GABARITO

MA327 Álgebra Linear - Prova 3

Aplicada em 29/11/2022

Turmas 19h-21h

Questão 1 Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$T(x, y, z) = (2x + y + z, x + 2y + z, x + y + 2z).$$

1. [1 ponto] Determine os autovalores de T. (Ajuda: mostre que $\lambda = 4$ é autovalor de T, e encontre os restantes)
2. [2 pontos] Para cada autovalor de T, determine o autoespaço correspondente.
3. [1 ponto] Determine uma base ortonormal de autovetores de T.

SOLUÇÃO:

Questão 1.1

Se v_j é o j-ésimo vetor da base canônica β, então a matriz de transformação $[T]_\beta^\beta$ é a matriz cujas colunas são os vetores de coordenadas de $T(v_j)$ na base β. Temos

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= (2,1,1) \\ T(0,1,0) &= (1,2,1) \\ T(0,0,1) &= (1,1,2) \end{aligned}$$

Portanto,

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Definindo $A = [T]_\beta^\beta$, o polinômio característico de T é dado por

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

Utilizando o teorema de Laplace, temos

$$p(\lambda) = (2-\lambda) det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} - det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} + det \begin{bmatrix} 1 & 2-\lambda \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= (2-\lambda)^3 - (2-\lambda) - (2-\lambda) + 1 - (2-\lambda) + 1$$

$$= 4 - 9\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3$$

Como indicado pelo enunciado, vamos mostrar que $\lambda = 4$ é um autovalor. Para isso, notamos que

$$p(4) = 4 - 9.4 + 6.4^2 - 4^3 = 0$$

Ou seja, $\lambda = 4$ é uma raíz de $p(\lambda)$, logo, é um autovalor de T. Podemos escrever

$$p(\lambda) = q(\lambda)(\lambda - 4)$$

em que $q(\lambda)$ é resultado da divisão de $p(\lambda)$ por $(\lambda - 4)$, assim,

$$q(\lambda) = -\lambda^2 + 2\lambda - 1 = -(\lambda - 1)^2$$

$\lambda = 1$ é o outro autovalor de T.

Questão 1.2

Seja $I_V : V \to V$ o operador identidade em V. O autoespaço associado a $\lambda_1 = 1$ é dado por

$$V_{\lambda_1} = Ker(T - \lambda_1 I_V) = Ker(T - I_V)$$

Podemos encontrar $Ker(T - I_V)$ resolvendo o sistema

$$(A - I)X = 0 \quad \Longrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -y - z \end{cases}$$

Ou seja, a solução é do tipo $(x, y, z) = t(-1, 1, 0) + s(-1, 0, 1)$ com $t, s \in \mathbb{R}$. Dessa forma,

$$V_{\lambda_1} = [(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)]$$

O autoespaço associado a $\lambda_2 = 4$ é dado por

$$V_{\lambda_2} = Ker(T - \lambda_2 I_V) = Ker(T - 4I_V)$$

Podemos encontrar $Ker(T - 4I_V)$ resolvendo o sistema

$$(A - 4I)X = 0 \quad \Longrightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x - \dfrac{y}{2} - \dfrac{z}{2} = 0 \\ -\dfrac{3y}{2} + \dfrac{3z}{2} = 0 \\ \dfrac{3y}{2} - \dfrac{3z}{2} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x - \dfrac{y}{2} - \dfrac{z}{2} = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

Ou seja, a solução é do tipo $(x, y, z) = t(1, 1, 1)$ com $t \in \mathbb{R}$. Dessa forma,

$$V_{\lambda_2} = [(1, 1, 1)]$$

Questão 1.3

Primeiramente, vamos aplicar o processo de Gram-Schmidt no conjunto $\{u_1, u_2\}$, em que $u_1 = (-1, 1, 0)$ e $u_2 = (-1, 0, 1)$. Tomando $v_1 = u_1$ e

$$\begin{aligned} v_2 &= u_2 - \frac{\langle v_1, u_2 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 \\ &= u_2 - \frac{(-1)(-1) + 1.0 + 0.1}{(-1)^2 + 1^2} v_1 \\ &= u_2 - \frac{1}{2} v_1 \\ &= \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right) \end{aligned}$$

e normalizando os vetores, obtemos

$$q_1 = \frac{1}{||v_1||} v_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$
$$q_2 = \frac{1}{||v_2||} v_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right)$$

Assim, obtemos o conjunto ortonormal $\{q_1, q_2\}$.

Como a matriz A é simétrica, autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais. Portanto, basta tomar um vetor de V_{λ_2} que possui norma igual a 1. Dessa forma, podemos tomar $q_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$.

Por fim, obtemos o conjunto ortonormal $\alpha = \{q_1, q_2, q_3\}$. Como $dim(V) = 3$ e o conjunto α possui 3 vetores ortonormais, então α é uma base ortonormal.

Questão 2 Seja

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. [1,5 ponto] Mostre que a matriz é diagonalizável e encontre uma matriz invertível P e uma matriz diagonal D de forma que $A = PDP^{-1}$.
2. [1 ponto] Utilize o item anterior para obter uma fórmula para A^m, $m \in \mathbb{N}$.

Questão 2.1

Primeiramente, vamos encontrar os autovalores da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O polinômio característico da matriz A é

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = (3 - \lambda)(1 - \lambda) - 1.0 = (3 - \lambda)(1 - \lambda)$$

Portanto a matriz possui autovalores $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$.

Como os autovalores são distintos, a matriz é diagonalizável. Seja v_j o autovetor associado a λ_j, e P a matriz cujas colunas são os vetores v_j, então

$$A = PDP^{-1}$$

em que $D = diag(\lambda_1, \lambda_2)$.

Agora, o autovetor associado a λ_1 é solução não nula de

$$(A - \lambda_1 I)X = 0 \implies \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A solução do sistema é do tipo $t(1, -2)$ com $t \in \mathbb{R}$, assim, podemos tomar $v_1 = (1, -2)$.

Já o autovetor associado a λ_2 é solução não nula de

$$(A - \lambda_2 I)X = 0 \implies \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A solução do sistema é do tipo $t(1, 0)$ com $t \in \mathbb{R}$, portanto, podemos tomar $v_2 = (1, 0)$.

Dessa forma, temos $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$, cuja inversa é $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Questão 2.2

Como $A = PDP^{-1}$, temos que

$$A^m = (PDP^{-1})^m = PD^mP^{-1}$$

E como $D^m = diag(\lambda_1^m, \lambda_2^m)$, temos

$$A^m = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^m & 0 \\ 0 & 3^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3^m \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3^m & \frac{-1+3^m}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Questão 3 [2,5 pontos] Efetue uma mudança de coordenadas para determinar se a figura dada pela equação

$$x^2 - y^2 + 4xy + 6x = 0$$

é uma hipérbole ou duas retas concorrentes.

SOLUÇÃO:

A equação pode ser escrita como $X^TAX + BX = 0$, em que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Queremos encontrar uma matriz Q tal que

$$D = Q^TAQ$$

em que D é uma matriz diagonal.

O polinômio característico de A é dado por

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) - 2.2 = \lambda^2 - 5$$

Portanto a matriz possui autovalores $\lambda_1 = \sqrt{5}$ e $\lambda_2 = -\sqrt{5}$.

Agora, o autovetor associado a λ_1 é solução não nula de

$$(A - \lambda_1 I)X = 0 \implies \begin{cases} (1-\sqrt{5})x + 2y = 0 \\ 2x + (-1-\sqrt{5})y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x + \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}y = 0 \\ 2x + (-1-\sqrt{5})y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}y \end{cases}$$

A solução do sistema é do tipo $t(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 1)$ com $t \in \mathbb{R}$, assim, podemos tomar o vetor $v_1 = (\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 1)$.

Já o autovetor associado a λ_2 é solução não nula de

$$(A - \lambda_2 I)X = 0 \implies \begin{cases} (1+\sqrt{5})x + 2y = 0 \\ 2x + (-1+\sqrt{5})y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x + \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}y = 0 \\ 2x + (-1+\sqrt{5})y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}y \end{cases}$$

A solução do sistema é do tipo $t(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 1)$ com $t \in \mathbb{R}$, portanto, podemos tomar $v_2 = (\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 1)$.

Como $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$, v_1 e v_2 são ortogonais. Normalizando os vetores,

$$q_1 = \frac{1}{||v_1||}v_1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5+\sqrt{5}}} \right)$$
$$q_2 = \frac{1}{||v_2||}v_2 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}} \right)$$

Assim, obtemos o conjunto ortonormal de autovetores $\{q_1, q_2\}$. Portanto, se Q for a matriz cuja j-ésima coluna é o vetor q_j, temos $D = Q^TAQ$, em que

$$D = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & -\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

Dessa forma, podemos efetuar a mudança $X = QX_m$ de maneira que

$$X^TAX + BX = 0 \implies (X_m)^TQ^TAQX_m + BQX_m = 0 \implies (X_m)^TDX_m + BQX_m = 0$$

Ou seja,

$$\sqrt{5}x_m^2 - \sqrt{5}y_m^2 + \left(\frac{6+6\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\right)x_m + \left(\frac{6-6\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\right)y_m = 0$$

$$x_m^2 - y_m^2 + 2\left(\frac{3+3\sqrt{5}}{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}\right)x_m + 2\left(\frac{3-3\sqrt{5}}{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}\right)y_m = 0$$

$$\left(x_m + \frac{3+3\sqrt{5}}{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}\right)^2 - \left(y_m - \frac{3-3\sqrt{5}}{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}\right)^2 - \left(\frac{3+3\sqrt{5}}{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}\right)^2 + \left(\frac{3-3\sqrt{5}}{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}\right)^2 = 0$$

$$\left(x_m + \frac{3+3\sqrt{5}}{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}\right)^2 - \left(y_m - \frac{3-3\sqrt{5}}{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}\right)^2 = \frac{9\sqrt{5}}{25}$$

$$\frac{\left(x_m + \frac{3+3\sqrt{5}}{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}\right)^2}{\frac{9\sqrt{5}}{25}} - \frac{\left(y_m - \frac{3-3\sqrt{5}}{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}\right)^2}{\frac{9\sqrt{5}}{25}} = 1$$

Que é a equação de uma hipérbole.

Questão 4 [1 ponto] Mostre que se λ é um autovalor de uma transformação linear $T : V \to V$ que é invertível, então $\lambda \neq 0$ e λ^{-1} é autovalor de T^{-1}.

SOLUÇÃO:

Como T é invertível, então $Ker(T) = \{0_V\}$, ou seja, não existe $v \in V$ não nulo tal que

$$T(v) = 0_V = 0.v$$

Portanto, 0 não é um autovalor de T. Agora, suponha que λ é um autovalor de T e v é um autovetor associado, então

$$T(v) = \lambda v \implies T^{-1}(T(v)) = T^{-1}(\lambda v) \implies v = \lambda T^{-1}(v) \implies T^{-1}(v) = \frac{1}{\lambda} v$$

Ou seja, λ^{-1} é um autovalor de T^{-1} com autovetor associado v.