

GABARITO
MA327 Álgebra Linear - Prova 3
Aplicada em 29/11/2022
Turmas 8h-10h

Questão 1 Seja

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

- [1,5 pontos] Mostre que a matriz é diagonalizável e encontre uma matriz invertível P e uma matriz diagonal D de forma que $A = PDP^{-1}$.
- [1 ponto] Utilize o item anterior para obter uma fórmula para A^m , $m \in \mathbb{N}$.

SOLUÇÃO:

Questão 1.1

Primeiramente, vamos encontrar os autovalores da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

O polinômio característico da matriz A é

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (3 - \lambda)(-3 - \lambda) - (-5)1 = \lambda^2 - 4 = (\lambda - 2)(\lambda + 2)$$

Portanto a matriz possui autovalores $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -2$.

Como os autovalores são distintos, a matriz é diagonalizável. Seja v_j o autovetor associado a λ_j , e P a matriz cujas colunas são os vetores v_j , então

$$A = PDP^{-1}$$

em que $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$.

Agora, o autovetor associado a λ_1 é solução não nula de

$$(A - \lambda_1 I)X = 0 \implies \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A solução do sistema é do tipo $t(5, 1)$ com $t \in \mathbb{R}$, assim, podemos tomar $v_1 = (5, 1)$.

Já o autovetor associado a λ_2 é solução não nula de

$$(A - \lambda_2 I)X = 0 \implies \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A solução do sistema é do tipo $t(1, 1)$ com $t \in \mathbb{R}$, portanto, podemos tomar $v_2 = (1, 1)$.

Dessa forma, temos $P = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, cuja inversa é $P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$.

Questão 1.2

Como $A = PDP^{-1}$, temos que

$$A^m = (PDP^{-1})^m = PD^m P^{-1}$$

E como $D^m = \text{diag}(\lambda_1^m, \lambda_2^m)$, temos

$$\begin{aligned} A^m &= \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^m & 0 \\ 0 & (-2)^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \\ &= 2^m \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \\ &= 2^m \begin{bmatrix} 5 & (-1)^m \\ 1 & (-1)^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \\ &= 2^m \begin{bmatrix} \frac{5+(-1)^{m+1}}{4} & \frac{-5+5(-1)^m}{4} \\ \frac{1+(-1)^{m+1}}{4} & \frac{-1+5(-1)^m}{4} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Questão 2 Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por

$$T(x, y, z) = (2y + z, 2y - z, 2z).$$

1. [1 ponto] Determine os autovalores de T .
2. [2 pontos] Para cada autovalor de T , determine o autoespaço correspondente.
3. [1 ponto] Determine se T é diagonalizável. Justifique sua resposta.

SOLUÇÃO:

Questão 2.1

Se v_j é o j -ésimo vetor da base canônica β , então a matriz de transformação $[T]_{\beta}^{\beta}$ é a matriz cujas colunas são os vetores de coordenadas de $T(v_j)$ na base β . Temos

$$T(1, 0, 0) = (0, 0, 0)$$

$$T(0, 1, 0) = (2, 2, 0)$$

$$T(0, 0, 1) = (1, -1, 2)$$

Portanto,

$$[T]_{\beta}^{\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Definindo $A = [T]_{\beta}^{\beta}$, o polinômio característico de T é dado por

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 2 - \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{bmatrix} = (-\lambda)(2 - \lambda)(2 - \lambda)$$

Portanto os autovalores são $\lambda_1 = 0$, com multiplicidade algébrica 1, e $\lambda_2 = 2$, com multiplicidade algébrica 2.

Questão 2.2

Seja $I_V : V \rightarrow V$ o operador identidade em V . O autoespaço associado a $\lambda_1 = 0$ é dado por

$$V_{\lambda_1} = \text{Ker}(T - \lambda_1 I_V) = \text{Ker}(T)$$

Podemos encontrar $\text{Ker}(T)$ resolvendo o sistema

$$(A - 0 \cdot I)X = 0 \implies \begin{cases} 2y + z = 0 \\ 2y - z = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 2y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Ou seja, a solução é do tipo $(x, y, z) = t(1, 0, 0)$ com $t \in \mathbb{R}$. Portanto,

$$V_{\lambda_1} = [(1, 0, 0)]$$

O autoespaço associado a $\lambda_2 = 2$ é dado por

$$V_{\lambda_2} = \text{Ker}(T - \lambda_2 I_V) = \text{Ker}(T - 2I_V)$$

Podemos encontrar $\text{Ker}(T - 2I_V)$ resolvendo o sistema

$$(A - 2I)X = 0 \implies \begin{cases} -2x + 2y + z = 0 \\ -z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = y - \frac{z}{2} \\ z = 0 \end{cases}$$

Temos a solução do tipo $(x, y, z) = t(1, 1, 0)$ com $t \in \mathbb{R}$. Portanto,

$$V_{\lambda_2} = [(1, 1, 0)]$$

Questão 2.3

Como todos os autovetores de T pertencem a $V_{\lambda_1} = [(1, 0, 0)]$ ou a $V_{\lambda_2} = [(1, 1, 0)]$, não existe um conjunto linearmente independente formado por 3 autovetores de T , logo, não existe uma base formada por autovetores de T , conseqüentemente, T não é diagonalizável.

Questão 3 [2,5 pontos] Efetue uma mudança de coordenadas para determinar se a figura dada pela equação

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 81$$

é uma esfera ou um elipsoide. (Dica: um dos autovalores da matriz simétrica associada é $\lambda = 4$.)

SOLUÇÃO:

A equação pode ser escrita como $X^T A X = 81$, em que

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Queremos encontrar uma matriz Q tal que

$$D = Q^T A Q$$

em que D é uma matriz diagonal.

O polinômio característico de A é dado por

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2 - \lambda \end{bmatrix}$$

Utilizando o teorema de Laplace, temos

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (2 - \lambda) \det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 1 & 2 - \lambda \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= (2 - \lambda)^3 - (2 - \lambda) - (2 - \lambda) + 1 - (2 - \lambda) + 1 \\ &= 4 - 9\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3 \end{aligned}$$

Como indicado pelo enunciado, $\lambda = 4$ é um autovalor de A , ou seja, $\lambda = 4$ é uma raiz de $p(\lambda)$ e podemos escrever

$$p(\lambda) = q(\lambda)(\lambda - 4)$$

em que $q(\lambda)$ é resultado da divisão de $p(\lambda)$ por $(\lambda - 4)$, assim,

$$q(\lambda) = -\lambda^2 + 2\lambda - 1 = -(\lambda - 1)^2$$

$\lambda = 1$ é o outro autovalor de A .

Agora, vamos encontrar autovetores associados a $\lambda_1 = 1$ resolvendo o sistema

$$(A - I)X = 0 \implies \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \implies \{x = -y - z$$

Ou seja, a solução é do tipo $(x, y, z) = t(-1, 1, 0) + s(-1, 0, 1)$ com $t, s \in \mathbb{R}$. Assim, podemos tomar os autovetores $u_1 = (-1, 1, 0)$ e $u_2 = (-1, 0, 1)$ associados a λ_1 .

Vamos aplicar o processo de Gram-Schmidt no conjunto $\{u_1, u_2\}$. Tomando $v_1 = u_1$ e

$$\begin{aligned} v_2 &= u_2 - \frac{\langle v_1, u_2 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 \\ &= u_2 - \frac{(-1)(-1) + 1.0 + 0.1}{(-1)^2 + 1^2} v_1 \\ &= u_2 - \frac{1}{2} v_1 \\ &= \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right) \end{aligned}$$

e normalizando os vetores, obtemos

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{\|v_1\|} v_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \\ q_2 &= \frac{1}{\|v_2\|} v_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right) \end{aligned}$$

Assim, obtemos o conjunto ortonormal $\{q_1, q_2\}$.

Agora, vamos encontrar autovetores associados a $\lambda_2 = 4$ resolvendo o sistema

$$(A - 4I)X = 0 \implies \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x - \frac{y}{2} - \frac{z}{2} = 0 \\ -\frac{3y}{2} + \frac{3z}{2} = 0 \\ \frac{3y}{2} - \frac{3z}{2} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x - \frac{y}{2} - \frac{z}{2} = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

Ou seja, a solução é do tipo $(x, y, z) = t(1, 1, 1)$ com $t \in \mathbb{R}$, assim, podemos tomar o vetor unitário $q_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ associado a λ_2 .

Como a matriz A é simétrica, autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais. Assim, obtemos o conjunto ortonormal de autovetores $\{q_1, q_2, q_3\}$. Portanto, se Q for a matriz cuja j -ésima coluna é o vetor q_j , temos $D = Q^T A Q$, em que

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Dessa forma, podemos efetuar a mudança $X = QX_m$ de maneira que

$$X^T A X = 81 \implies (X_m)^T Q^T A Q X_m = 81 \implies (X_m)^T D X_m = 81$$

Ou seja,

$$x_m^2 + y_m^2 + 4z_m^2 = 81 \implies \frac{x_m^2}{81} + \frac{y_m^2}{81} + \frac{z_m^2}{\frac{81}{4}} = 1$$

que é a equação de um elipsoide.

Questão 4 [1 ponto] Mostre que se λ é um autovalor de uma transformação linear $T : V \rightarrow V$ que é invertível, então $\lambda \neq 0$ e λ^{-1} é autovalor de T^{-1} .

SOLUÇÃO:

Como T é invertível, então $\text{Ker}(T) = \{0_V\}$, ou seja, não existe $v \in V$ não nulo tal que

$$T(v) = 0_V = 0.v$$

Portanto, 0 não é um autovalor de T . Agora, suponha que λ é um autovalor de T e v é um autovetor associado, então

$$T(v) = \lambda v \implies T^{-1}(T(v)) = T^{-1}(\lambda v) \implies v = \lambda T^{-1}(v) \implies T^{-1}(v) = \frac{1}{\lambda}v$$

Ou seja, λ^{-1} é um autovalor de T^{-1} com autovetor associado v .