, $\dim L_{k-1}=1$ y la raíz de longitud $k-1$ es $\delta=\alpha_1+\sum_{i=2}^{n-1}2\alpha_i+\alpha_n$.

Prueba del Teorema 3.2.3, *punto 3.* Sea $\omega\in\Lambda^2\mathfrak{n}_n^*$ cerrada y no degenerada, entonces $\omega=\sigma+\tilde\omega$ con $\sigma\in L_k^*\otimes L_1^*$ y $\tilde\omega\in\Lambda^2V_{k-1}$, es decir $\sigma=\gamma_{\alpha_{\text{máx}}}\wedge\eta$ donde η es combinación lineal de las 1-formas correspondientes a las raíces simples, γ_{α_i}, $i=1,\ldots,n$.

En este caso, $\alpha_{\text{máx}}=\delta+\alpha_1$, donde δ es la raíz de longitud $k-1$. Las raíces de longitud $k-2$ son $\rho=\alpha_1+\alpha_2+\sum_{i=3}^{n-1}2\alpha_i+\alpha_n$ y $\rho'=\sum_{i=2}^{n-1}2\alpha_i+\alpha_n$.

La diferencial de $\gamma_{\alpha_{\text{máx}}}$ es

$$d\gamma_{\alpha_{\text{máx}}} = a_1\gamma_{\alpha_1} \wedge \gamma_\delta + a_2\gamma_{\alpha_1+\alpha_2} \wedge \gamma_\rho + \tau, \qquad a_1 \neq 0, a_2 \neq 0,\ \tau \in \Lambda^2 V_{k-3}, \tag{3.11}$$

en efecto, $\alpha_{\text{máx}} = \delta + \alpha_1$ y además, la única manera de escribir la raíz máxima como suma de una de longitud $k-2$ y una raíz de longitud 2 es $\alpha_{\text{máx}} = \rho + \alpha_1 + \alpha_2$ (notar que $\alpha_1 + \alpha_2 \in \triangle^+$), dado que para ρ' no existe $\beta \in \triangle^+$ tal que $\beta + \rho' = \alpha_{\text{máx}}$.

De (3.11), $d\sigma = d\gamma_{\alpha_{max}} \wedge \eta$ es

$$d\sigma = a_1\gamma_{\alpha_1} \wedge \gamma_\delta \wedge \eta + a_2\gamma_{\alpha_1+\alpha_2} \wedge \gamma_\rho \wedge \eta + \tau \wedge \eta, \text{ siendo } \tau \wedge \eta \in \Lambda^3 V_{k-3} \text{ y}$$

y su componente en $L^*_{k-1} \wedge L^*_1 \wedge L^*_1 \oplus L^*_{k-2} \wedge L^*_2 \wedge L^*_1$ es

$$a_1\gamma_{\alpha_1} \wedge \gamma_\delta \wedge \eta + a_2\gamma_{\alpha_1+\alpha_2} \wedge \gamma_\rho \wedge \eta. \tag{3.12}$$

Conforme con la Descomposición 2 arriba estudiada, escribimos $\tilde{\omega} = \omega_1 + \tilde{\omega}_1$ donde $\omega_1 \in L^*_{k-1} \wedge L^*_2 \oplus L^*_3 \wedge L^*_{k-2}$ y $\tilde{\omega}_1 \in L^*_{k-1} \wedge \bigoplus\{L^*_i : i \neq 2,\ i \leq k-1\} \oplus L^*_{k-2} \wedge \bigoplus\{L^*_i : i \neq 3,\ i \leq k-1\} \oplus \Lambda^2 V_{k-3}$.

Las raíces de longitud dos son $\alpha_i + \alpha_{i+1}$, $i = 1, \ldots, n-1$, por lo tanto una base de $L^*_{k-1} \wedge L^*_2$ es $\{\gamma_{\alpha_i+\alpha_{i+1}} \wedge \gamma_\delta,\ i = 1, \ldots, n-1\}$. Por otro lado, las raíces de longitud tres son $\alpha_i + \alpha_{i+1} + \alpha_{i+2}$, $i = 1, \ldots, n-2$ y $2\alpha_{n-1} + \alpha_n$. Dado que $n \geq 4$ resulta $3 \neq k-2$ y por lo tanto $L^*_3 \wedge L^*_{k-2}$ está generado por $\{\gamma_{\alpha_i+\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}} \wedge \gamma_\rho, \gamma_{\alpha_i+\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}} \wedge \gamma_{\rho'} : i = 1, \ldots, n-2,\ \gamma_{2\alpha_{n-1}+\alpha_n} \wedge \gamma_\rho, \gamma_{2\alpha_{n-1}+\alpha_n} \wedge \gamma_{\rho'}\}$. Entonces ω_1 se escribe como

$$\begin{aligned}\omega_1 \;=\; & \sum_{i=1}^{n-1} c_i\gamma_{\alpha_i+\alpha_{i+1}} \wedge \gamma_\delta + \sum_{i=1}^{n-2} d_i\gamma_{\alpha_i+\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}} \wedge \gamma_\rho + d_{n-1}\gamma_{2\alpha_{n-1}+\alpha_n} \wedge \gamma_\rho \\ & + \sum_{i=1}^{n-2} e_i\gamma_{\alpha_i+\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}} \wedge \gamma_{\rho'} + e_{n-1}\gamma_{2\alpha_{n-1}+\alpha_n} \wedge \gamma_{\rho'}, \quad c_i, d_i, e_i \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

De (3.3),

$$\begin{aligned} d\gamma_{\alpha_i+\alpha_{i+1}} &= \xi_i\gamma_{\alpha_i} \wedge \gamma_{\alpha_{i+1}}, \\ d\gamma_{\alpha_i+\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}} &= s_i^1\gamma_{\alpha_i+\alpha_{i+1}} \wedge \gamma_{\alpha_{i+2}} + s_i^2\gamma_{\alpha_i} \wedge \gamma_{\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}} \\ d\gamma_{2\alpha_{n-1}+\alpha_n} &= s_{n-1}\gamma_{\alpha_n-1} \wedge \gamma_{\alpha_{n-1}+\alpha_n}, \end{aligned}$$

con ξ_i, s_i^1, s_i^2, s_{n-1} todos no nulos.

Con esto, calculamos la diferencial de ω_1:

$$\begin{aligned} d\omega_1 \;=\; & \sum_{i=1}^{n-1} c_i\xi_i\gamma_{\alpha_i} \wedge \gamma_{\alpha_{i+1}} \wedge \gamma_\delta - \sum_{i=1}^{n-1} c_i\gamma_{\alpha_i+\alpha_{i+1}} \wedge d\gamma_\delta \\ + & \sum_{i=1}^{n-2} d_i(s_i^1\gamma_{\alpha_i+\alpha_{i+1}} \wedge \gamma_{\alpha_{i+2}} + s_i^2\gamma_{\alpha_i} \wedge \gamma_{\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}}) \wedge \gamma_\rho \\ - & \sum_{i=1}^{n-2} d_i\gamma_{\alpha_i+\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}} \wedge d\gamma_\rho + d_{n-1}s_{n-1}\gamma_{\alpha_{n-1}} \wedge \gamma_{\alpha_{n-1}+\alpha_n} \wedge \gamma_\rho - d_{n-1}\gamma_{2\alpha_{n-1}+\alpha_n} \wedge d\gamma_\rho + \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
- & \sum_{i=1}^{n-2} e_i \gamma_{\alpha_i+\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}} \wedge d\gamma_{\rho'} + \sum_{i=1}^{n-2} e_i (s_i^1 \gamma_{\alpha_i+\alpha_{i+1}} \wedge \gamma_{\alpha_{i+2}} + s_i^2 \gamma_{\alpha_i} \wedge \gamma_{\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}}) \wedge \gamma_{\rho'} \\
- & e_{n-1} s_{n-1} \gamma_{\alpha_{n-1}} \wedge \gamma_{\alpha_{n-1}+\alpha_n} \wedge \gamma_{\rho'} - e_{n-1} \gamma_{2\alpha_{n-1}+\alpha_n} \wedge d\gamma_{\rho'}.
\end{aligned}
$$

Dado que $\ell(\rho) = \ell(\rho') = k-2$, $d\gamma_\rho$, $d\gamma_{\rho'} \in \Lambda^2 V_{k-3}$. Además, como $\delta = \alpha_2 + \rho = \alpha_1 + \rho'$,

$$
d\gamma_\delta \;=\; b_1 \gamma_{\alpha_2} \wedge \gamma_\rho + b_2 \gamma_{\alpha_1} \wedge \gamma_{\rho'} + \tau', \qquad b_1 \neq 0, b_2 \neq 0,\ \tau' \in \Lambda^2 V_{k-3}.
$$

Entonces, la componente de $d\omega_1$ en $L_{k-1}^* \wedge L_1^* \wedge L_1^* \oplus L_{k-2}^* \wedge L_2^* \wedge L_1^*$ es

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{n-1} c_i \xi_i \gamma_{\alpha_i} \wedge \gamma_{\alpha_{i+1}} \wedge \gamma_\delta - \sum_{i=1}^{n-1} c_i \gamma_{\alpha_i+\alpha_{i+1}} \wedge (b_1 \gamma_{\alpha_2} \wedge \gamma_\rho + b_2 \gamma_{\alpha_1} \wedge \gamma_{\rho'}) + \\
& \quad + \sum_{i=1}^{n-2} d_i (s_i^1 \gamma_{\alpha_i+\alpha_{i+1}} \wedge \gamma_{\alpha_{i+2}} + s_i^2 \gamma_{\alpha_i} \wedge \gamma_{\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}}) \wedge \gamma_\rho + d_{n-1} s_{n-1} \gamma_{\alpha_{n-1}} \wedge \gamma_{\alpha_{n-1}+\alpha_n} \wedge \gamma_\rho + \\
& \quad + \sum_{i=1}^{n-2} e_i (s_i^1 \gamma_{\alpha_i+\alpha_{i+1}} \wedge \gamma_{\alpha_{i+2}} + s_i^2 \gamma_{\alpha_i} \wedge \gamma_{\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}}) \wedge \gamma_{\rho'} - e_{n-1} s_{n-1} \gamma_{\alpha_{n-1}} \wedge \gamma_{\alpha_{n-1}+\alpha_n} \wedge \gamma_{\rho'}.
\end{aligned} \tag{3.13}
$$

Por el análisis sobre formas cerradas hecho en la sección anterior, las componentes de $d\sigma$ y $-d\tilde{\omega}_1$ expresadas en las ecuaciones (3.12) y (3.13) respectivamente, coinciden. En este sentido, observemos que el elemento $\gamma_{\rho'}$ presente en (3.13) no aparece en la ecuación (3.12), luego los coeficientes c_i, e_j son cero para todo $i = 1, \ldots, n-1$ y $j = 1, \ldots, n-2$ ya que $S_i^2 \neq 2$ y $b_2 \neq 0$.

Esto simplifica (3.13) de la siguiente manera:

$$
\sum_{i=1}^{n-2} d_i (s_1^i \gamma_{\alpha_i+\alpha_{i+1}} \wedge \gamma_{\alpha_{i+2}} + s_2^i \gamma_{\alpha_i} \wedge \gamma_{\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}}) \wedge \gamma_\rho + d_{n-1} s_{n-1} \gamma_{\alpha_{n-1}} \wedge \gamma_{\alpha_{n-1}+\alpha_n} \wedge \gamma_\rho. \tag{3.14}
$$

Notemos que la 3-forma de la ecuación anterior pertenece al subespacio $L_{k-2}^* \wedge L_2^* \wedge L_1^*$, sin embargo, en (3.12) aparece el término $a_1 \gamma_{\alpha_1} \wedge \gamma_\delta \wedge (\sum_{i=1}^n r_i \gamma_{\alpha_i})$ que se encuentra en el subespacio $L_{k-1}^* \wedge L_1^* \wedge L_1^*$. De la igualdad entre las dos ecuaciones, debe ser $r_i = 0\ \forall i = 2, \ldots, n$. Comparando las formas que acompañan a γ_ρ, resulta $r_1 = 0$. Luego $\eta = 0$.

Es decir, probamos que al escribir una 2-forma cerrada ω como $\omega = \sigma + \tilde{\omega}$, con $\sigma \in V_1 \wedge (\mathfrak{n}_n^{k-1})^*$ y $\tilde{\omega} \in \Lambda^2 V_{k-1}$, se tiene $\sigma = 0$. En otras palabras, toda 2-forma cerrada en $\mathfrak{n}_n$ pertenece a $\omega \in \Lambda^2 V_{k-1}$, lo cual implica $E_\infty^{0,2}(\mathfrak{n}_n) = 0$ como queríamos demostrar. ∎

Álgebras de tipo B:

Para cada $n \geq 2$, $B_n = \mathfrak{so}(2n+1, \mathbb{C})$. Tomamos $\mathfrak{h}$ la subálgebra de Cartan asociada al sistema de raíces positivas $\triangle^+ = \{e_i \pm e_j : 1 \leq i < j \leq n,\ e_i,\ i = 1, \ldots, n\}$. Luego $\dim \mathfrak{n}_n = n^2$.

El subconjunto de raíces simples es $\triangle_0 = \{\alpha_i := e_i - e_{i+1} : i = 1, \ldots, n-1, \alpha_n := e_n\}$. La raíz máxima $\alpha_{\text{máx}}$ es $e_1 + e_2$ y como combinación de raíces simples $\alpha_{\text{máx}} = \alpha_1 + 2\sum_{i=2}^n \alpha_i$. Luego el índice de nilpotencia de $\mathfrak{n}_n$ es $k = 2n-1$. Nuevamente tenemos $\dim L_{k-1} = 1$ y la raíz de longitud $k-1$ es $\delta = \alpha_1 + \alpha_2 + \sum_{i=2}^{n-1} 2\alpha_i$.

Prueba del Teorema 3.2.3, *punto 2.* Sea $\omega \in \Lambda^2\mathfrak{n}_n^*$ cerrada y no degenerada. Entonces $\omega = \sigma + \tilde{\omega}$ con $\sigma \in L_k^* \otimes L_1^*$ y $\tilde{\omega} \in \Lambda^2 V_{k-1}$, es decir $\sigma = \gamma_{\alpha_{\text{máx}}} \wedge \eta$ donde η es combinación lineal de las 1-formas correspondientes a las raíces simples, γ_{α_i}, $i = 1, \ldots, n$.

Hay dos raíces de longitud $k-2$ y son $\rho = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \sum_{i=4}^n 2\alpha_i$ y $\rho' = \alpha_2 + \sum_{i=3}^n 2\alpha_i$. Las raíces de longitud $k-3$ son $\theta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + 2\sum_{i=5}^n \alpha_i$, $\theta' = \alpha_2 + \alpha_3 + 2\sum_{i=4}^n \alpha_i$.

Observemos que $\alpha_{\text{máx}} = \delta + \alpha_2$, $\alpha_{\text{máx}} = \rho + (\alpha_2 + \alpha_3) = \rho' + (\alpha_1 + \alpha_2)$ y $\alpha_{\text{máx}} = \theta + (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) = \theta' + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$. Entonces, la diferencial de $\gamma_{\alpha_{\text{máx}}}$ es

$$\begin{aligned} d\gamma_{\alpha_{\text{máx}}} &= a_1\, \gamma_{\alpha_2} \wedge \gamma_\delta + a_2\, \gamma_{\alpha_2+\alpha_3} \wedge \gamma_\rho + a_3\, \gamma_{\alpha_1+\alpha_2} \wedge \gamma_{\rho'} \\ &\quad + a_4\, \gamma_{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4} \wedge \gamma_\theta + a_5\, \gamma_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} \wedge \gamma_{\theta'} + \tau, \qquad a_i \neq 0,\ \forall i,\ \tau \in \Lambda^2 V_{k-4}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Luego, $d\sigma = d\gamma_{\alpha_{max}} \wedge \eta$ es

$$\begin{aligned} d\sigma &= a_1\, \gamma_{\alpha_2} \wedge \gamma_\delta \wedge \eta + a_2\, \gamma_{\alpha_2+\alpha_3} \wedge \gamma_\rho \wedge \eta + a_3\, \gamma_{\alpha_1+\alpha_2} \wedge \gamma_{\rho'} \wedge \eta \\ &\quad + a_4\, \gamma_{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4} \wedge \gamma_\theta \wedge \eta + a_5\, \gamma_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} \wedge \gamma_{\theta'} \wedge \eta + \tilde{\tau}, \qquad \tilde{\tau} \in \Lambda^2 V_{k-4}. \end{aligned}$$

La componente de $d\sigma$ en $L_{k-1}^* \wedge L_1^* \wedge L_1^* \;\oplus\; L_{k-2}^* \wedge L_2^* \wedge L_1^* \oplus L_{k-3}^* \wedge L_3^* \wedge L_1^*$ es

$$\begin{aligned} & a_1\, \gamma_{\alpha_2} \wedge \gamma_\delta \wedge \eta + a_2\, \gamma_{\alpha_2+\alpha_3} \wedge \gamma_\rho \wedge \eta + a_3\, \gamma_{\alpha_1+\alpha_2} \wedge \gamma_{\rho'} \wedge \eta \\ &\quad + a_4\, \gamma_{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4} \wedge \gamma_\theta \wedge \eta + a_5\, \gamma_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} \wedge \gamma_{\theta'} \wedge \eta. \end{aligned} \tag{3.16}$$

De la misma manera obtenemos las diferenciales de $\gamma_\delta, \gamma_\rho, \gamma_{\rho'}$:

$$\begin{aligned} d\gamma_\delta &= b_1\, \gamma_{\alpha_3} \wedge \gamma_\rho + b_2\, \gamma_{\alpha_1} \wedge \gamma_{\rho'} + b_3\, \gamma_\theta \wedge \gamma_{\alpha_3+\alpha_4} + \tau', \\ d\gamma_\rho &= \nu_1\, \gamma_{\alpha_1} \wedge \gamma_{\theta'} + \nu_2\, \gamma_{\alpha_4} \wedge \gamma_\theta + \tau'', \\ d\gamma_{\rho'} &= \mu_1\, \gamma_{\alpha_3} \wedge \gamma_{\theta'} + \tau''', \qquad \text{con } \tau', \tau'', \tau'' \in \Lambda^2 V_{k-4} \end{aligned} \tag{3.17}$$

La diferencia entre $d\gamma_\rho$ y $d\gamma_{\rho'}$ se da pues no hay raíz simple β tal que $\theta + \beta = \rho'$ mientras que $\rho = \theta + \alpha_4$.

Observamos que $\ell(\theta) = \ell(\theta') = k-3$, por lo tanto γ_θ y $\gamma_{\theta'}$ son elementos de V_{k-3} y $d\gamma_\theta$ y $d\gamma_{\theta'}$ pertenecen al subespacio $\Lambda^2 V_{k-4} = \Lambda^2(L_{k-4}^* \oplus \cdots \oplus L_1^*)$.

Utilizaremos la Descomposición 3 descripta al comienzo de la sección. Escribimos $\tilde{\omega} = \omega_3 + \tilde{\omega}_3$ con $\omega_3 \in L_2^* \wedge L_{k-1}^* \;\oplus\; L_3^* \wedge L_{k-2}^* \;\oplus\; L_4^* \wedge L_{k-3}^*$ y

$$\tilde{\omega}_3 \in L_{k-1}^* \wedge \Big(\bigoplus_{\substack{j \le k-1 \\ j \neq 2}} L_j^* \Big) \oplus L_{k-2}^* \wedge \Big(\bigoplus_{\substack{j \le k-1 \\ j \neq 3}} L_j^* \Big) \oplus L_{k-3}^* \wedge \Big(\bigoplus_{\substack{j \le k-3 \\ j \neq 4}} L_k^* \Big) \;\oplus\; \Lambda^2(L_{k-4}^* \oplus \cdots \oplus L_1^*).$$

Las raíces de longitud dos son $\alpha_i + \alpha_{i+1}$, $i = 1, \ldots, n-1$, por lo tanto una base de $L_{k-1}^* \wedge L_2^*$ es $\{\gamma_{\alpha_i+\alpha_{i+1}} \wedge \gamma_\delta,\ i = 1, \ldots, n-1\}$. Por otro lado, las raíces de longitud tres son $\alpha_i + \alpha_{i+1} + \alpha_{i+2}$, $i = 1, \ldots, n-2$ y $\alpha_{n-1} + 2\alpha_n$. Por lo tanto, $L_3^* \wedge L_{k-2}^*$ está generado por $\{\gamma_{\alpha_i+\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}} \wedge \gamma_\rho, \gamma_{\alpha_i+\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}} \wedge \gamma_{\rho'} : i = 1, \ldots, n-2,\ \gamma_{\alpha_{n-1}+2\alpha_n} \wedge \gamma_\rho, \gamma_{\alpha_{n-1}+2\alpha_n} \wedge \gamma_{\rho'}\}$. Finalmente las raíces de longitud cuatro son

$\alpha_i+\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}+\alpha_{i+3}$, $i=1,\dots,n-3$, y $\alpha_{n-2}+\alpha_{n-1}+2\alpha_n$. Como $n\geq 5$, $k-3\neq 4$ y $L^*_{k-3}\wedge L^*_4$ tiene una base de la forma $\{\gamma_{\alpha_i+\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}+\alpha_{i+3}}\wedge\gamma_\theta,\ \gamma_{\alpha_i+\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}+\alpha_{i+3}}\wedge\gamma_{\theta'},\ i=1,\dots,n-3,\ \gamma_{\alpha_{n-2}+\alpha_{n-1}+2\alpha_n}\wedge\gamma_\theta,\ \gamma_{\alpha_{n-2}+\alpha_{n-1}+2\alpha_n}\wedge\gamma_{\theta'}\}$.

Para facilitar los cálculos, escribimos $\omega_3\in L^*_2\wedge L^*_{k-1}\oplus L^*_3\wedge L^*_{k-2}\oplus L^*_4\wedge L_{k-3}$ como $\omega_3=\omega_3^a+\omega_3^b+\omega_3^c$ donde, para algunos coeficientes $c_i,d_i,e_if_i,g_i\in\mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
\omega_3^a &= \sum_{i=1}^{n-1} c_i\,\gamma_{\alpha_i+\alpha_{i+1}}\wedge\gamma_\delta \ \in\ L^*_{k-1}\wedge L^*_2,\\
\omega_3^b &= \sum_{i=1}^{n-2} d_i\,\gamma_{\alpha_i+\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}}\wedge\gamma_\rho + d_{n-1}\,\gamma_{\alpha_{n-1}+2\alpha_n}\wedge\gamma_\rho +\\
&\quad+\sum_{i=1}^{n-2} e_i\,\gamma_{\alpha_i+\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}}\wedge\gamma_{\rho'} + e_{n-1}\,\gamma_{\alpha_{n-1}+2\alpha_n}\wedge\gamma_{\rho'}\in\ L^*_3\wedge L^*_{k-2},\\
\omega_3^c &= \sum_{i=1}^{n-3} f_i\,\gamma_{\alpha_i+\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}+\alpha_{i+3}}\wedge\gamma_\theta + f_{n-2}\,\gamma_{\alpha_{n-2}+\alpha_{n-1}+2\alpha_n}\wedge\gamma_\theta +\\
&\quad+\sum_{i=1}^{n-3} g_i\,\gamma_{\alpha_i+\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}+\alpha_{i+3}}\wedge\gamma_{\theta'} + g_{n-2}\,\gamma_{\alpha_{n-2}+\alpha_{n-1}+2\alpha_n}\wedge\gamma_{\theta'}\ \in\ L^*_4\wedge L_{k-3}.
\end{aligned}
$$

Las diferenciales de los elementos de las bases de L^*_2, L^*_3 y L^*_4 son

$$
\begin{aligned}
d\gamma_{\alpha_i+\alpha_{i+1}} &= \xi_i\,\gamma_{\alpha_i}\wedge\gamma_{\alpha_{i+1}},\\
d\gamma_{\alpha_i+\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}} &= s_i^1\gamma_{\alpha_i+\alpha_{i+1}}\wedge\gamma_{\alpha_{i+2}}+s_i^2\gamma_{\alpha_i}\wedge\gamma_{\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}},\\
d\gamma_{\alpha_{n-1}+2\alpha_n} &= s_{n-1}\gamma_{\alpha_{n-1}+\alpha_n}\wedge\gamma_{\alpha_n},\\
d\gamma_{\alpha_i+\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}+\alpha_{i+3}} &= t_i^1\,\gamma_{\alpha_i}\wedge\gamma_{\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}+\alpha_{i+3}}+t_i^2\,\gamma_{\alpha_i+\alpha_{i+1}}\wedge\gamma_{\alpha_{i+2}+\alpha_{i+3}}+t_i^3\,\gamma_{\alpha_i+\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}}\wedge\gamma_{\alpha_{i+3}},\\
d\gamma_{\alpha_{n-2}+\alpha_{n-1}+2\alpha_n} &= t_{n-2}^1\,\gamma_{\alpha_{n-2}}\wedge\gamma_{\alpha_{n-1}+2\alpha_n}+t_{n-2}^2\,\gamma_{\alpha_{n-2}+\alpha_{n-1}+\alpha_n}\wedge\gamma_{\alpha_n},
\end{aligned}
$$

donde los coeficientes ξ_i, s_i^j, s_{n-1}, t_i^j, son todos no nulos.

Calculamos las diferenciales de ω_3^a, ω_3^b y ω_3^c haciendo uso de (3.17).

$$
\begin{aligned}
d\omega_3^a=\sum_{i=1}^{n-1} c_i\,d\gamma_{\alpha_i+\alpha_{i+1}}\wedge\gamma_\delta-\sum_{i=1}^{n-1} c_i\,\gamma_{\alpha_i+\alpha_{i+1}}\wedge d\gamma_\delta=\sum_{i=1}^{n-1} c_i\,\xi_i\,\gamma_{\alpha_i}\wedge\gamma_{\alpha_{i+1}}\wedge\gamma_\delta-\\
\sum_{i=1}^{n-1} c_i\,\gamma_{\alpha_i+\alpha_{i+1}}\wedge\left(b_1\,\gamma_{\alpha_3}\wedge\gamma_\rho+b_2\,\gamma_{\alpha_1}\wedge\gamma_{\rho'}+b_3\,\gamma_\theta\wedge\gamma_{\alpha_3+\alpha_4}+\tau'\right).
\end{aligned}
$$

Luego la componente en $L^*_{k-1}\wedge L^*_1\wedge L^*_1\ \oplus\ L^*_{k-2}\wedge L^*_2\wedge L^*_1\oplus L^*_{k-3}\wedge L^*_3\wedge L^*_1$ de $d\omega_3^a$ es

$$
\sum_{i=1}^{n-1} c_i\,\xi_i\,\gamma_{\alpha_i}\wedge\gamma_{\alpha_{i+1}}\wedge\gamma_\delta-\sum_{i=1}^{n-1} b_1\,c_i\,\gamma_{\alpha_i+\alpha_{i+1}}\wedge\gamma_{\alpha_3}\wedge\gamma_\rho+b_2\,c_i\,\gamma_{\alpha_i+\alpha_{i+1}}\wedge\gamma_{\alpha_1}\wedge\gamma_{\rho'},\tag{3.18}
$$

ya que $\tau'\in\Lambda^2V_{k-4}=\Lambda^2(L^*_{k-4}\oplus\cdots\oplus L^*_1)$ y $\gamma_{\alpha_i+\alpha_{i+1}}\wedge\gamma_\theta\wedge\gamma_{\alpha_3+\alpha_4}\in L^*_2\wedge L^*_2\wedge L^*_{k-3}$.

De la misma manera calculamos las diferenciales de ω_3^b y ω_3^c para llegar a sus componentes en el subespacio anterior.

Componente de $d\omega_3^b$ en $L_{k-1}^* \wedge L_1^* \wedge L_1^* \ \oplus \ L_{k-2}^* \wedge L_2^* \wedge L_1^* \oplus L_{k-3}^* \wedge L_3^* \wedge L_1^*$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n-2} \big(d_i s_i^1 \, \gamma_{\alpha_i+\alpha_{i+1}} \wedge \gamma_{\alpha_{i+2}} \wedge \gamma_\rho + s_i^2 d_i \, \gamma_{\alpha_i} \wedge \gamma_{\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}} \wedge \gamma_\rho\big) + d_{n-1}s_{n-1}\,\gamma_{\alpha_{n-1}+\alpha_n} \wedge \gamma_{\alpha_n} \wedge \gamma_\rho + \\
&-\sum_{i=1}^{n-2} \big(d_i \nu_1 \, \gamma_{\alpha_i+\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}} \wedge \gamma_{\alpha_1} \wedge \gamma_{\theta'} + d_i \nu_2 \, \gamma_{\alpha_i+\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}} \wedge \gamma_{\alpha_4} \wedge \gamma_\theta\big) - d_{n-1}\nu_1\,\gamma_{\alpha_{n-1}+2\alpha_n} \wedge \gamma_{\alpha_1} \wedge \gamma_{\theta'} + \\
&-\nu_2 d_{n-1}\gamma_{\alpha_{n-1}+2\alpha_n} \wedge \gamma_{\alpha_4} \wedge \gamma_\theta + \sum_{i=1}^{n-2} d_i s_i^1 \, \gamma_{\alpha_i+\alpha_{i+1}} \wedge \gamma_{\alpha_{i+2}} \wedge \gamma_{\rho'} + \sum_{i=1}^{n-2} d_i s_i^2 \, \gamma_{\alpha_i} \wedge \gamma_{\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}} \wedge \gamma_{\rho'} \qquad (3.19) \\
&d_{n-1}s_{n-1}\,\gamma_{\alpha_{n-1}+\alpha_n} \wedge \gamma_{\alpha_n} \wedge \gamma_{\rho'} - \sum_{i=1}^{n-2} d_i \mu_1 \, \gamma_{\alpha_i+\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}} \wedge \gamma_{\alpha_3} \wedge \gamma_{\theta'} - d_{n-1}\mu_1\,\gamma_{\alpha_{n-1}+2\alpha_n} \wedge \gamma_{\alpha_3} \wedge \gamma_{\theta'}.
\end{aligned}$$

Notemos que, de hecho, los elementos de (3.19) pertenecen al subespacio $L_{k-2}^* \wedge L_2^* \wedge L_1^* \oplus L_{k-3}^* \wedge L_3^* \wedge L_1^*$.

Componente de $d\omega_3^c$ en $L_{k-1}^* \wedge L_1^* \wedge L_1^* \ \oplus \ L_{k-2}^* \wedge L_2^* \wedge L_1^* \oplus L_{k-3}^* \wedge L_3^* \wedge L_1^*$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n-3} f_i \ \big(t_i^1 \, \gamma_{\alpha_i} \wedge \gamma_{\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}+\alpha_{i+3}} + t_i^3 \gamma_{\alpha_i+\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}} \wedge \gamma_{\alpha_{i+3}}\big) \wedge \gamma_\theta + f_{n-2}(t_{n-2}^1 \gamma_{\alpha_{n-2}} \wedge \gamma_{\alpha_{n-1}+2\alpha_n} + \\
&+t_{n-2}^2 \gamma_{\alpha_{n-2}+\alpha_{n-1}+\alpha_n} \wedge \gamma_{\alpha_n}) \wedge \gamma_\theta + \sum_{i=1}^{n-3} g_i \ \big(t_i^1 \, \gamma_{\alpha_i} \wedge \gamma_{\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}+\alpha_{i+3}} + t_i^3 \gamma_{\alpha_i+\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}} \wedge \gamma_{\alpha_{i+3}}\big) \wedge \gamma_{\theta'} \\
&+g_{n-2}(t_{n-2}^1 \gamma_{\alpha_{n-2}} \wedge \gamma_{\alpha_{n-1}+2\alpha_n} + t_{n-2}^2 \gamma_{\alpha_{n-2}+\alpha_{n-1}+\alpha_n} \wedge \gamma_{\alpha_n}) \wedge \gamma_{\theta'}. \qquad (3.20)
\end{aligned}$$

En este caso, los elementos de (3.20) pertenecen al subespacio $L_{k-3}^* \wedge L_3^* \wedge L_1^*$.

La componente de $-d\omega_3$ en $L_{k-1}^* \wedge L_1^* \wedge L_1^* \ \oplus \ L_{k-2}^* \wedge L_2^* \wedge L_1^* \oplus L_{k-3}^* \wedge L_3^* \wedge L_1^*$ se conforma de la suma de las componentes (3.18), (3.19) y (3.20) y a su vez, ésta coincide con la componente de $d\sigma$ en el mismo subespacio, escrita en (3.16).

La parte en $L_{k-1}^* \wedge L_1^* \wedge L_1^*$ de (3.16) y de $-d\omega_3$ coinciden, es decir

$$\sum_{i=1}^{n} a_1 \, r_i \, \gamma_{\alpha_2} \wedge \gamma_\delta \wedge \gamma_{\alpha_i} = \sum_{i=1}^{n-1} c_i \, \xi_i \, \gamma_{\alpha_i} \wedge \gamma_{\alpha_{i+1}} \wedge \gamma_\delta.$$

Esta ecuación implica que $r_i = 0$ para todo $4 \leq i \leq n$.

Tomando esta consecuencia, miramos la parte en $L_{k-3}^* \wedge L_3^* \wedge L_1^*$ de (3.16) y de $-d\omega_3$ que deben coincidir y esa igualdad es

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{3} \eta_i \, (a_4 \, \gamma_{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4} \wedge \gamma_\theta + a_5 \, \gamma_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} \wedge \gamma_{\theta'}) \wedge \gamma_{\alpha_i} = \\
&\sum_{i=1}^{n-3} f_i \ \big(t_i^1 \, \gamma_{\alpha_i} \wedge \gamma_{\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}+\alpha_{i+3}} + t_i^3 \gamma_{\alpha_i+\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}} \wedge \gamma_{\alpha_{i+3}}\big) \wedge \gamma_\theta + f_{n-2}(t_{n-2}^1 \gamma_{\alpha_{n-2}} \wedge \gamma_{\alpha_{n-1}+2\alpha_n} + \\
&+t_{n-2}^2 \gamma_{\alpha_{n-2}+\alpha_{n-1}+\alpha_n} \wedge \gamma_{\alpha_n}) \wedge \gamma_\theta + \sum_{i=1}^{n-3} g_i \ \big(t_i^1 \, \gamma_{\alpha_i} \wedge \gamma_{\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}+\alpha_{i+3}} + t_i^3 \gamma_{\alpha_i+\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}} \wedge \gamma_{\alpha_{i+3}}\big) \wedge \gamma_{\theta'} \\
&+g_{n-2}(t_{n-2}^1 \gamma_{\alpha_{n-2}} \wedge \gamma_{\alpha_{n-1}+2\alpha_n} + t_{n-2}^2 \gamma_{\alpha_{n-2}+\alpha_{n-1}+\alpha_n} \wedge \gamma_{\alpha_n}) \wedge \gamma_{\theta'} \qquad (3.21)
\end{aligned}$$

$$-\sum_{i=1}^{n-2}\big(d_i\nu_1\,\gamma_{\alpha_i+\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}}\wedge\gamma_{\alpha_1}\wedge\gamma_{\theta'}+d_i\nu_2\,\gamma_{\alpha_i+\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}}\wedge\gamma_{\alpha_4}\wedge\gamma_{\theta}\big)-d_{n-1}\nu_1\,\gamma_{\alpha_{n-1}+2\alpha_n}\wedge\gamma_{\alpha_1}\wedge\gamma_{\theta'}+$$

$$-\nu_2 d_{n-1}\gamma_{\alpha_{n-1}+2\alpha_n}\wedge\gamma_{\alpha_4}\wedge\gamma_\theta+\sum_{i=1}^{n-2}d_i\mu_1\,\gamma_{\alpha_i+\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}}\wedge\gamma_{\alpha_3}\wedge\gamma_{\theta'}-d_{n-1}\mu_1\,\gamma_{\alpha_{n-1}+2\alpha_n}\wedge\gamma_{\alpha_3}\wedge\gamma_{\theta'}$$

Mirando con cuidado y comparando componente a componente se deduce que $r_2=r_3=0$ y $f_i=0$ y $d_i=0$ para todo $i\geq 2$. Y tomando esos valores y volviendo a comparar, se tiene que $r_1=0$ también.

Es decir, probamos que toda 2-forma cerrada ω, al escribirla como $\omega=\sigma+\tilde{\omega}$, con $\sigma\in V_1\wedge(\mathfrak{n}_n^{k-1})^*$, se tiene $\sigma=0$. En otras palabras, toda 2-forma cerrada en $\mathfrak{n}_n$ pertenece a $\omega\in\Lambda^2V_{k-1}$, lo cual implica $E_\infty^{0,2}(\mathfrak{n}_n)=0$ como queríamos demostrar. ■

Álgebras de tipo D:

Para cada $n\geq 4$, $D_n=\mathfrak{so}(2n,\mathbb{C})$. Sea $\mathfrak{h}$ la subálgebra de Cartan correspondiente al conjunto de raíces positivas correspondiente es $\triangle^+=\{e_i\pm e_j:\ 1\leq i<j\leq n\}$. Luego $\dim\mathfrak{n}_n=n(n-1)$.

El subconjunto de raíces simples es $\triangle_0=\{\alpha_i:=e_i-e_{i+1}: i=1,\dots,n-1,\alpha_n:=e_{n-1}+e_n\}$. La raíz máxima $\alpha_{\text{máx}}$ es e_1+e_2 y como combinación de raíces simples $\alpha_{\text{máx}}=\alpha_1+2\sum_{i=2}^{n-2}\alpha_i+\alpha_{n-1}+\alpha_n$. Luego el índice de nilpotencia de $\mathfrak{n}_n$ es $k=2n-3$. Como en el caso anterior, $\dim L_{k-1}=1$ y la raíz de longitud $k-1$ es $\delta=\alpha_1+\alpha_2+\sum_{i=2}^{n-2}2\alpha_i+\alpha_{n-1}+\alpha_n$.

Prueba del Teorema 3.2.3, *punto 4.* Esta prueba es análoga a la hecha para la familia B_n. Veremos por qué y además la razón por la cual es necesario que $n\geq 6$ para repetir la misma prueba.

En el sistema de raíces correspondiente a D_n podemos ver que $\mathfrak{n}_n$ tiene dos raíces de longitud $k-2$ y son $\rho=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+2\sum_{i=4}^{n}\alpha_i+\alpha_{n-1}+\alpha_n$ y $\rho'=\alpha_2+\sum_{i=3}^{n}2\alpha_i+\alpha_{n-1}+\alpha_n$.

Hay dos raíces de longitud tres si $n\geq 6$ y en otro caso sólo hay una; es por esto que tomamos $n\geq 6$ para repetir la prueba hecha en la familia B. En este caso las raíces de longitud $k-3$ son $\theta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+2\sum_{i=5}^{n-2}\alpha_i+\alpha_{n-1}+\alpha_n$, $\theta'=\alpha_2+\alpha_3+2\sum_{i=4}^{n-2}\alpha_i+\alpha_{n-1}+\alpha_n$.

Para estas raíces, se dan las mismas relaciones que en B_n, como podemos observar:

$$\alpha_{\text{máx}}=\delta+\alpha_2,\qquad \alpha_{\text{máx}}=\rho+(\alpha_2+\alpha_3)\ =\ \rho'+(\alpha_1+\alpha_2)$$

$$\alpha_{\text{máx}}=\theta+(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)\ =\ \theta'+(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3).$$

Entonces valen las mismas ecuaciones (3.15), (3.16) y (3.17). Las raíces de longitud dos, tres y cuatro son

$\ell=2:\qquad \alpha_i+\alpha_{i+1},\ i=1,\dots,n-2$ y $\alpha_{n-2}+\alpha_n$.

$\ell=3:\qquad \alpha_i+\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2},\ i=1,\dots,n-2$ y $\alpha_{n-3}+\alpha_{n-2}+\alpha_n$.

$\ell=4:\qquad \alpha_i+\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}+\alpha_{i+3},\ i=1,\dots,n-3$ y $\alpha_{n-4}+\alpha_{n-3}+\alpha_{n-2}+\alpha_n$.

Por lo tanto las diferenciales de los elementos de las bases de L_2^*, L_3^* y L_4^* no coinciden con lo hecho en B_n. Sin embargo al tienen igual comportamiento que en el caso de B.

Utilizando la Descomposición 3 y realizando las comparaciones como en el caso anterior llegamos a que $E_\infty^{0,2}(\mathfrak{n}_n) = 0$ para todo $n \geq 6$. ■

Las pruebas en cada familia dan como resultado el Teorema 3.2.3.

Corolario 3.2.4. *Sea $\mathfrak{n}_n$ el nilradical de una subálgebra de Borel de una álgebra de Lie simple compleja dentro de las familias clásicas. Entonces si n es como en el Teorema 3.2.3, $\mathbb{R}^s \oplus \mathfrak{n}_n$ no admite estructuras simplécticas.*

3.3. $E_\infty^{0,2}$ de álgebras de Lie métricas 2-pasos nilpotentes

Un álgebra de Lie $\mathfrak{n}$ se dice métrica cuando se considera un producto interno en $\mathfrak{n}$. En estos casos, las transformaciones adjuntas D del operador de homología ∂ definen un complejo de cocadenas $(\Lambda^*\mathfrak{n}, D)$ isomorfo al complejo $(\Lambda^*\mathfrak{n}^*, d)$ de formas diferenciales. Este isomorfismo permite calcular la cohomología intermedia de $\mathfrak{n}$ a través de una filtración del complejo definido por D.

Aplicando esos resultados a las álgebras de Lie 2-pasos nilpotentes métricas obtenemos una descripción del grupo de cohomología intermedia $E_\infty^{0,2}(\mathfrak{n})$ en términos del Laplaciano $\triangle$ (ver Proposición 3.3.4). Esta descripción permite escribir los resultados en [21] sobre existencia de estructuras simplécticas en álgebras de Lie tipo H como aplicación del Teorema 3.1.3. De esta manera probamos que en la familia de álgebras tipo H la condición en dicho Teorema es suficiente además de necesaria para la existencia de estructuras simplécticas.

Sea $\mathfrak{n}$ un álgebra de Lie y $\langle\ ,\ \rangle$ un producto interno en $\mathfrak{n}$. La homología $H_*(\mathfrak{n})$ se define a través de la homología del complejo $(\Lambda^*\mathfrak{n}, \partial)$ donde $\partial_p : \Lambda^p\mathfrak{n} \longrightarrow \Lambda^{p-1}\mathfrak{n}$ está dada por

$$\partial_p(x_1 \wedge \ldots \wedge x_p) = \sum_{i<j} (-1)^{i+j+1}[x_i, x_j] \wedge x_1 \wedge \ldots \wedge \overset{\wedge}{x_i} \ldots \wedge \overset{\wedge}{x_j} \ldots \wedge x_p$$

El producto interno de $\mathfrak{n}$ se extiende a $\Lambda^p\mathfrak{n}$ para todo p y $\{e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p} : i_j \in 1, \ldots, m,\ i_1 < i_2 \cdots < i_p\}$ es una base ortonormal de $\Lambda^p\mathfrak{n}$ si $\{e_1, \ldots, e_m\}$ es una tal base de $\mathfrak{n}$. Denotamos D_p la transformación adjunta de ∂_p. Éstas verifican $D_{p-1} : \Lambda^{p-1}\mathfrak{n} \longrightarrow \Lambda^p\mathfrak{n}$ y $D_p \circ D_{p-1} = 0$ para todo p y por lo tanto $(\Lambda^*\mathfrak{n}, D)$ es un complejo de cocadenas.

Consideramos en $\mathfrak{n}^*$ el producto interno que hace de $\Phi : \mathfrak{n} \longrightarrow \mathfrak{n}^*$, $x \mapsto \langle x, \cdot \rangle$ una isometría y extendemos ese producto y la aplicación Φ a $\Lambda^p\mathfrak{n}$ para todo $p \geq 2$. Entonces se tiene una isometría, que también denotamos Φ entre $\Lambda^*\mathfrak{n}$ y $\Lambda^*\mathfrak{n}^*$. Resultan $(\Lambda^*\mathfrak{n}, D)$ y $(\Lambda^*\mathfrak{n}^*, d)$ complejos isomorfos por Φ.

Supongamos que $\mathfrak{n}$ es un álgebra de Lie nilpotente métrica. Notemos que al ser isomorfos los complejos $(\Lambda^*\mathfrak{n}, D)$ y $(\Lambda^*\mathfrak{n}^*, d)$ hay una filtración en el primero que se corresponde con la filtración canónica del segundo. Esta filtración está dada por los subespacios ortogonales de la serie central descendente.

Consideramos los subespacios de $\mathfrak{n}$

$$W_0 = \{0\} \qquad W_i = \{x \in \mathfrak{n} : D_1 x \in \Lambda^2 W_{i-1}\}, \ \ i \geq 1. \tag{3.22}$$

Proposición 3.3.1. *Para cada $i \geq 0$, $W_i = (\mathfrak{n}^i)^\perp$.*

Prueba. La demostración es similar a lo hecho en la Proposición 1.2.6. De la igualdad $\langle D_1 x, y \wedge z\rangle = \langle x, \partial_2(y \wedge z)\rangle$ $\forall x, y, z \in \mathfrak{n}$ se prueba el caso $i = 1$. Si $(\mathfrak{n}^i)^\perp = W_i$ sea $x \in W_{i+1}$, entonces $D_1 x \in \Lambda^2 W_i$. Dados $a \in \mathfrak{n}^i$, $b \in \mathfrak{n}$ se tiene

$$\langle x, [a, b]\rangle = \langle x, \partial_2(a \wedge b)\rangle = \langle D_1 x, a \wedge b\rangle \,,$$

donde el último producto interno es cero ya que $D_1 x \in \Lambda^2(\mathfrak{n}^i)^\perp$. Luego $W_{i+1} \subseteq (\mathfrak{n}^{i+1})^\perp$

Por otro lado, si $x \in (\mathfrak{n}^{i+1})^\perp$ y $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es una base ortonormal de $\mathfrak{n}$ de manera que los elementos $\{e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n\}$ generan $\mathfrak{n}^{i+1}$ entonces

$$D_1 x = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \langle D_1 x, e_i \wedge e_j\rangle \, e_i \wedge e_j.$$

Dado que $\langle D_1 x, e_i \wedge e_j\rangle = \langle x, [e_i, e_j]\rangle = 0$ si $j = k, \ldots, n$ resulta $x \in W_{i+1}$. ■

Una demostración análoga a la Proposición 2.2.1 muestra que D preserva los espacios W_j, es decir $D(\Lambda^i W_j) \subseteq \Lambda^{i+1} W_j$. Luego cada $(\Lambda^* W_i, D)$ es un subcomplejo de $(\Lambda^*\mathfrak{n}, D)$ y debido a las relaciones de inclusión entre los subespacios W_j, $(\Lambda^*\mathfrak{n}, D)$ es un complejo filtrado. Por el Teorema 2.1.4 hay una sucesión espectral $\tilde{E}_r^{p,q}$ asociada a este complejo filtrado.

Dado que el isomorfismo $\Phi : \Lambda^*\mathfrak{n} \longrightarrow \Lambda^*\mathfrak{n}^*$ se restringe a una aplicación entre los espacios W_j y V_j para cada j, Φ define un isomorfismo entre las sucesiones espectrales $\tilde{E}$ y E siendo E la sucesión espectral de cohomología intermedia. Resumimos esto en la siguiente proposición.

Proposición 3.3.2. *Sea $\mathfrak{n}$ un álgebra de Lie nilpotente con un producto interno. La cohomología intermedia de $\mathfrak{n}$ es isomorfa al límite de la sucesión espectral que determinan el complejo $(\Lambda^*\mathfrak{n}, D)$ y la filtración $\{0\} = W_0 \subseteq W_1 \subseteq \cdots \subseteq W_k = \mathfrak{n}$.*

Sea $\mathfrak{n}$ un álgebra de Lie 2-pasos nilpotente con producto interno. Descomponemos $\mathfrak{n}$ en suma directa ortogonal

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{a} \oplus [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}],$$

donde $\mathfrak{z} = \mathfrak{a} \oplus [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ es el centro de $\mathfrak{n}$ y $\mathfrak{a}$ un ideal abeliano. La filtración (3.22) es $W_0 = \{0\}$, $W_1 = [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]^\perp = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{a}$ y $W_2 = \mathfrak{n}$ por la Proposición 3.3.1. En la sucesión espectral asociada a la filtración que estos subespacios inducen en $(\Lambda^*\mathfrak{n}, D)$ se tiene

$$E_\infty^{0,2} = \frac{\{x \in \Lambda^2\mathfrak{n} : D_2 x = 0\}}{D_1(\mathfrak{n}) + \{x \in \Lambda^2 W_1 : D_2 x = 0\}} = \frac{\Lambda^2(\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{v}) \oplus \{x \in [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \wedge \mathfrak{n} : D_2 x = 0\}}{\Lambda^2(\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{v})}. \tag{3.23}$$

Es claro que si $\ker D_2 \cap ([\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \wedge \mathfrak{n}) = \{0\}$ entonces $E_\infty^{0,2}(\mathfrak{n}) = 0$. Estudiaremos en detalle la restricción de D_2 al subespacio $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \wedge \mathfrak{n} = ([\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \otimes \mathfrak{a}) \oplus ([\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \otimes \mathfrak{v}) \oplus \Lambda^2[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$.

Proposición 3.3.3. $D_2|_{([\mathfrak{n},\mathfrak{n}]\otimes\mathfrak{a})\oplus\Lambda^2[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]}$ *es inyectiva.*

Prueba. Si $a \in \mathfrak{a}$ entonces $D_1(a) = 0$ pues

$$\langle D_1(a), u \wedge v\rangle = \langle a, [u, v]\rangle = 0, \qquad \forall u, v \in \mathfrak{n}.$$

Dado que D_2 es la extensión por derivación de D_1, $D_2(z \wedge a) = D_1(z) \wedge a - z \wedge D_1(a) = D_1(z) \wedge a$ para todo $z \in [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$. Sean $\{z_1, \dots, z_k\}$, $\{a_1, \dots, a_r\}$ bases ortonormales de $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ y $\mathfrak{a}$ respectivamente. Escribimos $z \wedge a = \sum_{s,t} \alpha_{s,t} z_s \wedge a_t$. Sabemos que $D_1(\mathfrak{n}) \subset \Lambda^2\mathfrak{v}$ y por lo tanto

$$D_2(z\wedge a) = D_1(z)\wedge a = \left(\sum_{i<j} \langle D_1(z), v_1 \wedge v_j\rangle\, v_i \wedge v_j\right)\wedge a = \sum_{s,t}\alpha_{s,t}\sum_{i<j}\langle D_1(z_s), v_i \wedge v_j\rangle\, v_i\wedge v_j\wedge a_t = 0$$

si y sólo si $\sum_s \alpha_{s,t} \langle D_1(z_s), v_i \wedge v_j\rangle = 0$ para todos i, j, t fijos. Sin embargo

$$\sum_s \alpha_{s,t} \langle D_1(z_s), v_i \wedge v_j\rangle = \left\langle \sum_s \alpha_{s,t} z_s, [v_i, v_j]\right\rangle.$$

Como ambos son elementos en $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ el producto interno es cero para todo i, j si y sólo si $\sum_s \alpha_{s,t} z_s = 0$ lo cual implica $\alpha_{s,t} = 0$ para todo s, t. Luego $z \wedge a = 0$ y $D_2|_{[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]\otimes\mathfrak{a}}$ es inyectiva.

Por otro lado, supongamos que $D_2(\sum_{i<j} a_{i,j} z_i \wedge z_j) = 0$. Es decir

$$0 = \sum_{i<j} a_{i,j}\left(D_1(z_i) \wedge z_j - D_1(z_j) \wedge z_i\right) = \sum_i D_1(z_i) \wedge \sum_{j\neq i} s_{i,j} a_{i,j} z_j, \qquad s_{i,j} = \pm 1. \tag{3.24}$$

La última igualdad surge de un cambio de índices. Probaremos que $\{D_1(z_i), i = 1 \dots, k\}$ es un conjunto linealmente independiente $\Lambda^2\mathfrak{v}$.

$$\begin{aligned}\sum_i \beta_i D_1(z_i) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad D_1(\sum_i \beta_i z_i) = 0 \Leftrightarrow \left\langle D_1(\sum_i \beta_i z_i), v_s \wedge v_t\right\rangle = 0 \qquad \forall s, t \\ &\Leftrightarrow \quad \left\langle \sum_i \beta_i z_i, [v_s, v_t]\right\rangle = 0 \Leftrightarrow \sum_i \beta_i z_i \in [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]^\perp \Leftrightarrow \beta_i = 0 \qquad \forall i.\end{aligned}$$

Luego $\{D_1(z_i), i = 1 \dots, k\}$ es linealmente independiente y junto con la ecuación (3.24) implican que $a_{i,j} = 0$ para todo i, j cada vez que $D_2(\sum_{i<j} a_{i,j} z_i \wedge z_j) = 0$.

■

Como consecuencia de esta proposición y la ecuación (3.23), $E_\infty^{0,2}(\mathfrak{n}) \cong \ker D_2|_{[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]\otimes\mathfrak{v}}$. Nos será útil describir este término de la suceción espectral en función del Laplaciano $\triangle$ de $\mathfrak{n}$ asociado al producto interno. Introducimos este concepto.

A partir del operador adjunto D_p de ∂_p, definimos el *p-ésimo Laplaciano* de $\mathfrak{n}$ como el endomorfismo de $\Lambda^p\mathfrak{n}$ dado por $\triangle_p = \partial_{p+1} \circ D_p + D_{p-1} \circ \partial_p$. Es bien conocido que la homología (y la cohomología) de las álgebras de Lie nilpotentes métricas queda completamente determinada por el núcleo del operador Laplaciano. En efecto Kostant prueba en [45]

$$\ker \triangle_p \cong H_p(\mathfrak{n}), \quad \text{para cada } p. \tag{3.25}$$

Teniendo en cuenta que $E_\infty^{0,2}(\mathfrak{n})$ es isomorfo a un subespacio de $H_2(\mathfrak{n})$, es natural pensar que el mismo queda determinado por el núcleo del Laplaciano restringido a algún subespacio de $\Lambda^2\mathfrak{n}$. Esto es lo que probamos en la siguiente proposición.

Proposición 3.3.4. *Si* $\mathfrak{n}$ *es un álgebra de Lie métrica 2-pasos nilpotente entonces*

$$E_\infty^{0,2} \cong \ker \triangle_2|_{[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]\otimes\mathfrak{v}}.$$

Prueba. El subespacio $[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]\otimes\mathfrak{v}$ es invariante por $\triangle_2$ y $\ker\triangle_2 = \ker D_2$ en este subespacio ya que $\partial_2|_{[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]\otimes\mathfrak{v}} = 0$ y $\ker\partial_3 = (ImD_2)^\perp$. ∎

En el trabajo [21] de I. Dotti y P. Tirao, se estudia el operador $\triangle_2|_{[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]\otimes\mathfrak{v}}$ y particularmente su núcleo. Incluimos algunos de estos resultados a continuación.

Para cada $z \in \mathfrak{z}$ definimos $J_z : \mathfrak{v} \longrightarrow \mathfrak{v}$ como $\langle J_z x, y\rangle = \langle [x,y], z\rangle$, es decir $J_z x = ad_x^* z$ donde ad_x^* es la adjunta de $ad_x : \mathfrak{n} \longrightarrow \mathfrak{n}$ según el producto interno de $\mathfrak{n}$. Cada J_z es una aplicación lineal y antisimétrica en $\mathfrak{v}$, es decir $J_z \in so(\mathfrak{v})$. La función $J : \mathfrak{z} \longrightarrow so(\mathfrak{v})$, $z \mapsto J_z$ es lineal, y $\ker J = \mathfrak{a}$. Toda la geometría básica de los grupos de Lie 2-pasos nilpotentes con la métrica invariante a izquierda definida por la métrica en el álgebras de Lie puede ser descripta en función de estas aplicaciones J_z, $z \in \mathfrak{z}$ (ver trabajo de P. Eberlein [22]).

Consideramos el producto interno $\langle\ ,\ \rangle = -1/2$ traza en $so(\mathfrak{v})$ y denotamos $|\cdot|$ la norma que el mismo define.

Proposición 3.3.5 (Lema 2.4, [21])**.** *Sean* $\{z_1,\dots,z_k\}$ *y* $\{v_1,\dots,v_r\}$ *bases ortonormales de* $[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]$ *y* $\mathfrak{v}$ *respectivamente. Entonces la matriz de* $\triangle_2|_{[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]\otimes\mathfrak{v}}$ *en la base* $\mathcal{B} = \{z_1\otimes v_1, z_2\otimes v_1,\dots,z_k\otimes v_1, z_1\otimes v_2,\dots,z_k\otimes v_2,\dots,z_k\otimes v_r\}$ *es la matriz por bloques*

$$K(\mathfrak{n}) := [\triangle_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} J_{z_1}^2 + |J_{z_1}|^2 I & J_{z_2}J_{z_1} + \langle J_{z_2}, J_{z_1}\rangle I & \cdots & J_{z_k}J_{z_1} + \langle J_{z_k}, J_{z_1}\rangle I \\ J_{z_1}J_{z_2} + \langle J_{z_1}, J_{z_2}\rangle I & J_{z_2}^2 + |J_{z_2}|^2 I & \cdots & J_{z_k}J_{z_2} + \langle J_{z_k}, J_{z_2}\rangle I \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ J_{z_1}J_{z_k} + \langle J_{z_1}, J_{z_k}\rangle I & J_{z_2}J_{z_k} + \langle J_{z_2}, J_{z_k}\rangle I & \cdots & J_{z_k}^2 + |J_{z_k}|^2 I \end{pmatrix}. \tag{3.26}$$

En particular, la submatriz ubicada en la posición ij de $K(\mathfrak{n})$ es

$$K(\mathfrak{n})_{ij} = J_{z_j}J_{z_i} + \left\langle J_{z_i}, J_{z_j}\right\rangle I.$$

Observación 3.3.6. *La construcción anterior es independiente del ideal abeliano* $\mathfrak{a}$ *de* $\mathfrak{n}$*. Es decir, notando* $\tilde{\mathfrak{n}} = \mathfrak{v}\oplus[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]$ *resulta* $\triangle_2|_{[\tilde{\mathfrak{n}},\tilde{\mathfrak{n}}]\otimes\mathfrak{v}} \equiv \triangle_2|_{[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]\otimes\mathfrak{v}}$ *pues* $[\tilde{\mathfrak{n}},\tilde{\mathfrak{n}}] = [\mathfrak{n},\mathfrak{n}]$ *y esta restricción del Laplaciano no depende del valor en* $\mathfrak{a}$*. Luego* $K(\mathfrak{n}) = K(\tilde{\mathfrak{n}})$*.*

De las dos proposiciones anteriores concluimos que si $\mathfrak{n}$ es un álgebra de Lie 2-pasos nilpotente con producto interno entonces

$$E_\infty^{0,2}(\mathfrak{n}) \cong \ker K(\mathfrak{n}) = \ker K(\tilde{\mathfrak{n}}) = E_\infty^{0,2}(\tilde{\mathfrak{n}}). \tag{3.27}$$

Y del Teorema 3.1.3 se desprende el siguiente resultado.

Corolario 3.3.7. *Sea $\mathfrak{n}$ un álgebra de Lie 2-pasos nilpotente de dimensión par. Supongamos que existe un producto interno en $\mathfrak{n}$ de manera que $\triangle_2|_{[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]\otimes\mathfrak{v}}$ es inyectivo, entonces $\mathfrak{n}$ no admite estructuras simplécticas. Es decir, si $K(\mathfrak{n})$ es inversible entonces $E_\infty^{0,2}(\mathfrak{n}) = 0$.*

Focalizamos nuestro estudio en las álgebras de Lie tipo Heisenberg (o simplemente tipo H). Éstas forman una subfamilia de álgebras de Lie 2-pasos nilpotentes con producto interno y fueron introducidas por A. Kaplan en [41] y el estudio de la geometría de las nilvariedades asociadas a las álgebras de tipo Heisenberg se encuentra en [42]. Este estudio está hecho a partir de las J_z antes definidas y motivó el trabajo posterior de Eberlein [22].

Definición 3.3.8. *Un álgebra de Lie $(\mathfrak{n}, \langle\ ,\ \rangle)$ es de tipo H si $\mathfrak{n} = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{z}$ como suma directa ortogonal y la aplicación $J : \mathfrak{z} \longrightarrow so(\mathfrak{v})$ definida como antes verifica $J_z^2 = -|z|^2 I$ para todo $z \in \mathfrak{z}$.*

De la definición surge que el centro de un álgebra de tipo H coincide con el conmutador y

$$J_z J_{z'} + J_{z'} J_z = -2 \left\langle z, z' \right\rangle I. \tag{3.28}$$

En particular, la filtración por los subespacios W resulta $W_0 = \{0\}$, $W_1 = \mathfrak{v}$ y $W_2 = \mathfrak{n}$. La función J es una homotecia en efecto $(-1/2)\,\mathrm{traza}(J_z^2) = \frac{r}{2}|z|$ donde $r = \dim \mathfrak{v}$.

Consideramos $\{z_1, \ldots, z_k\}$ una base ortonormal de $\mathfrak{z}$ y calculamos la forma resultante de la matriz $K(\mathfrak{n})$ en base a (3.26). Por (3.28), $|J_z|^2 = -\frac{1}{2}\,\mathrm{traza}(-|z|^2 I) = \frac{r}{2}$ donde $r = \dim \mathfrak{v}$. Dado que $(J_z J_{z'})^* = J_{z'} J_z$ para todo $z, z' \in \mathfrak{z}$, en la base ortonormal $J_{z_1} J_{z_2}$ es antisimétrica por la primer propiedad y por lo tanto tiene traza cero. Luego K toma la forma

$$K(\mathfrak{n}) = \begin{pmatrix} \frac{r-2}{2} I & J_{z_2} J_{z_1} & \cdots & J_{z_k} J_{z_1} \\ J_{z_1} J_{z_2} & \frac{r-2}{2} I & \cdots & J_{z_k} J_{z_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ J_{z_1} J_{z_k} & J_{z_2} J_{z_k} & \cdots & \frac{r-2}{2} I \end{pmatrix}. \tag{3.29}$$

Proposición 3.3.9 (Lema 4.5,[21]). *$K(\mathfrak{n})$ es singular si y sólo si $\mathfrak{n} \cong \mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_c$ o $\mathfrak{h}_{\mathbb{H}}$ donde:*

- *$\mathfrak{h}_1$ es el álgebra de Heisenberg de dimensión 3.*
- *$\mathfrak{h}_c$ es el álgebra de Lie real que proviene del álgebra de Heisenberg de dimensión compleja 3. Esta álgebra de Lie tiene dimenisón real 6 y está expuesta en la Sección 2.4 como la número 28.*

- $\mathfrak{h}_{\mathbb{H}}$ *es el álgebra de Heisenberg cuaterniónica de dimensión siete. La misma tiene una base* $\{e_i : i = 1, \ldots, 7\}$ *cuyos corchetes no nulos son*

$$[e_1, e_2] = e_5 = -[e_3, e_4], \qquad [e_1, e_3] = e_6 = [e_2, e_4], \qquad [e_1, e_4] = e_7 = -[e_2, e_3].$$

Prueba. Veamos primero que K es singular para cada caso. Como $\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{h}_1) = 1$ y $r = 2$, $K(\mathfrak{h}_1) = 0$. En $\mathfrak{h}_c$, $r = 4$, $\mathfrak{z}(\mathfrak{h}_c) = span\{e_5, e_6\}$ y

$$J_{e_5} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J_{e_6} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Armando $K(\mathfrak{h}_c)$ vemos que su determinante es cero. De la misma forma se prueba que $K(\mathfrak{h}_{\mathbb{H}})$ no es inversible. Veamos que en cualquier otro caso $\det K(\mathfrak{n}) \neq 0$.

Notemos $\lambda = (r-2)/2$. La matriz $K(\mathfrak{n})$ es escribe como $K(\mathfrak{n}) = \lambda I + D$ y vale $D^2 = (k-1)I + (k-2)D$. Si $K(\mathfrak{n})$ es singular entonces existe $w \neq 0$ tal que $K(\mathfrak{n})w = 0$ y $K(\mathfrak{n})^2 w = 0$, es decir $Dw = -\lambda w$ y $0 = K(\mathfrak{n})^2 w = \left(D^2 + 2\lambda D + \lambda^2 I\right) w = (k - 2 + 2\lambda)Dw + (\lambda^2 + k - 1)w$. Si $2\lambda + k - 2 \neq 0$ resulta

$$Dw = -\frac{\lambda^2 + k - 1}{k + 2\lambda - 2}\, w.$$

Igualando ambas ecuaciones resulta $\lambda(k + 2\lambda - 2) = k + 2\lambda - 2$. Los valores que resuelven la cuadrática son $\lambda_1 = 1 - k$, $\lambda_2 = 1$. En el primer caso es $r = 4 - 2k$ y vale sólo para $r = 2$ y $k = 1$. Éste álgebra es isomorfa a $\mathfrak{h}_1$. De la clasificación de álgebras de tipo H ([40]), existen tres álgebras irreducibles con $r = 4$, éstas son $\mathfrak{h}_c$, $\mathfrak{h}_{\mathbb{H}}$ y el álgebra de Heisenberg de dimensión 5 para la cual K es la identidad. ∎

Teorema 3.3.10. *Sea* $\mathfrak{n} = \mathbb{R}^s \oplus \mathfrak{h}$ *con* $\mathfrak{h}$ *un álgebra de tipo H y* $s = 0$ *o* $s = 1$ *si* $\dim \mathfrak{h}$ *es par o impar respectivamente. Son equivalentes:*

i. $E_\infty^{0,2}(\mathfrak{n}) \neq 0$*,*

ii. $\mathfrak{n}$ *admite estructuras simplécticas.*

Prueba. Probaremos que la primera afirmación implica la segunda ya que la recíproca está dada por el Teorema 3.1.3.

Supongamos que $E_\infty^{0,2}(\mathfrak{n}) \neq 0$. Entonces, independientemente de $s = 0$ o $s = 1$, $E_\infty^{0,2}(\mathfrak{h}) \neq 0$ por el Teorema 2.2.6. Luego $K(\mathfrak{n})$ es singular puesto que $\ker K(\mathfrak{h}) = E_\infty^{0,2}(\mathfrak{h}) \neq 0$ (ver (3.27)), lo cual implica que $\mathfrak{h}$ es alguna de las tres álgebras en la proposición anterior $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_c$ o $\mathfrak{h}_{\mathbb{H}}$.

Mostramos una estructura simpléctica en $\mathbb{R} \oplus \mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_c$ y $\mathbb{R} \oplus \mathfrak{h}_{\mathbb{H}}$. Aquí utilizamos la misma notación que en la Sección 2.4.

- $\mathbb{R} \oplus \mathfrak{h}_1 = (0, 0, 0, 23)$, $\omega_1 = e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4$ es cerrada y $\omega_1^2 \neq 0$.
- $\mathfrak{h}_c = (0, 0, 0, 0, -13 + 24, -14 - 23)$, $\omega_2 = e^1 \wedge e^5 - e^2 \wedge e^6 + e^3 \wedge e^4$ es cerrada y $\omega_2^3 \neq 0$.
- $\mathbb{R} \oplus \mathfrak{h}_{\mathbb{H}} = (0, 0, 0, 0, 0, -23 + 45, -24 - 35, -25 + 34)$, $\omega_3 = e^2 \wedge e^8 + e^4 \wedge e^7 + (e^3 + e^4) \wedge e^6 + e^1 \wedge e^5$ es cerrada y $\omega_3^4 \neq 0$.

Con esto queda probado el teorema. $\blacksquare$

Capítulo 4

Estructuras simplécticas en álgebras de Lie nilpotentes

En este capítulo profundizamos el estudio de las estructuras simplécticas en las álgebras de Lie nilpotentes. Estas estructuras están en correspondencia con las estructuras simplécticas en nilvariedades y es ésta la principal razón de su estudio.

Presentamos resultados conocidos en la primera sección junto con ejemplos que permiten introducirnos en el tema. Al final de esa sección mostramos un ejemplo que responde a una pregunta sobre el grado de solubilidad de un álgebra de Lie nilpotente simpléctica planteada por Guan en [31].

Las secciones siguientes son muy diferentes en su propósito. En la segunda resolvemos el problema de determinar las álgebras de Lie simplécticas dentro de la familia de las álgebras de Lie nilpotentes libres: salvo dos en la familia, el resto no admite este tipo de estructuras.

Esta determinación junto con los resultados de no existencia de estructuras simplécticas en el capítulo anterior nos llevan a preguntarnos formas de construcción de nuevos ejemplos. Con este propósito estudiamos en detalle el procedimiento de doble extensión de álgebras de Lie simplécticas siguiendo los trabajos de Dardié, Medina y Revoy [13], [52]. Construimos una nueva familia de álgebras de Lie simplécticas y estudiamos sus características.

4.1. Introducción

En esta sección retomamos la definición de estructura simpléctica en álgebras de Lie presentada en el capítulo anterior. Desarrollamos este concepto en álgebras de Lie nilpotentes incluyendo ejemplos de subfamilias simplécticas dentro de las álgebras de Lie nilpotentes. Incluimos además condiciones ya conocidas sobre existencia de tales estructuras.

En esta sección notaremos con $\mathfrak{n}$ a las álgebras de Lie cuando éstas sean nilpotentes.

Recordemos que una estructura simpléctica en un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es una 2-forma cerrada ω y no degenerada vista como forma bilineal antisimétrica definida en $\mathfrak{g}$. En particular es un elemento de $Z^2 = \ker(d : \Lambda^2\mathfrak{g}^* \longrightarrow \Lambda^3\mathfrak{g}^*)$ y por lo tanto define una clase de cohomología $[\sigma]$ en $H^2(\mathfrak{g})$.

Hemos visto que dada una variedad M de dimensión par $2m$, una estructura simpléctica ω en M es una 2-forma diferencial cerrada y no degenerada en cada punto de M. Si M es compacta y ω una estructura simpléctica en M entonces del Teorema de Stokes se deduce que $[\omega]^m \neq 0$. En particular, $[\omega] \neq 0$. Es decir, las variedades compactas M tales que $H^2_{dR}(M) = 0$ no admiten estructuras simplécticas.

Si $M = \Gamma\backslash N$ es una nilvariedad, entonces M es simpléctica si y sólo si $\mathfrak{n}$, el álgebra de Lie del grupo de Lie N, es simpléctica. Esta equivalencia se desprende del Teorema de Nomizu enunciado como Teorema 1.2.12. En efecto, a través del isomorfismo ι entre los grupos de cohomología, a toda estructura simpléctica ω con clase de cohomología de de Rham $[\omega]$ le corresponde una 2-forma cerrada $\sigma \in \Lambda^2\mathfrak{n}^*$ tal que $\iota([\omega]) = [\sigma]$. El hecho que el isomorfismo preserve la estructura de anillo de cohomología, implica que $\iota([\omega]^m) = [\sigma]^m = [\sigma^m]$ $(2m = \dim \mathfrak{n})$ y esta clase es no nula por ser M compacta. Dado que $H^m(\mathfrak{g})$ tiene dimensión uno deducimos que $\sigma^m \neq 0$ y σ es una estructura simpléctica en $\mathfrak{n}$.

Recíprocamente, una estructura simpléctica $\sigma \in \Lambda^2\mathfrak{n}^*$ define una 2-forma invariante en el grupo de Lie N que desciende al cociente $\Gamma\backslash N$.

Luego toda forma simpléctica en una nilvariedad es cohomóloga a una forma simpléctica invariante por la acción del grupo de Lie. Este hecho no es válido para variedades homogéneas generales $\Gamma\backslash G$ si G no es nilpotente. En el trabajo de S. Console, G. Ovando y M. Subils [11], se muestran ejemplos de solvariedades simplécticas donde dichas estructuras no son invariantes por la acción del grupo soluble G.

Comenzamos esta presentación con ejemplos y resultados generales, siempre en álgebras de Lie nilpotentes.

Ejemplo 4.1.1. *El álgebra de Lie abeliana de dimensión $2n$, $\mathfrak{n}_{2n}$, es simpléctica para todo $n \in \mathbb{N}$. En efecto si $\mathfrak{n}_{2n}^* = span\{e^1, e^2, \ldots, e^{2n-1}, e^{2n}\}$, la 2-forma*

$$\omega = e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4 + \cdots + e^{2n-1} \wedge e^{2n}$$

define una estructura simpléctica en $\mathfrak{n}_n^*$.

Proposición 4.1.2 ([27])**.** *Toda álgebra nilpotente de dimensión 4 admite estructuras simplécticas.*

Prueba. El álgebra abeliana de dimensión cuatro es simpléctica por el ejemplo anterior y hay, salvo isomorfismo, dos álgebras de Lie nilpotentes no abelianas de dimensión 4. En una base $\{e^1, e^2, e^3, e^4\}$ del espacio dual, las diferenciales que definen las diferentes clases de isomorfismos, son

$$\mathfrak{n}_1 : \begin{cases} de^1 = de^2 = de^3 = 0 \\ de^4 = e^2 \wedge e^3 \end{cases}, \qquad \mathfrak{n}_2 : \begin{cases} de^1 = de^2 = 0 \\ de^3 = e^1 \wedge e^2 \\ de^4 = e^1 \wedge e^3 \end{cases}.$$

El álgebra de Lie $\mathfrak{n}_1$ es $\mathbb{R} \oplus \mathfrak{h}_1$ en el Teorema 3.3.10 donde vimos que la misma es simpléctica. La 2-forma $\omega_2 = e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3$ en $\mathfrak{n}_2$ define una estructura simpléctica. ■

A partir del álgebra $\mathbb{R} \oplus \mathfrak{h}_1$, Thurston en [65] construyó el primer ejemplo de variedad compacta simpléctica que no admite métrica Kähler. Sobre variedades Kähler homogéneas referimos al libro de Oprea y Tralle [59].

En dimensión seis aparecen las primeras álgebras de Lie nilpotentes que no admiten estructuras simplécticas.

Ejemplo 4.1.3. *El álgebra de dimensión seis $\mathfrak{n}$ donde $\mathfrak{n}^*$ tiene una base de la forma $\{e^i : i = 1, \ldots 6\}$ y cuya aplicación diferencial está definida como $de^1 = de^2 = de^3 = 0$, $de^4 = e^1 \wedge e^2$, $de^5 = e^1 \wedge e^4$, $de^6 = e^2 \wedge e^4$ no posee estructuras simplécticas. En efecto para toda $\omega \in Z^2$ resulta $\omega^3 = 0$ pues $Z^2 = span\{e^1 \wedge e^6 + e^2 \wedge e^5, e^2 \wedge e^6, e^1 \wedge e^5\} \oplus span\{e^1 \wedge e^4, e^2 \wedge e^4\} \oplus \Lambda^2 Z^1$ con $Z^1 = \ker(d : \mathfrak{n} \longrightarrow \Lambda^2 \mathfrak{n}^*) = span\{e^1, e^2, e^3\}$.*

Este álgebra de Lie de dimensión seis aparece como la número 17 en las listas de la Sección 2.4.

Las ágebras de Lie nilpotentes simplécticas de dimensión seis fueron clasificadas por Goze y Bouyakoub en [27] en base a la clasificación de álgebras de Lie nilpotentes de dicha dimensión hecha por Morosov ([54]). En ese primer trabajo se muestra una familia a un parámetro de álgebras de Lie simplécticas nilpotentes en dimensión ocho no isomorfas dos a dos.

Ejemplo 4.1.4. *Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\mathfrak{n}_\alpha$ el álgebra con base $\{e_1, \ldots, e_8\}$ y corchetes no nulos*

$$[e_1, e_i] = e_{i-1},\ 3 \leq i \leq 8,\ \ [e_4, e_8] = \alpha e_2,\ \ [e_5, e_7] = e_2,\ \ [e_5, e_8] = (1+\alpha)e_3 + e_2$$

$$[e_6, e_7] = e_3,\ \ [e_6, e_8] = (2+\alpha)e_4 + e_3,\ \ [e_7, e_8] = (2+\alpha)e_5 + e_4.$$

Si $\alpha \notin \{-2, -5/2, -1, 1/2\}$, $\mathfrak{n}_\alpha$ admite estructura simpléctica.

Hay ejemplos de álgebras de Lie nilpotentes simplécticas en cada dimensión par, como el que presentamos a continuación.

Ejemplo 4.1.5. *Sea $\mathcal{V}_n$ el álgebra de Lie con base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ y corchetes no nulos*

$$[e_i, e_j] = \begin{cases} (j-i)e_{i+j} & si \quad i+j \leq n \\ 0 & si \quad i+j > n \end{cases}.$$

Claramente, $\mathcal{V}_n$ es filiforme. Si n es par, $n = 2k$, la 2-forma

$$\omega_n = (2k-1)e^1 \wedge e^{2k} + (2k-3)e^2 \wedge e^{2k-1} + \cdots + e^k \wedge e^{k+1}$$

define una estructura simpéctica en $\mathcal{V}_n$.

Esta familia de álgebras de Lie, $\mathcal{V}_n$, es una familia de álgebras filiformes. Un álgebra de Lie de dimensión n se dice filiforme si es $n-1$ pasos nilpotente. La misma fue estudiada en primera instancia por Vergne en [68] en relación a las órbitas abiertas en la variedad de álgebras de Lie y da lugar a ejemplos importantes dentro del estudio de variedades Kähler.

Una variedad Kähler es una variedad simpléctica (M, ω) con una estructura compleja J de manera que $\omega(\cdot, J\cdot)$ defina una métrica riemanniana (ver [9, 59], por ejemplo). En ese caso decimos que la estructura compleja J es compatible con ω. Como mencionamos anteriormente, Thurston en [65] presenta el primer ejemplo de variedad simpléctica no Kähler, es decir sin ninguna estructura compleja compatible. La variedad dada por Thurston puede describirse como una nilvariedad. Benson y Gordon en [4] generalizan este resultado probando que una nilvariedad $\Gamma\backslash N$ es Kähler si y sólo si N es abeliano, resultando toda nilvariedad simpléctica ejemplo de una variedad compacta no Kähler.

Sin embargo, todos estos ejemplos son no simplemente conexos. Mc Duff en [51] da el primer ejemplo simplemente conexo a través del metodo de blow up simpléctico. Una propiedad importante de las variedades Kähler es la formalidad probada en [15]. Siguiendo la idea de Mc Duff, Babenko y Taimanov ([2]) construyen ejemplos de variedades simplécticas simplemente conexas no formales para cada dimensión ≥ 10. En dimensión 8, el ejemplo está dado por Fernández y Muñoz en [24].

En la bibliografía se encuentran algunas condiciones necesarias (no suficientes en general) que permiten determinar en ciertos casos que un álgebra de Lie dada no admite tal tipo de estructura. A continuación damos algunas de estas condiciones que fueron trabajadas en [4],[27],[31] y [21] entre otros autores.

Sin embargo, hallar condiciones suficientes generales para que un álgebra de Lie nilpotente admita estructuras simplécticas es un problema abierto, así como dar nuevos ejemplos de álgebras de Lie nilpotentes simplécticas.

Proposición 4.1.6. *Si $\mathfrak{n}$ es un álgebra de Lie nilpotente de dimensión $2m$ y ω es una estructura simpléctica en $\mathfrak{n}$ entonces su clase de cohomología $[\omega] \in H^2(\mathfrak{n})$ es no trivial. Mas aún $[\omega^m] \neq 0$ en $H^{2m}(\mathfrak{n})$.*

Prueba. La demostración se basa en que el centro $\mathfrak{z}$ de toda álgebra de Lie nilpotente es no trivial. En efecto si $\mathfrak{n}$ es k-pasos, el último paso de la serie central descendente $\mathfrak{n}^{k-1}$ está contenido en el centro ya que $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}^{k-1}] = \mathfrak{n}^k = 0$. Si $0 = [\omega] \in H^2(\mathfrak{n})$ entonces $\omega = d\sigma$ para algún $\sigma \in \mathfrak{n}^*$. Para cada $z \in \mathfrak{z}$, $\omega(z, \cdot) = d\sigma(z, \cdot) = -\sigma([z, \cdot]) = 0$ y por lo tanto ω es una 2-forma degenerada en $\mathfrak{n}$.

Por otro lado, si ω es no degenerada, existe una base $\{e_1, \ldots, e_{2m}\}$ de $\mathfrak{n}$ de manera que, en la base dual de $\mathfrak{n}^*$, $\omega^m = e^1 \wedge \cdots \wedge e^{2m}$. Del teorema 1.2.11 resulta $[\omega^m] = [\omega]^m \neq 0$. ■

En particular las estructuras simplécticas en una álgebra de Lie nilpotente no son exactas. Las álgebras de Lie que admiten una estructura simpléctica exacta se dicen álgebras de *Frobenius*. Por ejemplo, $aff(\mathbb{R}^n)$, el álgebra de Lie de transformaciones afines de $\mathbb{R}^n$ es un álgebra de Lie de Frobenius. Sobre álgebras de Lie de Frobenius ver [17, 5, 26] y sus referencias.

El segundo grupo de cohomología de un álgebra de Lie nilpotente simpléctica es distinto de cero. Si bien podríamos pensar que esta condición da una obstrucción cohomológica para la existencia de estructuras simplécticas, vimos en los preliminares que $\dim H^2(\mathfrak{n}) > 0$ para toda álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{n}$.

En este sentido, presentamos el Teorema 3.1.3 en el capítulo anterior e introdujimos una nueva obstrucción en términos de la cohomología intermedia.

Observación 4.1.7. *Ya vimos al comienzo de la sección que si $\mathfrak{n}$ es el álgebra de un grupo de Lie N que admite un subgrupo discreto cocompacto, entonces dada σ una estructura simpléctica en $\mathfrak{n}$ resulta $[\sigma] \neq 0$. Esto se dedujo del Teorema de Stokes para variedades. La proposición anterior es una prueba algebraica de este hecho y que además es válida para toda álgebra de Lie nilpotente simpléctica. Recordemos que un grupo de Lie N simplemente conexo admite un subgrupo discreto cocompacto si y sólo si los coeficientes de estructura de su álgebra de Lie son racionales [49].*

Proposición 4.1.8 ([4, 31])**.** *Si ω es una estructura simpléctica en $\mathfrak{n}$ k-pasos nilpotente, entonces*

$$\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{n}) \leq \dim(\mathfrak{n}/\mathfrak{n}'). \tag{4.1}$$

Prueba. Sea $\mathfrak{z}^\omega = \{x \in \mathfrak{n} \,/\, \omega(x,z) = 0 \ \forall z \in \mathfrak{z}\}$ el ortogonal del centro respecto de ω. Dado que ω es no degenerada, resulta $\dim \mathfrak{n} = \dim \mathfrak{z} + \dim \mathfrak{z}^\omega$. Por otro lado $\dim \mathfrak{n} = \dim \mathfrak{n}' + \dim(\mathfrak{n}/\mathfrak{n}')$. Probaremos que $\dim \mathfrak{n}' \leq \dim \mathfrak{z}^\omega$ y de la igualdad

$$\dim \mathfrak{z} + \dim \mathfrak{z}^\omega = \dim \mathfrak{n}' + \dim(\mathfrak{n}/\mathfrak{n}')$$

resultará la tesis.

Sea $y = [y_1, y_2]$ un elemento en el conmutador de $\mathfrak{n}$, entonces

$$\omega(x,y) = \omega(x,[y_1,y_2]) = \omega([x,y_2],y_1) + \omega([x,y_1],y_2) = 0$$

pues ω es cerrada y $x \in \mathfrak{z}$. Luego $\mathfrak{n}' \subseteq \mathfrak{z}^\omega$ y por lo tanto $\dim \mathfrak{n}' \leq \dim \mathfrak{z}^\omega$. ■

La condición (4.1) no es suficiente en general pues para el álgebra de Lie del Ejemplo 4.1.3 vale la igualdad en dicha ecuación. Sin embargo cuando nos restringimos a la familia de álgebras provenientes de grafos, ésta sí es suficiente (ver [61]).

El estudio de la existencia de estructuras simplécticas está ligado a la comprensión del núcleo de la aplicación $d : \Lambda^2\mathfrak{n}^* \longrightarrow \Lambda^3\mathfrak{n}^*$. El siguiente resultado da un subespacio estrictamente menor que $\Lambda^2\mathfrak{n}^*$ que contiene el conjunto de 2-formas cerradas. El mismo fue utilizado en la Sección 3.2 del capítulo anterior. Aquí damos su demostración.

Proposición 4.1.9 (Lemma 2.8.,[4])**.** *En un álgebra de Lie k-pasos nilpotente $\mathfrak{n}$,*

$$Z^2 \subseteq \Lambda^2 V_{k-1} \oplus (V_1 \otimes (\mathfrak{n}^{k-1})^*),$$

donde los espacios V_1 y V_{k-1} son los definidos en (1.2) y $(\mathfrak{n}^{k-1})^*$ es el dual del último paso de la serie central descendente.

Prueba. Sea $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_t, e_{t+1} \ldots, e_{s-1}, e_s, \ldots, e_m\}$ una base de $\mathfrak{n}$ de manera que $V_1 = span\{e^1, \ldots, e^t\}$ y $\mathfrak{n}^{k-1} = span\{e_s, \ldots, e_m\}$ y $V_{k-1} = span\{e^1, \ldots, e^{s-1}\}$. Observemos que $\mathfrak{n}^* = V_{k-1} \oplus (\mathfrak{n}^{k-1})^*$ ya que $V_{k-1} = (\mathfrak{n}^{k-1})^\circ$. Entonces, $\Lambda^2\mathfrak{n}^* = \Lambda^2 V_{k-1} \oplus\ V_{k-1} \otimes (\mathfrak{n}^{k-1})^*\ \oplus\ \Lambda^2(\mathfrak{n}^{k-1})^*$.

Sea ω una 2-forma cerrada, entonces

$$0 = \omega(z, [y_1, y_2]) = \omega([z, y_2], y_1) + \omega([x, y_1], y_2) = 0 \quad \text{para todo } z \in \mathfrak{n}^{k-1},\ y_1, y_2 \in \mathfrak{n} \tag{4.2}$$

pues $d\omega = 0$ y $\mathfrak{n}^{k-1} \subseteq \mathfrak{z}$.

Escribimos

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3, \qquad \text{con } \omega_1 = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=s}^{m} a_{ij} e^i \wedge e^j, \quad \omega_2 = \sum_{i=t+1}^{m}\sum_{j=s}^{m} b_{ij} e^i \wedge e^j \quad \text{y } \omega_3 \in \Lambda^2 V_{k-1}. \tag{4.3}$$

Notemos que $\omega_1 \in V_1 \otimes (\mathfrak{n}^{k-1})^*$. Vamos a probar que $\omega_2 = 0$.

Dado que $e_i \in \mathfrak{n}^{k-1}$ si $i \in \{s, \ldots, m\}$ y $e_j \in \mathfrak{n}'$ si $t+1 \le j \le m$, entonces por (4.2) y (4.3) se tiene

$$0 = \omega(e_i, e_j) = b_{ij}, \qquad \text{si } t+1 \le i \le n \text{ y } s \le j \le m,$$

resultando $\omega_2 = 0$. ■

Para finalizar esta sección retomamos el ejemplo de la familia $\mathcal{V}_n$ (ver Ejemplo 4.1.5) a través de la cual damos respuesta a una pregunta planteada por Guan en [31] sobre el grado de solubilidad de un álgebra de Lie nilpotente simpléctica.

La serie derivada de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es la siguiente serie de ideales:

$$\mathcal{D}^0 = \mathfrak{g}, \qquad \mathcal{D}^i = [\mathcal{D}^{i-1}, \mathcal{D}^{i-1}], \qquad i \ge 1.$$

Diremos que $\mathfrak{g}$ es *p-pasos soluble* si $\mathcal{D}^p = 0$ y $\mathcal{D}^{p-1} \neq 0$ y en ese caso denominamos *grado de solubilidad* al entero p. Toda álgebra nilpotente es soluble pero su grado de solubilidad puede ser muy menor al de nilpotencia.

En el trabajo de Guan [31], sobre nilvariedades simplécticas, se plantea una pregunta sobre la existencia de alguna cota en el grado de solubilidad de un álgebra de Lie nilpotente simpléctica. Más precisamente, él conjetura que un álgebra de Lie nilpotente simpléctica es a lo sumo cuatro pasos solubles. Damos un contraejemplo a esta conjetura en la siguiente proposición, con lo cual probamos que la misma no es válida.

Proposición 4.1.10. *Para cada $s \in \mathbb{N}$ fijo existe un álgebra de Lie nilpotente simpléctica de grado de solubilidad s, a saber, $\mathcal{V}_{2^s}$.*

Prueba. Sólo resta probar el grado de solubilidad. Haciendo inducción sobre i resulta

$$\mathcal{D}^i\mathcal{V}_n = span\left\{e_j : j \ge \min\{2^{i+1} - 1, n\}\right\}.$$

Se deduce inmediatamente que si $n = 2^s$ entonces $\mathcal{D}^{s-1}\mathcal{V}_n \neq 0$ y $\mathcal{D}^s\mathcal{V}_n = 0$. ■

4.2. Álgebras de Lie nilpotentes libres

El problema de existencia de estructuras en álgebras de Lie nilpotentes no es sencillo en general. No hay condiciones suficientes generales para que un álgebra de Lie nilpotente admita una tal estructura. En la bilbiografía se encuentran diferentes maneras de encarar este problema.

Una de las mismas es estudiar caso por caso cuando se tenga una clasificación de las álgebras de Lie. El trabajo de Goze y Bouyakoub en [27] antes mencionado sigue esta línea pues analizan una por una las álgebras dadas en la clasificación de Morosov [54].

Por otro lado, el problema puede tratarse en subfamilias de álgebras de Lie nilpotentes a partir de las propiedades que la determinan. Por ejemplo, en el trabajo de Dotti y Tirao [21] visto en la Sección 3.3, se estudia la existencia de estructuras simplécticas en las álgebas de Lie de tipo Heisenberg. Dentro de las álgebras de Lie filiformes, la clasificación de las simplécticas está dada en [53]. Entre las álgebras asociadas a grafos, una descripción completa de aquellas que son simplécticas puede hacerse en términos del grafo correspondiente ([61]).

Siguiendo esta última línea de trabajo, en esta sección nos restringimos a la familia de álgebras de Lie nilpotentes libres. Precisamente se presenta una descripción explícita de aquellas álgebras en la familia que admiten estructuras simplécticas.

Recordemos que el álgebra de Lie k-pasos nilpotente libre en m generadores $\mathfrak{n}_{m,k}$ es el álgebra de Lie cociente $\mathfrak{n}_{m,k} = \mathfrak{f}_m/\mathfrak{f}_m^k$ donde $\mathfrak{f}_m$ denota el áglebra de Lie libre en m generadores, con $m \geq 2$. (Note que un único elemento genera un álgebra de Lie abeliana).

La imagen de un conjunto generador de $\mathfrak{f}_m$ por el mapa cociente induce un *conjunto generador* de $\mathfrak{n}_{m,k}$. A cada conjunto ordenado de generadores $\{e_1, \ldots, e_m\}$ se le asocia una base de $\mathfrak{n}_{m,k}$, llamada *Base de Hall* (ver [32]). Estudiaremos la estructura de las álgebras de Lie nilpotentes libres a través de estas bases. Su construcción es la siguiente.

Definimos la *longitud* ℓ de cada generador como 1. Los corchetes de Lie $[e_i, e_j]$ para $i > j$, satisfacen por definición $\ell([e_i, e_j]) = 2$. Ahora los elementos $e_1, \ldots, e_m$, $[e_i, e_j]$, $i > j$ pertenecen a la base de Hall. Considere un orden total en tal conjunto extendiendo el orden del conjunto generador y tal que $E > F$ si $\ell(E) > \ell(F)$. Éstos permiten la construcción de los elementos de longitud 3 y más.

Recursivamente, cada elemento de la base de Hall de $\mathfrak{n}_{m,k}$ se define como sigue. Los generadores $e_1, \ldots, e_m$ son elementos de la base de longitud 1. Supongamos tenemos definidos los elementos de la base de longitud $1, \ldots, r-1 \leq k-1$, con un orden total que verifica $E > F$ si $\ell(E) > \ell(F)$.

Si $\ell(E) = s$ y $\ell(F) = t$ con $r = s + t \leq k$, entonces $[E, F]$ es un elemento en la base de longitud r si las dos condiciones siguientes se satisfacen:

i. E y F son elementos en la base con $E > F$,

ii. si $\ell(E) > 1$ y $E = [G, H]$ es la única descomposición con G, H en la base, entonces $F \geq H$.

Una vez fijada una base de Hall de $\mathfrak{n}_{m,k}$, denotamos por $\mathfrak{p}(m,s)$ el espacio generado por aquellos elementos en la base de longitud s. Estos espacios definen una graduación de $\mathfrak{n}_{m,k}$ ya que

$$\mathfrak{n}_{m,k} = \mathfrak{p}(m,1) \oplus \mathfrak{p}(m,2) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{p}(m,k) \quad \text{donde} \quad [\mathfrak{p}(m,s), \mathfrak{p}(m,t)] \subseteq \mathfrak{p}(m, s+t).$$

Los elementos de la base de Hall en $\mathfrak{p}(m,s)$ se dicen elementos de homogéneos de longitud s.

La serie central descendente de un álgebra de Lie nilpotente libre $\mathfrak{n}_{m,k}$ se escribe en términos de la graduación

$$\mathfrak{n}^r_{m,k} = \oplus^k_{s=r+1} \mathfrak{p}(m,s).$$

Esta propiedad es consecuencia del hecho que todo corchete de $r+1$ elementos de $\mathfrak{n}_{m,k}$ es una combinación lineal de corchetes de $r+1$ elementos en la base de Hall ([32], [3]). Es decir $C^r(\mathfrak{n}_{m,k}) \subseteq \oplus^k_{s=r+1}\mathfrak{p}(m,s)$; la otra inclusión es obvia. En particular, $\mathfrak{p}(m,k) = C^{k-1}(\mathfrak{n}_{m,k}) \subseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{n}_{m,k})$. De hecho, esta inclusión es una igualdad ya que si $x \in \mathfrak{z}(\mathfrak{n}_{m,k})$ y e_i es un generador, entonces $[x, e_i] = 0$. Siendo $\mathfrak{n}_{m,k} = \mathfrak{f}_m/\mathfrak{f}^k_m$, tomamos representantes, $\tilde{x}$ y $\tilde{e}_i$, donde $\tilde{e}_i$ es un generador de $\mathfrak{f}_m$. Por lo tanto $[\tilde{x}, \tilde{e}_i] \in \mathfrak{f}^k_m$ lo cual implica que $x \in \mathfrak{p}(m,k)$. Luego

$$\mathfrak{p}(m,k) = \mathfrak{z}(\mathfrak{n}_{m,k}) \tag{4.4}$$

Denotamos con $d_m(s)$ la dimensión de $\mathfrak{p}(m,s)$. Entonces por [64],

$$s \cdot d_m(s) = m^s - \sum_{r|s, r<s} r \cdot d_m(r), \qquad s \geq 1. \tag{4.5}$$

o equivalentemente

$$d_m(s) = \frac{1}{s} \sum_{r|s} \mu(r) \cdot r^{s/r}, \qquad s \geq 1. \tag{4.6}$$

donde μ es la función de Möebius.

En particular, $d_m(1) = m$ y $d_m(2) = m(m-1)/2$. Según (4.4), $\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{n}_{m,k}) = d_m(k)$. Notemos que no se devela una fórmula explícita para $d_m(k)$ a partir de (4.5).

Ejemplo 4.2.1. *Dado un conjunto ordenado de generadores $e_1, \ldots, e_m$ del álgebra de Lie 2-pasos nilpotente libre $\mathfrak{n}_{m,2}$, una base de Hall es*

$$\mathcal{B} = \{e_i, \, [e_j, e_k] : \, i = 1, \ldots, m, \, 1 \leq k < j \leq m\}.$$

De acuerdo con (4.5) $\dim \mathfrak{n}_{m,2} = d_m(1) + d_m(2) = m + m(m-1)/2$ *y dado que* $\mathfrak{z}(\mathfrak{n}_{m,2}) = \mathfrak{p}(m,2)$, *resulta* $\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{n}_{m,2}) = m(m-1)/2$.

Ejemplo 4.2.2. *Para el álgebra de Lie 3-pasos nilpotente libre en m generadores $\mathfrak{n}_{m,3}$ una base de Hall correspondiente a un conjunto de generadores ordenado como antes es*

$$\mathcal{B} = \{e_i, \, [e_j, e_k], \, [[e_r, e_s], e_t] : \, i = 1, \ldots, m, \, 1 \leq k < j \leq m, \, 1 \leq s < r \leq m, \, t \geq s\}.$$

Dado que $\mathfrak{z}(\mathfrak{n}_{m,3}) = \mathfrak{p}(m,3)$, tenemos

$$\dim \, \mathfrak{z}(\mathfrak{n}_{m,3}) = d_m(3) = m(m^2-1)/3.$$

Con estos elementos, estamos en condiciones de probar el teorema de clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes libres que admiten estructuras simplécticas.

Desarrollamos de la condición (4.1) de la sección anterior para el caso de álgebras de Lie nilpotentes libres.

Es claro que $\dim(\mathfrak{n}_{m,k}/\mathfrak{n}'_{m,k}) = m$ para el álgebra de Lie k-pasos nilpotente libre en m generadores $\mathfrak{n}_{m,k}$. A partir de la fórmula (4.1) deducimos el siguiente corolario.

Corolario 4.2.3. *Sea $\mathfrak{n}_{m,k}$ el álgebra de Lie k-pasos nilpotente libre en m generadores y consideremos el álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^t \oplus \mathfrak{n}_{m,k}$ con $t = 0$ si $\dim \mathfrak{n}_{m,k}$ es par o $t = 1$ si $\dim \mathfrak{n}_{m,k}$ es impar. Si $\mathfrak{g}$ admite estructuras simplécticas entonces*

$$\dim \mathfrak{z}\,(\mathfrak{n}_{m,k}) \leq m. \tag{4.7}$$

Prueba. Si $\dim \mathfrak{n}_{m,k}$ es par, entonces $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_{m,k}$ y la ecuación (4.7) sigue de la Proposición 4.1.8. Sea $\mathfrak{g}$ la suma directa $\mathbb{R} \oplus \mathfrak{n}_{m,k}$ donde $\mathfrak{n}_{m,k}$ tiene dimensión impar. En este caso, $\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{n}_{m,k}) + 1$. Además, $\dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}') = \dim(\mathfrak{n}_{m,k}/\mathfrak{n}'_{m,k}) + 1$ ya que $\mathfrak{g}' = \mathfrak{n}'_{m,k}$. Por lo tanto, la condición (4.1) para $\mathfrak{g}$ es equivalente a (4.7). ■

Esta condición sobre la dimensión del centro es muy restrictiva en las álgebras de Lie nilpotentes libres ya que en general esta dimensión es grande en comparación con la cantidad de generadores.

Teorema 4.2.4 ([14])**.** *Sea $\mathfrak{n}_{m,k}$ el álgebra de Lie k-pasos nilpotente libre en m generadores.*

1. *Si $\dim \mathfrak{n}_{m,k}$ es par entonces $\mathfrak{n}_{m,k}$ admite estructuras simplécticas si y sólo si $(m, k) = (3, 2)$.*

2. *Si $\dim \mathfrak{n}_{m,k}$ es impar, la extensión abeliana unidimensional $\mathbb{R}\oplus\mathfrak{n}_{m,k}$ admite estructuras simplécticas si y sólo si $(m, k) = (2, 2)$.*

Prueba. Sea $\mathfrak{n}_{m,k}$ el álgebra de Lie k-pasos nilpotente libre en m generadores. Separamos la prueba por orden de nilpotencia k de $\mathfrak{n}_{m,k}$.

• $k = 2$. Como vimos en el Ejemplo 4.2.1, la dimensión del centro de $\mathfrak{n}_{m,2}$, es $m(m-1)/2$. Es fácil ver que $\dim\, \mathfrak{z}(\mathfrak{n}_{m,2}) > m$ salvo para $m = 2$ y $m = 3$. De esto y (4.7) en el Corolario 4.2.3, $\mathfrak{n}_{m,2}$ o su extensión central unidimensional son no simplécticas para todo $m \geq 4$.

Si $m = 2$, el álgebra de Lie $\mathfrak{n}_{2,2}$ tiene dimensión tres y es precisamente el álgebra de Heisenberg $\mathfrak{h}_1$. Vimos que $\mathbb{R} \oplus \mathfrak{h}_1$ es simpléctica en el Teorema 3.3.10.

En el caso $m = 3$, el álgebra de Lie $\mathfrak{n}_{3,2}$ tiene dimensión seis y es la número 24 en la lista de la Sección 2.4. En la base ahí dada, la 2-forma $\omega = e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^6 + e^3 \wedge e^5$ define una estructura simpléctica en $\mathfrak{n}_{3,2}$.

• $k = 3$. Del Ejemplo 4.2.2 $\dim\, \mathfrak{z}(\mathfrak{n}_{m,3}) = m(m^2 - 1)/3$. Entonces (4.7) no se satisface si $m > 2$. Luego, $\mathfrak{n}_{m,3}$ y $\mathbb{R} \oplus \mathfrak{n}_{m,3}$ son no simplécticas si $m > 2$.

A pesar que $\dim\, \mathfrak{z}(\mathfrak{n}_{2,3})$ es igual a la cantidad de generadores, el álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{n}_{2,3}$ tiene dimensión seis y es la que presentamos en el Ejemplo 4.1.3 la cual vimos que no admite estructuras simplécticas.

A continuación probaremos que para todo $k \geq 4$ y $m \geq 2$ la dimensión de $\mathfrak{z}\,(\mathfrak{n}_{m,k})$ es siempre mayor que m. Este hecho junto con el Corolario 4.2.3 implican que ni $\mathfrak{n}_{m,k}$ ni su extensión central unidimensional son algebras de Lie simplécticas.

• $k = 4$. Recordemos que $\mathfrak{p}(m,4) = \mathfrak{z}(\mathfrak{n}_{m,4})$ por (4.4), entonces haciendo uso de (4.5):

$$\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{n}_{m,4}) = d_m(4) = \frac{1}{4}(m^4 - d_m(1) - 2d_m(2)) = \frac{m^2(m^2-1)}{4}.$$

Notar que $m^2(m^2-1)/4 > m$ siempre que $m \geq 2$.

• $k \geq 5$. Es posible encontrar una cota inferior de $\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{n}_{m,k})$ construyendo elementos diferentes de longitud k en una base de Hall $\mathcal{B}$ de $\mathfrak{n}_{m,k}$.

Sea $\{e_1, \ldots, e_m\}$ un conjunto generador de $\mathfrak{n}_{m,k}$ y consideramos el conjunto

$$\mathcal{U} \quad = \quad \{[[[e_i, e_j], e_k], e_m] : 1 \leq j < i \leq m,\ k \geq j\}.$$

Un elemento en $\mathcal{U}$ pertenece a la base y tiene longitud cuatro. Dado $x \in \mathcal{U}$, el corchete

$$[x, e_m]^{(s)} := [[[x, \overbrace{e_m], e_m] \cdots, e_m]}^{s} \quad s \geq 1$$

es un elemento de la base de Hall si $\ell([x, e_m]^{(s)}) \leq k$.

De hecho si $s = 1$ entonces $[x, e_m]^{(1)} = [x, e_m]$ y resulta:

i. ambos $x = [[[e_i, e_j], e_k], e_m] \in \mathcal{U}$ y e_m son elementos en la base de Hall y $x > e_m$ por su longitud;

ii. además $x = [G, H]$ con $G = [[e_i, e_j], e_k]$ y $H = e_m$ y tenemos $e_m \geq H$.

Luego las dos condiciones que definen los elementos de la base de Hall se satisfacen. Tenemos $[x, e_m]^{(1)} \in \mathcal{B}$ y también pertencen a $\mathfrak{n}^4_{m,k}$.

Inductivamente, supongamos que $[x, e_m]^{(s-1)} \in \mathcal{B}$, entonces claramente $[[[x, e_m], e_m] \cdots], e_m]^{(s-1)} > e_m$ y es posible escribir $[x, e_m]^{(s-1)} = [G, H]$ con $H = e_m$. Luego $[x, e_m]^{(s)} \in \mathcal{B}$. Notar que $[x, e_m]^{(s)} \in \mathfrak{n}^{s+3}_{m,k}$.

Construimos el siguiente conjunto

$$\widetilde{\mathcal{U}} := \{[x, e_m]^{(k-4)} : x \in \mathcal{U}\} \subseteq \mathfrak{n}^{k-1}_{m,k}.$$

Éste está contenido en el centro de $\mathfrak{n}_{m,k}$ y es un conjunto linealmente independiente. Por lo tanto

$$\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{n}_{m,k}) \geq |\widetilde{\mathcal{U}}|. \tag{4.8}$$

Es fácil ver que $\widetilde{\mathcal{U}}$ y $\mathcal{U}$ tienen el mismo cardinal. También, $|\mathcal{U}| = \sum_{j=1}^{m}(m-j+1)(m-j)$ puesto que para cada $j = 1, \ldots, m$ fijo, la cantidad de posibilidades de elegir $k \geq j$ e $i > j$ es $(m-j+1)$ y $(m-j)$ respectivamente.

Calculamos el cardinal de $\widetilde{\mathcal{U}}$ y resulta $|\widetilde{\mathcal{U}}| = 1/3\, m^3 + m^2 + 2/3\, m$ que junto con (4.8) prueba que para cada m y $k \geq 5$

$$\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{n}_{m,k}) \geq 1/3\, m^3 + m^2 + 2/3\, m.$$

El lado derecho de la ecuación anterior es mayor a m para todo $m \geq 2$. ■

4.3. Extensiones dobles de álgebras de Lie simplécticas

En los trabajos de Medina, Revoy y Dardié [52, 13] se introduce una forma de construir un álgebra de Lie simpléctica de dimensión $2n$ a partir de una de dimensión $2n-2$ y recíprocamente, muestran que toda álgebra simpléctica de dimensión $2n$ proviene de una dos dimensiones menor. Precisamente, caracterizan las álgebras de Lie simplécticas como aquellas que pueden obtenerse como una sucesión de dobles extensiones simplécticas partiendo del álgebra de Lie abeliana de dimensión dos.

En esta sección incluimos el Teorema de *Doble Extensión* (ver Teorema 4.3.1) que se encuentra en las referencias antes dadas. En su demostración explicamos este procedimiento de extensión y reducción de álgebras de Lie nilpotentes simplécticas. Para completitud de la presentación incluimos resultados sobre álgebras simétricas a izquierda.

Al final de la sección mostramos la construcción de una nueva familia de álgebras de Lie nilpotentes simplécticas $\mathcal{O}_{2m}$, $m \geq 2$. Probamos que las álgebras de Lie de esta familia admiten estructuras complejas hasta dimensión ocho. Las mismas resultan ejemplos de variedades compactas simplécticas y con estructuras complejas, pero que no son Kähler ([4]).

Dicha familia, como ejemplo de álgebras de Lie nilpotentes simplécticas, contrastan con los resultados de no existencia de estructuras simplécticas que presentamos en las secciones anteriores.

Teorema 4.3.1.

• **Extensión.** *Sea $(\mathfrak{n}, \omega)$ un álgebra de Lie simpléctica nilpotente, z un elemento cualquiera de $\mathfrak{n}$ y δ una derivación nilpotente tal que*

$$\omega(z, [a, b]) = -\omega((\delta^2 + 2\delta^*\delta + (\delta^*)^2)a, b), \;\; \forall\, a \in \mathfrak{n}. \tag{4.9}$$

Aquí δ^* es la transformación adjunta de δ via ω. Entonces $\tilde{\mathfrak{n}} = \mathbb{R}d \oplus \mathbb{R}e \oplus \mathfrak{n}$ con un corchete dado por

$$\begin{aligned} [d, a]_{\tilde{\mathfrak{n}}} &= -\delta(a) + \omega(z, a)\, e \quad \forall a \in \mathfrak{n} \\ [a, b]_{\tilde{\mathfrak{n}}} &= (\omega(\delta a, b) + \omega(a, \delta b))\, e + [a, b]_{\mathfrak{n}} \quad \forall a, b \in \mathfrak{n} \\ [a, e]_{\tilde{\mathfrak{n}}} &= [d, e]_{\tilde{\mathfrak{n}}} \;=\; 0 \end{aligned} \tag{4.10}$$

es un álgebra de Lie nilpotente. Además, si denotamos d^* y e^* los elementos duales a d y e respectivamente en $\tilde{\mathfrak{n}}^*$, la 2-forma $\tilde{\omega} = d^* \wedge e^* + \omega$ es una estructura simpléctica en $\tilde{\mathfrak{n}}$.

• **Reducción.** *Recíprocamente, dada un álgebra de Lie simpléctica nilpotente $(\tilde{\mathfrak{n}}, \tilde{\omega})$ y $e \in \mathfrak{z}(\tilde{\mathfrak{n}})$, existe un elemento $d \in \tilde{\mathfrak{n}}$ y un álgebra de Lie nilpotente simpléctica $(\mathfrak{n}, \omega)$ de manera que $\tilde{\mathfrak{n}} \cong \mathbb{R}d \oplus \mathbb{R}e \oplus \mathfrak{n}$ y $\tilde{\omega} = d^* \wedge e^* + \omega$.*

Además, es posible encontrar una derivación nilpotente δ de $\mathfrak{n}$ verificando (4.9) y un elemento $z \in \mathfrak{n}$ tal que el corchete en $\tilde{\mathfrak{n}}$ está dado por (4.10).

Probaremos separadamente las partes de extensión y reducción del teorema.

Prueba Extensión. Sea $\mathfrak{n}$ un algebra de Lie nilpotente, ω una estructura simpléctica y sea δ una derivación de $\mathfrak{n}$. Estos elementos definen una forma bilineal antisimétrica en $\mathfrak{n}$, $\beta_\delta : \mathfrak{n} \times \mathfrak{n} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\beta_\delta(x,y)=\omega(\delta x,y)+\omega(x,\delta y).$$

Esta 2-forma $\beta_\delta\in\Lambda^2\mathfrak{n}^*$ es cerrada, en efecto

$$\begin{aligned} d\beta_\delta(u,v,w) &= -\beta_\delta([u,v],w)+\beta_\delta([u,w],v)-\beta_\delta([v,w],u)\\ &= -\omega(\delta[u,v],w)-\omega([u,v],\delta w)+\omega(\delta[u,w],v)+\\ &\qquad +\omega([u,w],\delta v)-\omega(\delta[v,w],u)-\omega([v,w],\delta u), \end{aligned}$$

siendo cero el lado derecho de esta igualdad pues $d\omega=0$ y por la condición de Jacobi en $\mathfrak{n}$.

La representación nula $\rho:\mathfrak{n}\longrightarrow \mathrm{gl}(\mathbb{R})$ junto con la 2-forma β_δ definen una extensión central por un elemento e. Esta extensión central es un álgebra de Lie (ver, por ejemplo, [44]) que, como espacio vectorial, es la suma directa $\mathbb{R}e\oplus\mathfrak{n}$ y el corchete de Lie está dado por

$$[x+\lambda e, x'+\lambda' e]_{\mathbb{R}e\oplus\mathfrak{n}}=[x,x']_{\mathfrak{n}}+\beta_\delta(x,x')\,e \qquad x,x'\in\mathfrak{n},\lambda,\lambda'\in\mathbb{R}.$$

Supongamos que existe $z\in\mathfrak{n}$ de manera que

$$\omega((\delta^2+2\delta^*\delta+(\delta^*)^2)\,u,v)=-\omega(z,[u,v]),\quad \forall u,v\,\in\,\mathfrak{n}. \tag{4.11}$$

Entonces la aplicación $D:\mathbb{R}e\oplus\mathfrak{n}\longrightarrow\mathbb{R}e\oplus\mathfrak{n}$ definida por $D\,e=0$ y $D\,u=-\delta\,u+\omega(z,u)\,e$ es una derivación de $\mathbb{R}e\oplus\mathfrak{n}$. En efecto, $D[u,e]=0=[Du,De]$ pues e está en el centro de $\mathbb{R}e\oplus\mathfrak{n}$. Además si $u,\,v\in\mathfrak{n}$,

$$\begin{aligned} D[u,v]_{\mathbb{R}e\oplus\mathfrak{n}} &= D([u,v]_{\mathfrak{n}}+\beta_\delta(u,v)\,e)=D([u,v]_{\mathfrak{n}})=-\delta\,[u,v]_{\mathfrak{n}}+\omega(z,[u,v]_{\mathfrak{n}})\,e,\\ [Du,v]_{\mathbb{R}e\oplus\mathfrak{n}} &= [-\delta\,u-\omega(z,u)\,e,v]_{\mathbb{R}e\oplus\mathfrak{n}}=-[\delta u,v]_{\mathfrak{n}}+\beta_\delta(-\delta u,v)\,e,\\ [u,Dv]_{\mathbb{R}e\oplus\mathfrak{n}} &= [u,-\delta\,v-\omega(z,v)\,e]_{\mathbb{R}e\oplus\mathfrak{n}}=-[u,\delta v]_{\mathfrak{n}}+\beta_\delta(u,-\delta v)\,e. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} [Du,v]_{\mathbb{R}e\oplus\mathfrak{n}}+[u,Dv]_{\mathbb{R}e\oplus\mathfrak{n}} &= -[\delta u,v]_{\mathfrak{n}}+\beta_\delta(-\delta u,v)\,e-[u,\delta v]_{\mathfrak{n}}+\beta_\delta(u,-\delta v)\,e\\ &= -\delta[u,v]+(\omega(-\delta^2u,v)+\omega(-\delta u,\delta v)+\omega(\delta u,-\delta v)+\omega(u,-\delta^2 v))\,e\\ &= -\delta[u,v]-\omega((\delta^2+2\delta^*\delta+(\delta^*)^2)\,u,\,v)\,e\\ &= -\delta[u,v]+\omega(z,[u,v])\,e\\ &= D[u,v]_{\mathbb{R}e\oplus\mathfrak{n}}, \end{aligned}$$

dado que z satisface (4.11).

En ese caso consideramos el álgebra de Lie $\tilde{\mathfrak{n}}$ como el producto semidirecto de $\mathbb{R}e\oplus\mathfrak{n}$ por la derivación D. El álgebra de Lie $\tilde{\mathfrak{n}}$ se decompone como suma directa $\mathbb{R}d\oplus\mathbb{R}e\oplus\mathfrak{n}$ y tal que

- $\mathbb{R}e\oplus\mathfrak{n}$ es la extensión central de $\mathfrak{n}$ por β_δ,

- la acción de d en $\mathbb{R}e \oplus \mathfrak{n}$ es $[d,x]_{\tilde{\mathfrak{n}}} = -\delta x + \omega(z,x)\,e$, $[d,e]_{\tilde{\mathfrak{n}}} = 0$.

La 2-forma $\tilde{\omega} = e^* \wedge d^* + \omega$ es bilineal, antisimétrica y no degenerada. Más aún, es cerrada en $\tilde{\mathfrak{n}}$ ya que, dados $u, v, w \in \tilde{\mathfrak{n}}$, resulta

$$\tilde{\omega}([u,v]_{\tilde{\mathfrak{n}}}, w) + \tilde{\omega}([v,w]_{\tilde{\mathfrak{n}}}, u) + \tilde{\omega}([w,u]_{\tilde{\mathfrak{n}}}, v) = 0. \tag{4.12}$$

En efecto, si $u, v, w \in \mathfrak{n}$, entonces por la manera que está definida $\tilde{\omega}$,

$$\tilde{\omega}([u,v]_{\tilde{\mathfrak{n}}}, w) = \tilde{\omega}([u,v]_{\mathfrak{n}} + \beta_\delta(u,v)\,e, w) = \omega([u,v]_{\mathfrak{n}}, w).$$

Debido a que ω es cerrada en $\mathfrak{n}$ es válida la ecuación (4.12) también en este caso.

Si $u = e$ y $v, w \in \mathbb{R}\,d \oplus \mathfrak{n}$, como e está en el centro y el conmutador está contenido en $\mathfrak{n}$, la ecuación (4.12) es válida:

$$\tilde{\omega}([e,v]_{\tilde{\mathfrak{n}}}, w) + \tilde{\omega}([v,w]_{\tilde{\mathfrak{n}}}, e) + \tilde{\omega}([w,e]_{\tilde{\mathfrak{n}}}, v) = \tilde{\omega}([v,w]_{\tilde{\mathfrak{n}}}, e) = e^* \wedge d^*([v,w]_{\tilde{\mathfrak{n}}}, e) = -d^*([v,w]_{\tilde{\mathfrak{n}}}) = 0.$$

Finalmente, si $u = d$ y $v, w \in \mathfrak{n}$,

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}([d,v]_{\tilde{\mathfrak{n}}}, w) + \tilde{\omega}([v,w]_{\tilde{\mathfrak{n}}}, d) + \tilde{\omega}([w,d]_{\tilde{\mathfrak{n}}}, v) &= \tilde{\omega}(-\delta v + \omega(z,v)e, w) + \beta_\delta(v,w) + \omega(\delta w, v) \\
&= \tilde{\omega}(-\delta v, w) + \beta_\delta(v,w) + \omega(\delta w, v) \\
&= \tilde{\omega}(-\delta v, w) + \omega(\delta v, w) + \omega(v, \delta w) + \omega(\delta w, v) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Luego, vale (4.12) también en este caso. El caso que $u = d$ y $v, w \in \mathfrak{n} \oplus \mathbb{R}e$, es similar. Luego, al verificarse que la suma cíclica en (4.12) es cero para todos los casos antes mencionados, vale que $d\tilde{\omega} = 0$ y por lo tanto define una estructura simpléctica en $\tilde{\mathfrak{n}}$.

Con esto queda probada la parte de extensión del Teorema 4.3.1. Notaremos $(\mathfrak{n}, \omega)_{\delta,z}$ al álgebra de Lie simpléctica $(\tilde{\mathfrak{n}}, \tilde{\omega})$ así construida.

• **Prueba Reducción.** En primer lugar introducimos el concepto de álgebras simétricas a izquierda y estudiamos sus propiedades.

Definición 4.3.2. *Un espacio vectorial V munido de un producto bilineal xy que satisface*

$$(xy)z - x(yz) = (yx)z - y(xz), \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{n}$$

se llama un álgebra simétrica a izquierda (o álgebra SI).

Toda álgebra simétrica a izquierda V, es un álgebra de Lie considerando el corchete de Lie como

$$[x,y] = xy - yx. \tag{4.13}$$

Si $(\mathfrak{g}, [\,,\,])$ es un álgebra de Lie y además posee un producto que le da estructura de álgebra simétrica a izquierda de manera que el corchete definido por (4.13) coincide con el original del álgebra $\mathfrak{g}$, entonces diremos que las estructuras de álgebra de Lie y de álgebra SI son compatibles.

Lema 4.3.3. *Sea V un álgebra SI y $[x,y] = xy - yx$ el corchete de Lie definido por (4.13). Si ω es una 2-forma en V tal que para todos x, y, z en V*

1. $\omega(xy, z) + \omega(zy, x) = 0$,

2. $\omega(xy, z) + \omega(yz, x) + \omega(zx, y) = 0$.

entonces resulta $\omega([z,y],x) = \omega(zx,y)$ $\forall x,y,z \in V$ y ω es cerrada V. En particular si ω es no degenerada, define una estructura simpléctica en V.

Prueba. Por (4.13), $\omega([z,y],x) = \omega(zy - yz, x) = \omega(zy,x) - \omega(yz,x)$ que, por 1., resulta $\omega([z,y],x) = -\omega(xy,z) - \omega(yz,x)$. Haciendo uso de 2. tenemos

$$\omega([z,y],x) = \omega(yz,x) + \omega(zx,y) - \omega(yz,x) = \omega(zx,y).$$

La suma cíclica $\omega([x,y],z) + \omega([y,z],x) + \omega([z,x],y)$ es cero por la condición 2. y por lo tanto ω es cerrada. ■

Sea $(\tilde{\mathfrak{n}}, \tilde{\omega})$ un álgebra de Lie nilpotente simpléctica. Como ω es no degenerada, queda definido un producto en $\tilde{\mathfrak{n}}$ de la siguiente forma

$$\tilde{\omega}(ab, c) = \tilde{\omega}([a,c],b) \text{ para todo } a, b, c \in \tilde{\mathfrak{n}}. \tag{4.14}$$

Resulta $\tilde{\mathfrak{n}}$ un álgebra SI dado que $\tilde{\omega}$ es cerrada y el corchete de Lie es compatible con esta estrucutra, es decir, $[a,b] = ab - ba$.

Lema 4.3.4. *Sea $(\tilde{\mathfrak{n}}, \tilde{\omega})$ un álgebra de Lie nilpotente simpléctica y consideramos el producto SI definido por $\tilde{\omega}$ en $\tilde{\mathfrak{n}}$.*

1. *Un elemento x pertenece al centro de $\tilde{\mathfrak{n}}$ si y sólo si $xy = yx = 0$ $\forall\, y \in \tilde{\mathfrak{n}}$.*

2. *Sea $I = \mathbb{R}e$ con $e \in \mathfrak{z}(\tilde{\mathfrak{n}})$. Los conjuntos I e $I^{\perp} = \{y \in \tilde{\mathfrak{n}} : \tilde{\omega}(e,y) = 0\}$ son ideales biláteros según el producto SI e ideales del álgebra de Lie.*

3. *el álgebra de Lie $I^{\perp}/I$ hereda el prodcuto SI $(a+I)(b+I) = ab + I$ que es compatible con la estructura de álgebra de Lie, es decir $[a+I, b+I] = (a+I)(b+I) - (b+I)(a+I)$. Además, la 2-forma $\omega(a+I, b+I) = \tilde{\omega}(a,b)$ es no degenerada y verifica 1. y 2. del Lema 4.3.3 y por lo tanto es una estructura simpléctica en $I^{\perp}/I$.*

Prueba.

1. Dado $x \in \tilde{\mathfrak{n}}$, $[x,y] = 0$ para todo y si y sólo si $\tilde{\omega}([x,y],z) = 0$ para todo $z \in \tilde{\mathfrak{n}}$. Como $\tilde{\omega}$ es cerrada, $\tilde{\omega}([x,y],z) = -\tilde{\omega}([y,z],x) - \tilde{\omega}([z,x],y) = -\tilde{\omega}(yx,z) - \tilde{\omega}(yx,z) = -\tilde{\omega}(yx - xy, z)$ para todo $z \in \tilde{\mathfrak{n}}$. Luego $\tilde{\omega}([x,y],z) = 0$ para todo $z \in \tilde{\mathfrak{n}}$ es equivalente a $\tilde{\omega}(yx - xy, z) = 0$ para todo $z \in \tilde{\mathfrak{n}}$ y esto a $xy - yx = 0$ por ser $\tilde{\omega}$ no degenerada.

Resta probar que $xy = 0$. Por (4.14) se tiene, para todo $z \in \tilde{\mathfrak{n}}$,

$$\tilde{\omega}([z, y], x) = \tilde{\omega}(xy, z) = \tilde{\omega}(yx, z) = -\tilde{\omega}([z, x], y)$$

es cero pues $x \in \mathfrak{z}(\tilde{\mathfrak{n}})$. Luego $\tilde{\omega}(xy, z) = 0$ para todo $z \in \tilde{\mathfrak{n}}$ y por lo tanto $xy = 0$.

2. Claramente I es ideal del álgebra de Lie por estar contenido en el centro. Por el apartado anterior, también es ideal de álgebra SI ya que $ey = 0 \in I$ para todo $y \in \tilde{\mathfrak{n}}$.

Probemos las afirmaciones para $I^{\perp}$. Sean $y \in I^{\perp}$, $z \in \tilde{\mathfrak{n}}$ entonces $\tilde{\omega}([y, z], e) = -\tilde{\omega}([y, e], z) + \tilde{\omega}([e, z], y) = 0$ pues $e \in \mathfrak{z}(\tilde{\mathfrak{n}})$. Luego $[y, z] \in I^{\perp}$, $\forall z \in \tilde{\mathfrak{n}}$, $y \in I^{\perp}$.

Con respecto al producto SI, $\tilde{\omega}(yz, e) = \tilde{\omega}([e, z], y) = 0$ y $\tilde{\omega}(zy, e) = \tilde{\omega}([e, y], z) = 0$ y por lo tanto $yz, zy \in I^{\perp}$.

3. Como I es ideal central de $\tilde{\mathfrak{n}}$, $I^{\perp}/I$ es un álgebra de Lie con el corchete $[a+I, b+I] = [a, b]+I$. El subespacio I es ideal bilátero, por lo tanto el producto $(a+I)(b+I) = ab+I$ está bien definido. y se verifica $[a+I, b+I] = (a+I)(b+I) - (b+I)(a+I)$.

La 2-forma ω definida como $\omega(a + I, b + I) := \tilde{\omega}(a, b)$ está bien definida en $I^{\perp}/I$. En efecto, si $a - a' \in I$ entonces $\tilde{\omega}(a', b) = \tilde{\omega}(a + \lambda e, b) = \tilde{\omega}(a, b)$ ya que $\tilde{\omega}(e, b) = 0$ pues $b \in I^{\perp}$. Esta 2-forma es no degenerada, pues si $\omega(a + I, b + I) = 0$ para todo $b \in I^{\perp}$ entonces $\omega(a, b) = 0$ para todo $b \in I^{\perp}$ $\Rightarrow a \in (I^{\perp})^{\perp} \cap I^{\perp}$. Pero $\dim(I^{\perp})^{\perp} = 1$ e $I \subseteq I^{\perp}$ y por lo tanto $(I^{\perp})^{\perp} = I$. Luego $a \in I$, y por lo tanto $a + I \equiv 0$.

Finalmente, $\omega((a+I)(b+I), (c+I)) = \omega(ab+I, c+I) = \tilde{\omega}(ab, c) = \tilde{\omega}([a, c], b) = \omega([a, c]+I, b+I) = \omega([a + I, c + I], b + I)$. Luego ω es una 2-forma en $I^{\perp}/I$ que es un álgebra SI donde el corchete de Lie es compatible con esa estructura. Además, ω verifica 1. y 2. del Lema 4.3.3 y es no degenerada, lo cual implica que ω es simpléctica en $I^{\perp}/I$. ■

Observación 4.3.5. *El álgebra de Lie $I^{\perp}/I$ es un álgebra de Lie nilpotente ya que es un cociente de una subálgebra del álgebra de Lie nilpotente $\tilde{\mathfrak{n}}$.*

Referimos al artículo de Nijenhuis [57] por cohomología de álgebras simétricas a izquierda. Aquí sólo utilizaremos algunas propiedades básicas.

Definición 4.3.6. *Dada un álgebra simétrica a izquierda V, una aplicación bilineal $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ que verifica la siguiente condición*

$$f(ab - ba, c) = f(a, bc) - f(b, ac), \forall a, b, c \in V$$

se llama 2-cociclo de V. Denotamos con $Z^2_{SI}(V, \mathbb{R})$ al conjunto de 2-cociclos en V.

Lema 4.3.7 ([52])**.** *Sea $(\mathfrak{g}, \omega)$ un álgebra de Lie simpléctica y consideremos su estructura de álgebra SI dada por $\omega(ab, c) = \omega([c, b], a)$. Entonces, cada 2-cociclo f en $Z^2_{SI}(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$ define una derivación δ de $\mathfrak{g}$ bajo la siguiente fórmula*

$$f(a, b) = \omega(\delta a, b) \tag{4.15}$$

Comenzamos la prueba de la parte de reducción del teorema. Sea $(\tilde{\mathfrak{n}}, \tilde{\omega})$ un álgebra de Lie simpléctica y e un elemento en el centro de $\tilde{\mathfrak{n}}$. Consideramos el subespacio $I = \mathbb{R}e$ y el ideal de codimensión uno $I^{\perp}$. Según el Lema 4.3.4, el álgebra de Lie $I^{\perp}/I$ es nilpotente y simpléctica. Denotamos con $\mathfrak{n}$ al álgebra de Lie $I^{\perp}/I$ y ω la estructura simpléctica definida por el Lema 4.3.4 La sucesión

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow I^{\perp} \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de álgebras SI y de álgebras de Lie.

Fijamos una descomposición de $I^{\perp}$ en suma directa de espacios vectoriales $I^{\perp} = \mathbb{R}e \oplus \mathfrak{n}$. Para cada $a \in \mathfrak{n}$, notamos como $(0, a)$ a los elementos en $I^{\perp}$ según la descomposición anterior. Esta descomposición define un 2-cociclo f del álgebra SI $(\mathfrak{n}, \omega)$. Dados $a, b \in \mathfrak{n}$, el producto $(0, a)(0, b)$ en $I^{\perp}$ define $f(a, b)$ tal que

$$(0, a)(0, b) = (f(a, b), ab).$$

Aquí denotamos con ab el producto en $\mathfrak{n}$ dado en el punto 3. del Lema 4.3.4.

Veamos que $f \in Z^2_{SI}(\mathfrak{n}, \mathbb{R})$, es decir, $f(ab - ba, c) = f(a, bc) - f(b, ac)$ para todo $a, b, c \in \mathfrak{n}$. Por un lado, $(f(ab - ba, c), (ab - ba)c) = (0, ab - ba)(0, c)$ entonces

$$(f(ab-ba, c), 0) = (0, ab-ba)(0, c) - (0, (ab-ba)c) = (0, ab)(0, c) - (0, ba)(0, c) - (0, (ab-ba)c). \quad (4.16)$$

Como $\mathfrak{n}$ es un álgebra SI, resulta $(ab - ba)c = a(bc) - b(ac)$. Entonces

$$(f(ab - ba, c), 0) = (0, ab)(0, c) - (0, ba)(0, c) - (0, a(bc)) + (0, b(ac)). \quad (4.17)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} (f(a, bc), 0) &= (0, a)(0, bc) - (0, a(bc)) \\ (f(b, ac), 0) &= (0, b)(0, ac) - (0, b(ac)) \\ \Rightarrow (f(a, bc) - f(b, ac), 0) &= (0, a)(0, bc) - (0, a(bc)) - (0, b)(0, ac) + (0, b(ac)) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Comparando (4.17) y (4.18) sólo resta probar que

$$(0, a)(0, bc) - (0, b)(0, ac) = (0, ab)(0, c) - (0, ba)(0, c). \quad (4.19)$$

De la definición, reemplazamos cada producto $(0, uv)$ por su respectivo $-(f(u, v), 0) + (0, u)(0, v)$ teniendo que (4.19) equivale a

$$-(0, a)(f(b, c), 0) + (0, b) - (f(a, c), 0) = -(f(a, b), 0)(0, c) + (f(b, a), 0)(0, c). \quad (4.20)$$

Dado que $(f(u, v), 0) \in \mathbb{R}\, e = I$ y $(0, w) \in I^{\perp}$ cada producto en la igualdad anterior es cero, resultando válida la ecuación (4.19). Luego $f(ab - ba, c) = f(a, bc) - f(b, ac)$ lo cual implica $f \in Z^2_{SG}(\mathfrak{n}, \mathbb{R})$ como queríamos probar.

El algebra de Lie $(\mathfrak{n},\omega)$ es simpléctica y el producto SI en $\mathfrak{n}$ se define a través de ω. Luego del Lema 4.3.7 existe una derivación δ de $\mathfrak{n}$ de manera que $f(a,b)=\omega(\delta a,b)$ para todo $a,b\in\mathfrak{n}$. Escribiremos el corchete de Lie de $\tilde{\mathfrak{n}}$ en función del corchete de Lie de $\mathfrak{n}$. Probaremos luego que δ es una derivación nilpotente de $\mathfrak{n}$.

Sea $d\in\tilde{\mathfrak{n}}$ tal que $\tilde{\omega}((\lambda,a),d)=\lambda$. Este d es único una vez fijado el espacio $\mathfrak{n}$ complementario a $\mathbb{R}e$ en $I^{\perp}$ ya que $d\in\mathfrak{n}^{\perp}$ y $\tilde{\omega}(e,d)=1$. El álgebra $\tilde{\mathfrak{n}}$ descompone como suma directa $\tilde{\mathfrak{n}}=\mathbb{R}d\oplus I^{\perp}=\mathbb{R}d\oplus\mathbb{R}e\oplus\mathfrak{n}$. Hallaremos fórmulas para $d(0,a)$, $(0,a)d$ con $a\in\mathfrak{n}$; de aquí en mas notamos con a y b a los elementos $(0,a)$ y $(0,b)$ de $I^{\perp}$ respectivamente siempre que a y b pertenezcan a $\mathfrak{n}$.

De la definición de f y por la manera que fue elegido d se tiene para todo a, $b\in\mathfrak{n}$,

$$\tilde{\omega}(ad,b)=\tilde{\omega}((f(a,b)-f(b,a),ab-ba),d)=f(a,b)-f(b,a)=\omega((\delta+\delta^{*})a,b).$$

También,

$$\tilde{\omega}(ad,e)=0,\qquad \text{y}\qquad \tilde{\omega}(ad,d)=\lambda.$$

Como $\tilde{\omega}$ es no degenerada y λ es lineal en a

$$ad=(\delta+\delta^{*})a+\varphi(a)e,\quad \varphi\in\mathfrak{n}^{*}. \tag{4.21}$$

De la misma forma, como $[a,d]\in I^{\perp}$ y

$$-\tilde{\omega}(b,[a,d])=\tilde{\omega}([a,d],b)=\tilde{\omega}(ab,d)=\tilde{\omega}((f(a,b),(0,a)(0,b)),d)=f(a,b)=\omega(\delta a,b)$$

resulta

$$[a,d]=\delta a+\psi(a)e,\qquad \text{para algún } \psi\in\mathfrak{n}^{*} \tag{4.22}$$

De (4.21) y (4.22)

$$da=ad-[a,d]=\delta^{*}a+(\varphi-\psi)(a)e$$

y puesto que $\tilde{\omega}(da,d)=-\tilde{\omega}(a,[d,d])=0$ las funcionales lineales ψ y ϕ coinciden. Para calcular φ observemos que

$$\tilde{\omega}(d^{2},a)=\tilde{\omega}([d,a],d)=-\tilde{\omega}([a,d],d)=-\tilde{\omega}(\delta a+\varphi(a)e,d)=-\varphi(a).$$

Por lo tanto $\varphi=-\iota_{d^{2}}\tilde{\omega}$. El elemento $d^{2}\in\mathfrak{n}$, en efecto, $\tilde{\omega}(d^{2},d)=0$.

Resumiendo, escribimos a $\tilde{\mathfrak{n}}$ como suma directa $\tilde{\mathfrak{n}}=\mathbb{R}d\oplus\mathfrak{n}\oplus\mathbb{R}e$ donde $\mathfrak{n}$ es un álgebra de Lie simpléctica nilpotente, dados $x+\lambda e,x'+\lambda'e\in I^{\perp}=\mathfrak{n}\oplus\mathbb{R}e$, el corchete es

$$\begin{aligned}[x+\lambda e,x'+\lambda']_{I^{\perp}} &= [x+\lambda e,x'+\lambda']_{\tilde{\mathfrak{n}}}=(x+\lambda e)(x'+\lambda'e)-(x'+\lambda'e)(x+\lambda e)\\ &= xx'-x'x \;=\; (f(x,x')-f(x',x),[x,x']_{\mathfrak{n}})\end{aligned}$$

de lo cual se deduce

$$[x+\lambda e,x'+\lambda']_{I^{\perp}}=\big(\omega(\delta x,x')-\omega(\delta x',x)\big)\;e+[x,x']_{\mathfrak{n}}=\beta_{\delta}(x,x')e+[x,x']_{\mathfrak{n}}$$

siendo $\beta_\delta(x,x') = \omega\left((\delta+\delta^*)x, x'\right)$. Observemos que $d\beta_\delta = 0$; luego $I^\perp$ es la extensión central de $\mathfrak{n}$ por β_δ.

Además, $I^\perp$ es un ideal de codimensión uno de $\tilde{\mathfrak{n}}$ y la acción de d en $I^\perp$ está dada por el corchete de Lie en $\tilde{\mathfrak{n}}$, que, por (4.21) y ecuaciones subsiguientes es

$$[d,a]_{\tilde{\mathfrak{n}}} = -\delta a + \iota_{d^2}\tilde{\omega}(a)\, e \;\; \forall a\in\mathfrak{n} \quad \text{ y } \quad [d,e]=0.$$

La relación entre el corchete de Lie en $\tilde{\mathfrak{n}}$ y el de $\mathfrak{n}$, esto es, dados $x, x' \in \mathfrak{n}$

$$[x,x']_{\tilde{\mathfrak{n}}} = \big(f(x,x') - f(x',x)\big)\; e + [x,x']_{\mathfrak{n}}.$$

Notamos con ad_d la derivación interior de $\tilde{\mathfrak{n}}$ definida por d. La igualdad

$$\operatorname{ad}_d[a,b]_{\tilde{\mathfrak{n}}} = [\operatorname{ad}_d a, b]_{\tilde{\mathfrak{n}}} + [a, \operatorname{ad}_d b]_{\tilde{\mathfrak{n}}}$$

implica que δ verifica la ecuación (4.9).

Afirmamos que en $\tilde{\mathfrak{n}}$ se verifica

$$\operatorname{ad}_d^k a = (-1)^k\{\delta^k a - \omega(d^2, \delta^{k-1}a\,)e\} \tag{4.23}$$

para todo $a\in\mathfrak{n}$ y $k\geq 1$.

En efecto, la regla es válida para $k=1$ por lo visto anteriormente. Inductivamente, la suponemos válida para $k\geq 1$, entonces

$$\begin{aligned} \operatorname{ad}_d^{k+1} a &= [d, \operatorname{ad}_d^k a]_{\tilde{\mathfrak{n}}} = [d, (-1)^k\{\delta^k a - \omega(d^2,\delta^{k-1}a\,)e\}]_{\tilde{\mathfrak{n}}} \\ &= (-1)^k[d,\delta^k a]_{\tilde{\mathfrak{n}}} = (-1)^k(-\delta^{k+1}a + \tilde{\omega}(d^2,\delta^k a)\, e). \end{aligned}$$

De aquí en mas denotaremos z al elemento d^2 de $\mathfrak{n}$.

Dado que $\tilde{\mathfrak{n}}$ es nilpotente existe un natural k tal que $\operatorname{ad}_d^k a \equiv 0$ para todo $a\in\mathfrak{n}$. Luego, por la ecuación (4.23), $\delta^k a = 0\ \forall a\in\mathfrak{n}$ y δ resulta una derivación nilpotente. Como $\mathfrak{n}$ es un subcociente de $\tilde{\mathfrak{n}}$ es también un álgebra de Lie nilpotente con índice de nilpotencia menor o igual que k.

En particular, si $\tilde{\mathfrak{n}}$ es k-pasos nilpotente, entonces los índices de nilpotencia de $\mathfrak{n}$ y δ son menores o iguales que k.

Queda así finalizada la prueba de la parte de reducción del Teorema de Doble Extensión.

Como consecuencia de este teorema, toda álgebra de Lie nilpotente simpléctica $(\tilde{\mathfrak{n}},\tilde{\omega})$ de dimensión $2m$ es doble extensión de una álgebra de Lie nilpotente simpléctica $(\mathfrak{n},\omega)$ de dimensión $2m-2$. Es decir, para toda par $(\tilde{\mathfrak{n}},\tilde{\omega})$ como recién, existe un álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{n}$, una estructura simpléctica ω en $\mathfrak{n}$, una derivación nilpotente δ de $\mathfrak{n}$ satisfaciendo (4.9) y un elemento $z\in\mathfrak{n}$ de manera que $(\tilde{\mathfrak{n}},\tilde{\omega}) = (\mathfrak{n},\omega)_{\delta,z}$.

Observación 4.3.8. *Supongamos que* $(\tilde{\mathfrak{n}}, \tilde{\omega}) = (\mathfrak{n}, \omega)_{\delta,z}$. *Entonces si* $\tilde{\mathfrak{n}}$ *es abeliana,* $\mathfrak{n}$ *también y* δ *es la derivación nula.*

Por otro lado se desprende de la última parte de la prueba que si $\tilde{\mathfrak{n}}$ *es 2-pasos nilpotente, entonces* $\mathfrak{n}$ *y* δ *son a lo sumo 2-pasos nilpotentes. En este caso, la ecuación (4.23) implica que* $z \in \operatorname{Im}\delta^{\perp}$.

Un camino a la clasificación de las álgebras de Lie 2-pasos nilpotente simplécticas de dimensión ocho es extender tales álgebras de dimensión seis, variando la elección de la derivación δ *y* $z \in \mathfrak{n}$.

Estas ideas de doble extensión no sólo se pueden observar en los trabajos de Medina, Revoy y Dardié antes mencionados, sino también Guan en [31] presenta ideas de extensión y reducción de álgebras nilpotentes simplécticas. Comparando ambos, la desarrollada por Guan coincide con la introducida por Medina y Revoy pero para el caso particular $z = 0$.

A través de la reducción de las álgebras de Lie $\mathcal{V}_n$ del Ejemplo 4.1.5 construimos una nueva familia de álgebras de Lie simplécticas nilpotentes.

<u>Familia de álgebras de Lie nilpotentes simplécticas.</u>

Para cada k fijo, el álgebra de Lie $\mathcal{V}_{2k}$ es filiforme y tiene una base $\{e_1, \dots, e_{2k}\}$ donde los corchetes no nulos son

$$[e_i, e_j] = \begin{cases} (j-i)\, e_{i+j} & si \quad i+j \le 2k \\ 0 & si \quad i+j > 2k \end{cases}.$$

Además la 2-forma

$$\omega_{2k} = (2k-1)e^1 \wedge e^{2k} + (2k-3)e^2 \wedge e^{2k-1} + \cdots + e^k \wedge e^{k+1} \tag{4.24}$$

define una estructura simpéctica en $\mathcal{V}_{2k}$ ([2]).

Consideramos en $\mathcal{V}_{2k}$ el elemento $e = \frac{-1}{2k-1}\, e_{2k} \in \mathfrak{z}(\mathcal{V}_{2k})$. Aplicaremos la parte de reducción del Teorema 4.3.1 con los elementos $\tilde{\mathfrak{n}} = \mathcal{V}_{2k}$, $e = \frac{-1}{2k-1}\, e_{2k}$.

Notamos con I el espacio generado por e, $I = \mathbb{R}\, e \subseteq \mathfrak{z}(\mathcal{V}_{2k})$. Según (4.24), $I^{\perp} = span\{e_2, \dots, e_{2k}\}$. Descomponemos $I^{\perp} = span\{e_2, \dots, e_{2k-1}\} \oplus \mathbb{R}\, e_{2k}$ y consideramos el álgebra de Lie $\mathfrak{n} = I^{\perp}/I$.

Para todo $x \in \mathfrak{n}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, $\omega_{2k}(\lambda\, e + x, e_1) = \frac{-\lambda}{2k-1}\, \omega_{2k}(e_{2k}, e_1) = \lambda$. Entonces $d = e_1$. Igualando $\omega_{2k}(d^2, y) = \omega_{2k}([d, y], d)$ para todo $y \in \mathcal{V}_{2k}$, obtenemos que

$$d^2 = \frac{(2k-2)(2k-1)}{2k-3}\, e_2$$

La derivación de $\mathfrak{n}$ está dada por $\delta(\cdot) = -\operatorname{ad}_d(\cdot) + \frac{1}{2k-1}\, \iota_{d^2}\omega(\cdot)\, e_{2k}$, explícitamente

$$\delta(e_i) = \begin{cases} -(i-1)\, e_{i+1} & 2 \le i \le 2k-2 \\ 0 & i = 2k-1 \end{cases}.$$

Notar que δ es $2k-4$ pasos nilpotente. Una base del cociente $\mathfrak{n} = I^{\perp}/I$ es $\{e_2 + I, \dots, e_{2k-1} + I\}$. Definiendo $x_i = e_{i+1} + I$, $i = 1, \dots, 2k-2$ presentamos esa base como $\{x_1, \dots, x_{2m}\}$, $m = k-1$, y los corchetes no nulos son

$$[x_i, x_j] = \begin{cases} (j-i)\, x_{i+j+1}, & si\ i+j < 2m \\ 0 & si\ i+j \geq 2m \end{cases} \tag{4.25}$$

Además la estructura simpléctica reducida se escribe en esa base de la siguiente manera:

$$\Omega_{2m} = (2m-1)x^1 \wedge x^{2m} + (2m-3)x^2 \wedge x^{2m-1} + \cdots + x^m \wedge x^{m+1}. \tag{4.26}$$

La derivación δ en la misma base es $\delta(x_i) = -i\, x_{i+1}$ si $1 \leq i \leq m-1$ y $\delta(x_{2m}) = 0$. Denotamos $\mathcal{O}_{2m}$ al álgebra con corchetes como en (4.25). Por el Teorema de Doble Extensión $\mathcal{V}_{2(m+1)}$ es la extensión de $\mathcal{O}_{2m}$ por la derivación (4.26) y tomando $z = 2m(2m+1)\, x_1/(2m-1)$.

Observemos que probar de manera directa que Ω_{2m} es cerrada en $\mathcal{O}_{2m}$ no es trivial. Sin embargo, habiendo construido Ω_{2m} como forma simpléctica reducida, el teorema garantiza que es una 2-forma cerrada.

En la base $\{x_i\}_{i=1}^{2m}$, el centro es $\mathfrak{z}(\mathcal{O}_{2m}) = span\{x_{2m-1}, x_{2m}\}$. En particular, $\mathcal{O}_{2m}$ no es filiforme. Además, $\mathcal{O}_{2m} \cong \mathcal{O}_{2m+2}/\mathfrak{z}(\mathcal{O}_{2m+2})$.

En lo que sigue, veremos que las álgebras de $\mathcal{O}$ de dimensión ≤ 8 son álgebras complejas. Comenzamos con la definición de este tipo de estructuras en álgebras de Lie.

Una *estructura casi compleja* en un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es un endomorfismo $J : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ de manera que $J^2 = -\operatorname{id}_{\mathfrak{g}}$. La estructura casi compleja en $\mathfrak{g}$ se dice *compleja* si

$$J[x,y] = [Jx, y] + [x, Jy] + J[Jx, Jy], \quad \text{para todos } x, y \in \mathfrak{g}. \tag{4.27}$$

En este caso, el Teorema de Newlander-Nirenberg implica que la nilvariedad $\Gamma \backslash G$ es una variedad compleja [56].

Observemos que toda álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ que admite una estructura casi compleja tiene dimensión par.

Ejemplo 4.3.9. *Las álgebras de Lie abelianas admiten estructuras complejas ya que todo endomorfismo $J : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ tal que $J^2 = -\operatorname{id}_{\mathbb{R}^{2n}}$, satisface (4.27).*

Proposición 4.3.10. *Para cada $m \leq 4$, $\mathcal{O}_{2m}$ es un álgebra de Lie compleja.*

Prueba. Para $m = 1$, $\mathcal{O}_2$ es abeliana de dimensión dos que admite estructuras complejas. Notemos que $\mathcal{O}_4 \simeq \mathbb{R} \oplus \mathfrak{h}_1$ donde $\mathfrak{h}_1$ es el álgebra de Heisenberg de dimensión tres.

Sea $\{x_i\}_{i=1}^{2m}$ la base de $\mathcal{O}_{2m}$ dada arriba. Para cada $m = 2, 3, 4$ definimos un endomorfismo J que claramente verifica $J^2 = -\operatorname{id}$:

$$\begin{aligned} m = 2 &: \quad Jx_1 = -x_2,\ Jx_3 = x_4. \\ m = 3 &: \quad Jx_1 = -x_2,\ Jx_3 = x_4,\ Jx_5 = x_6. \\ m = 4 &: \quad Jx_1 = -x_2,\ Jx_3 = x_4,\ Jx_5 = x_6 - \frac{1}{2}x_8,\ Jx_7 = \frac{1}{2}x_8. \end{aligned}$$

Cuentas canónicas dan que para cada m, el corchete de Lie de $\mathcal{O}_{2m}$ y J satisfacen (4.15). ■

Esta familia de álgebras de Lie simplécticas permite llegar a algunas conclusiones sobre el método de doble extensión. En primer lugar, vemos que la familia de álgebras de Lie filiforme no es cerrada bajo este procedimiento. En efecto, las álgebras en $\mathcal{V}$ son filiformes mientras que las de $\mathcal{O}$ no lo son.

Por otro lado, el procedimiento de extensión no preserva estructuras complejas. Vimos que $\mathcal{O}_{2m}$ es compleja si $m \leq 4$. Sin embargo sus extensiones $\mathcal{V}_{2(m+1)}$ no lo son puesto que las álgebras de Lie filiformes no admiten estructuras complejas [28].

Capítulo 5

Conclusiones

Como bien se expresa en el título del trabajo, a lo largo de la Tesis hemos estudiado las nilvariedades desde su cohomología y con ello intentamos comprender mejor el comportamiento de las estructuras simplécticas en las mismas. Este estudio se encara desde las álgebras de Lie nilpotentes utilizando fuertemente en todo momento el teorema de Nomizu [58].

La parte cohomológica abarca la definición y estudio de la cohomología intermedia de las álgebras de Lie nilpotentes y es objeto de estudio en los Capítulos 2 y 3.

En el Capítulo 2 establecemos la definición de cohomología intermedia a través de herramientas del álgebra homológica como las sucesiones espectrales que surgen de una filtración. En las álgebras de Lie nilpotentes tomamos la filtración canónica dada por los anuladores de la serie central descendente y a partir de ella logramos escribir los grupos de cohomología del álgebra de Lie $\mathfrak{n}$ como suma de los grupos de cohomología intermedia, refinándola.

Realizamos el cálculo explícito de esta nueva cohomología en las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión ≤ 6, la cual se encuentra en la Sección 2.4. De la observación de las tablas expuestas se pueden llegar a diferentes conclusiones. En primer lugar, que hay álgebras de Lie nilpotentes que tienen igual cohomología intermedia sin ser isomorfas, más precisamente teniendo centros de diferente dimensión. Por otro lado, vemos que las tablas de dimensión seis correspondientes a las álgebras número (7) y (8) coinciden (página 38) y sin embargo la primera no admite estructuras complejas mientras que la segunda sí lo hace. Es decir la cohomología intermedia no detecta este tipo de estructuras.

Con respecto a propiedades de la cohomología intermedia, probamos en el Teorema 2.2.6 cómo se comporta la misma cuando el álgebra nilpotente $\mathfrak{n}$ es suma directa de un factor abeliano y un álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{h}$.

La forma en que se define la cohomología intermedia a través de una filtración natural de un complejo de cocadenas, propone el estudio futuro de diferentes filtraciones en complejos conocidos. Por ejemplo la filtración análoga a la trabajada en álgebras de Lie nilpotentes complejas. Esto brinda de manera similar una descomposición de la cohomología de Dolbeault del álgebra de Lie.

Al inicio del Capítulo 3 damos una aplicación de la cohomología intermedia en el Teorema 3.1.3. Este resultado introduce una obstrucción cohomológica para la existencia de estructuras simplécticas, precisamente si un álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{n}$ admite alguna estructura de este tipo, entonces el grupo de cohomología intermedia $E_\infty^{0,2}(\mathfrak{n})$ es no nulo. Un contraejemplo al resultado recíproco de este teorema se encuentra en el Ejemplo 3.1.6 donde mostramos que en las álgebras de Lie 3-pasos nilpotentes libres en m generadores $\mathfrak{n}_{m,3}$ vale $E_\infty^{0,2}(\mathfrak{n}_{m,3}) \neq 0$ pero no admiten estructuras simplécticas (resultado incluido en la Sección 2.4).

En la Sección 3.2 probamos en el Corolario 3.2.4 que las álgebras de Lie nilpotentes reales que son nilradicales de las subálgebras de Borel de las álgebras de Lie clásicas simples complejas no admiten estructuras simplécticas. Entre ellas, el álgebra de Lie $\mathfrak{t}(n,\mathbb{R})$ de matrices triangulares superiores estrictas. El mismo se deduce del Teorema 3.2.3 en el que se determina la nulidad de $E_\infty^{0,2}$ en los nilradicales mencionados. Para la prueba del teorema fue necesario un profundo análisis de los sistemas de raíces de las álgebras de Lie simples complejas. Los mismos dan una estructura de álgebra graduada a dichos nilradicales y develan el comportamiento de la diferencial del álgebra de Lie con respecto a la filtración natural, como se explicita en (3.3). Cada familia de álgebras de Lie simples complejas A,B,C,D fue tratada de manera diferente en función de la dificultad que imponían los sistemas de raíces que las definen.

El Teorema 3.2.3 puede generalizarse a una familia mayor de álgebras de Lie graduadas. En efecto, el análisis hecho en la Sección 3.2 y sus preliminares correspondientes (Sección 1.3) sobre el comportamiento de la diferencial con respecto a los sistemas de raíces y la graduación del álgebra de Lie nilpotente pueden generalizarse a álgebras de Lie graduadas cuyas graduaciones verifiquen reglas similares a dichos sistemas de raíces.

En la Sección 3.3 caracterizamos el término $E_\infty^{0,2}$ para las álgebras de Lie métricas 2-pasos nilpotentes en función del Laplaciano que la métrica define. Esta caracterización junto con resultados en el trabajo de Isabel Dotti y Paulo Tirao [21] nos permite probar el Teorema 3.3.10 que establece la equivalencia entre la existencia de estructuras simplécticas y la no nulidad del término de cohomología intermedia $E_\infty^{0,2}$ en la familia de álgebras de Lie de tipo Heisenberg (tipo H). Concluimos que la recíproca del Teorema 3.1.3 es válida si nos restringimos a esa familia.

A partir de lo obtenido en este capíulo, una continuación posible sería encontrar relaciones entre términos de cohomología itermedia y diferentes formas diferenciales que tengan relevancia geométrica o algebraica. Por ejemplo, las 3-formas trabajadas por Hitchin [35], las formas que aparecen en en los grupos de Lie con métricas SKT ([23] y sus referencias), entre otras.

Los resultados sobre estructuras simplécticas nos llevaron a investigar las estructuras simplécticas en álgebras de Lie nilpotentes independientemente de la cohomología intermedia. Este estudio se encuentra desarrollado en el último capítulo del trabajo.

En la Sección 4.1, concluimos que no hay una cota superior sobre el grado de solubilidad de las álgebras de Lie nilpotentes simplécticas. Específicamente, para cada p hay un álgebra de Lie nilpotente simpléctica con grado de solubilidad $> p$. Esta pregunta tiene relación con la planteada por Guan en [31]. Estudiando los ejemplos de álgebras de Lie nilpotentes de la bibliografía mostramos este resultado con los ejemplos de Vergne [68] en la Proposición 4.1.10.

En la Sección 4.2 estudiamos el problema de existencia de estructuras simplécticas en álgebras de Lie nilpotentes libres dando una respuesta completa a este problema con el Teorema 4.2.4. Según el trabajo de Benson y Gordon en [4], un álgebra de Lie nilpotente simpléctica debe tener dimensión del centro menor o igual que la codimensión del conmutador. Traducimos esta condición para las álgebras de Lie nilpotentes y sus extensiones centrales en el Corolario 4.2.3. La prueba del teorema se obtiene con el estudio de la dimensión del centro de las álgebras de Lie nilpotentes mediante las bases de Hall.

Los resultados obtenidos en las familias de nilradicales de subálgebras de Borel, las álgebras tipo H y las álgebras de Lie nilpotentes libres son de no existencia de estructuras simplécticas salvo en los elementos de dimensiones bajas. Esto nos lleva a interesarnos en los métodos de construcción de álgebras de Lie nilpotentes simplécticas.

En la Sección 4.3 estudiamos el método de doble extensión simpléctica que se encuentra trabajado por Dardié, Revoy y Medina en [13] y [52]. A través del mismo contruimos una nueva familia $\mathcal{O}$ de álgebras de Lie nilpotentes simplécticas. Concluimos que algunas estructuras de las álgebras de Lie nilpotentes no se preservan por este método.

Por un lado, observamos que la familia de álgebras de Lie filiformes no es cerrada por la doble extensión: reduciendo la familia $\mathcal{V}$ trabajada en el Ejemplo 4.1.5 con grado máximo de nilpotencia, obtuvimos la familia $\mathcal{O}$ cuyas álgebras de Lie tienen centro de dimensión dos y por lo tanto no son filiformes.

Por otro lado, probamos que las estructuras complejas tampoco son preservadas por esta doble extensión. En efecto mostramos que las álgebras de Lie $\mathcal{O}_{2m}$ son complejas si $m \leq 4$ (ver Proposición 4.3.10) mientras que las álgebras de Lie de las que provienen no lo son ya que las álgebras de Lie filiformes no son complejas por un resultado de Goze [28].

La familia construida $\mathcal{O}$ y la doble extensión como herramienta introducen diferentes interrogantes. En primer lugar interesa estudiar si toda la familia $\mathcal{O}$ es compleja. En ese caso esta familia se sumaría a los ejemplos de álgebras simplécticas que admiten estructuras complejas no compatibles.

En segundo lugar, relacionamos a $\mathcal{O}$ con el estudio de la cohomología armónica (ver [74, 7] y sus referencias); específicamente con variedades compactas simplécticas *flexibles*. Hasta el momento está bien entendido el estudio de esta cohomología en dimensión ≤ 6 (ver también [72]) y está dada la clasificación de las nilvariedades flexibles de dimensión 6 en [38]. En la misma se observa que $\mathcal{O}_6$ y $\mathcal{V}_6$ son álgebras nilpotentes que dan lugar a nilvariedades flexibles. Una pregunta natural es si todos los elementos de $\mathcal{O}$ y/o $\mathcal{V}$ también lo son. De esa forma se contribuye a la comprensión de esta cohomología en dimensiones mayores.

Un problema que surgió al estudiar la doble extensión y queda abierto a futuros trabajos es la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes simplécticas de dimension 8 o una subfamilia de ellas. Siguiendo el Teorema 4.3.1, encarar esta clasificación desde el método de doble extensión implica tomar un álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{n}$ que sea simpléctica (clasificadas en [27]) y realizar la extensión variando los parámetros ω, estructura simpléctica en $\mathfrak{n}$, δ derivación nilpotente y z un elemento de $\mathfrak{n}$.

Este problema, a pesar de parecer sencillo en lo teórico, es poco manejable desde el punto de vista de la clasificación pues partiendo de distintas álgebras puede llegarse a la misma. Además la variación de los parámetros ω, δ, z hace muy grande el problema computacionalmente.

Bibliografía

[1] I. Ado. Über die Struktur der endlicen kontinuierlichen Gruppen. *Bull. Soc. Phys.-Math. Kazan*, 6(3):38–42, 1932-33.

[2] I. K. Babenko and I. A. Taĭmanov. On the existence of nonformal simply connected symplectic manifolds. *Uspekhi Mat. Nauk*, 53(5(323)):225–226, 1998.

[3] Y. Bahturin. *Identical relations in Lie algebras.* VNU Science Press b.v., 1987.

[4] C. Benson and C. Gordon. Kähler and symplectic structures on nilmanifolds. *Topology*, 27(4):513–518, 1988.

[5] M. Bordemann, A. Medina, and A. Ouadfel. Le groupe affine comme variété symplectique. *Tohoku Math. J. (2)*, 45(3):423–436, 1993.

[6] G. Bredon. *Topology and geometry*, volume 139 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 1993.

[7] J. Brylinski. A differential complex for Poisson manifolds. *J. Differential Geom.*, 28(1):93–114, 1988.

[8] G. Cairns and B. Jessup. Cohomology operations for Lie algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 356(4):1569–1583 (electronic), 2004.

[9] A. Cannas da Silva. *Lectures on symplectic geometry*, volume 1764 of *Lecture Notes in Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[10] C. Chevalley and S. Eilenberg. Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 63:85–124, 1948.

[11] G.P. Console, S. Ovando and M. Subils. Solvable models for Kodaira surfaces. math.DG arXiv:1111.2417v1, 2011.

[12] S. Console, , and A. Fino. On the de Rham cohomology of solvmanifolds. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci. (5)*, 10(4):801–818, 2011.

[13] J. Dardié and A. Medina. Double extension symplectique d'un groupe de Lie symplectique. *Adv. Math.*, 117(2):208–227, 1996.

[14] V. del Barco. Symplectic structures on free nilpotent Lie algebras. math.DG arXiv:1111.3280v1, 2011.

[15] P. Deligne, P. Griffiths, J. Morgan, and D. Sullivan. Real homotopy theory of Kähler manifolds. *Invent. Math.*, 29(3):245–274, 1975.

[16] Ch. Deninger and W. Singhof. On the cohomology of nilpotent Lie algebras. *Bull. Soc. Math. France*, 116(1):3–14, 1988.

[17] A. Diatta. Left invariant contact structures on Lie groups. *Differential Geom. Appl.*, 26(5):544–552, 2008.

[18] J. Dixmier. Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes. *Acta Sci. Math. Szeged*, 16:246–250, 1955.

[19] J. Dixmier. Sur les algèbres dérivées d'une algèbre de Lie. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 51:541–544, 1955.

[20] I. Dotti. *Tópicos de Geometría Riemanniana Homogénea.* Trabajos de Matemática N^{o}3 - FAMAF. Córdoba, 1987.

[21] I. Dotti and P. Tirao. Symplectic structures on Heisenberg-type nilmanifolds. *Manuscripta Math.*, 102(3):383–401, 2000.

[22] P. Eberlein. Geometry of 2-step nilpotent groups with a left invariant metric. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 27(5):611–660, 1994.

[23] N. Enrietti and A. Fino. Special Hermitian metrics and Lie groups. *Differential Geom. Appl.*, 29(suppl. 1):S211–S219, 2011.

[24] M. Fernández and V. Muñoz. An 8-dimensional nonformal, simply connected, symplectic manifold. *Ann. of Math. (2)*, 167(3):1045–1054, 2008.

[25] A. Fialowski and D. Millionschikov. Cohomology of graded Lie algebras of maximal class. *J. Algebra*, 296(1):157–176, 2006.

[26] M. Goze. Modèles d'algèbres de Lie frobeniusiennes. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 293(8):425–427, 1981.

[27] M. Goze and A. Bouyakoub. Sur les algèbres de Lie munies d'une forme symplectique. *Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari*, 57(1):85–97, 1987.

[28] M. Goze and E. Remm. Non existence of complex structures on filiform Lie algebras. *Comm. Algebra*, 30(8):3777–3788, 2002.

[29] P. Griffiths and J. Harris. *Principles of algebraic geometry.* Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1978. Pure and Applied Mathematics.

[30] Z-D. Guan. Modification and the cohomology groups of compact solvmanifolds. *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.*, 13:74–81, 2007.

[31] Z-D. Guan. Toward a classification of compact nilmanifolds with symplectic structures. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (22):4377–4384, 2010.

[32] M. Hall. A basis for free Lie rings and higher commutators in free groups. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1:575–581, 1950.

[33] S. Halperin. Le complexe de Koszul en algèbre et topologie. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 37(4):77–97, 1987.

[34] S. Helgason. *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, volume 80 of *Pure and Applied Mathematics.* Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1978.

[35] N. Hitchin. The geometry of three-forms in six dimensions. *J. Differential Geom.*, 55(3):547–576, 2000.

[36] J. Humphreys. *Introduction to Lie algebras and representation theory.* Springer-Verlag, New York, 1972. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 9.

[37] T. Hungerford. *Algebra*, volume 73 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 1980. Reprint of the 1974 original.

[38] R. Ibáñez, Yu. Rudyak, A. Tralle, and L. Ugarte. Erratum: "On symplectically harmonic forms on six-dimensional nil-manifolds" [Comment. Math. Helv. **76** (2001), no. 1, 89–109; MR1819662 (2002b:53120)]. *Comment. Math. Helv.*, 76(3):576, 2001.

[39] N. Jacobson. *Lie algebras.* Dover Publications Inc., New York, 1979. Republication of the 1962 original.

[40] A. Kaplan. Fundamental solutions for a class of hypoelliptic PDE generated by composition of quadratic forms. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 258(1):147–153, 1980.

[41] A. Kaplan. Riemannian nilmanifolds attached to Clifford modules. *Geom. Dedicata*, 11(2):127–136, 1981.

[42] A. Kaplan. On the geometry of groups of Heisenberg type. *Bull. London Math. Soc.*, 15(1):35–42, 1983.

[43] Y. Khakimdjanov and M. Goze. *Nilpotent Lie algebras*, volume 361 of *Mathematics and its Applications*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1996.

[44] A. Knapp. *Lie groups beyond an introduction*, volume 140 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1996.

[45] B. Kostant. Lie algebra cohomology and the generalized borel-weil theorem. *Ann. of Math.*, 72:329–390, 1961.

[46] J.-L. Koszul. Homologie et cohomologie des algèbres de Lie. *Bull. Soc. Math. France*, 78:65–127, 1950.

[47] J.M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*, volume 218 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2003.

[48] L. Magnin. Sur les algèbres de Lie nilpotentes de dimension ≤ 7. *J. Geom. Phys.*, 3(1):119–144, 1986.

[49] A.I. Malcev. On a class of homogeneous spaces. *reimpreso en Amer. Math. Soc. Trans. Ser.*, 9(1):276–307, 1962.

[50] W.S. Massey. *Algebraic topology: an introduction*. Springer-Verlag, New York, 1977. Reprint of the 1967 edition, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 56.

[51] D. McDuff. Examples of simply-connected symplectic non-Kählerian manifolds. *J. Differential Geom.*, 20(1):267–277, 1984.

[52] A. Medina and P. Revoy. Groupes de Lie à structure symplectique invariante. In *Symplectic geometry, groupoids, and integrable systems (Berkeley, CA, 1989)*, volume 20 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 247–266. Springer, New York, 1991.

[53] D. Millionschikov. Graded filiform Lie algebras and symplectic nilmanifolds. In *Geometry, topology, and mathematical physics*, volume 212 of *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, pages 259–279. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.

[54] V. Morozov. Classification of nilpotent Lie algebras of sixth order. *Izv. Vysš. Učebn. Zaved. Matematika*, 1958(4 (5)):161–171, 1958.

[55] G.D. Mostow. Cohomology of topological groups and solvmanifolds. *Ann. of Math. (2)*, 73:20–48, 1961.

[56] A. Newlander and L. Nirenberg. Complex analytic coordinates in almost complex manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 65:391–404, 1957.

[57] A. Nijenhuis. On a class of common properties of some different types of algebras. *Nieuw Arch. Wisk. (3)*, 17(3):17–46,87–108, 1968.

[58] K. Nomizu. On the cohomology of compact homogeneous spaces of nilpotent Lie groups. *Ann. of Math. (2)*, 59:531–538, 1954.

[59] J. Oprea and A. Tralle. *Symplectic manifolds with no Kähler structure*, volume 1661 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[60] H. Pouseele. Betti number behavior for nilpotent Lie algebras. *Geom. Dedicata*, 122:77–88, 2006.

[61] H. Pouseele and P. Tirao. Compact symplectic nilmanifolds associated with graphs. *J. Pure Appl. Algebra*, 213(9):1788–1794, 2009.

[62] S.M. Salamon. Complex structures on nilpotent Lie algebras. *J. Pure Appl. Algebra*, 157(2-3):311–333, 2001.

[63] L. San Martín. *Álgebras de Lie*. Editora da Unicamp, 1999.

[64] J.P. Serre. *Lie algebras and Lie groups*, volume 1500 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2006. 1964 lectures given at Harvard University, Corrected fifth printing of the second (1992) edition.

[65] W.P. Thurston. Some simple examples of symplectic manifolds. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 55(2):467–468, 1976.

[66] P. Tirao. A refinement of the toral rank conjecture for 2-step nilpotent Lie algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 128(10):2875–2878, 2000.

[67] V. S. Varadarajan. *Lie groups, Lie algebras, and their representations*, volume 102 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1984. Reprint of the 1974 edition.

[68] M. Vergne. Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes. Application à l'étude de la variété des algèbres de Lie nilpotentes. *Bull. Soc. Math. France*, 98:81–116, 1970.

[69] N. Wallach. *Harmonic analysis on homogeneous spaces*. Marcel Dekker Inc., New York, 1973. Pure and Applied Mathematics, No. 19.

[70] F.W. Warner. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, volume 94 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1983. Corrected reprint of the 1971 edition.

[71] C.A. Weibel. *An introduction to homological algebra*, volume 38 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[72] T. Yamada. Harmonic cohomology groups on compact symplectic nilmanifolds. *Osaka J. Math.*, 39(2):363–381, 2002.

[73] T. Yamada. A pseudo-Kähler structure on a nontoral compact complex parallelizable solvmanifold. *Geom. Dedicata*, 112:115–122, 2005.

[74] D. Yan. Hodge structure on symplectic manifolds. *Adv. Math.*, 120(1):143–154, 1996.