MA327 Álgebra Linear - Resolução do Exame

15/12/2022

Turmas 8h-10h

Questão 1 Considere o espaço vetorial $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ dos polinômios de grau ≤ 3 com coeficientes reais, e considere os conjuntos

$$S = \{-2x^3 + x^2 + 1, x^3 + x^2 + 1, x^3\}, \quad \text{e} \quad U = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \colon a_1 - 2a_2 - a_3 = 0\}.$$

1. [0,5 pontos] Mostre que U é subespaço vetorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. [1 ponto] Mostre que S não é linearmente independente (l.i) e encontre um subconjunto de S de 2 elementos que seja l.i.
3. [1 ponto] Seja W o espaço vetorial gerado por S, isto é $W = [S]$. Determine uma base para $W \cap U$.

Solução:

1. Vamos primeiro mostrar que U é subespaço vetorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

   Para isso, vamos identificar que U representa um polinômio do tipo:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 &: a_1 - 2a_2 - a_3 = 0 \\ &: a_1 = 2a_2 + a_3 \end{aligned}$$

   Portanto, os polinômios que geramos a partir de U são do tipo:

$$p(x) = a_0 + (2a_2 + a_3)x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

   Considerando, portanto, dois polinômios desse tipo, isto é, sejam:

$$\psi(x) = \alpha_0 + (2\alpha_2 + \alpha_3)x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 \qquad \omega(x) = \beta_0 + (2\beta_2 + \beta_3)x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3$$

   Temos, que:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \alpha_0 + (2\alpha_2 + \alpha_3)x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 \\ \omega(x) &= \beta_0 + (2\beta_2 + \beta_3)x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 \\ \psi(x) + \omega(x) &= (\alpha_0 + \beta_0) + (2\alpha_2 + \alpha_3 + 2\beta_2 + \beta_3)x + \\ &+ (\alpha_2 + \beta_2)x^2 + (\alpha_3 + \beta_3)x^3 \end{aligned}$$

   Notando que:

$$\begin{aligned}\psi(x)+\omega(x) &= (\alpha_0+\beta_0)+(2\alpha_2+\alpha_3+2\beta_2+\beta_3)x+(\alpha_2+\beta_2)x^2+(\alpha_3+\beta_3)x^3 \\ &= (\alpha_0+\beta_0)+\underbrace{(2[\alpha_2+\beta_2]+[\alpha_3++\beta_3])}_{a_1}x+\underbrace{(\alpha_2+\beta_2)}_{a_2}x^2+\underbrace{(\alpha_3+\beta_3)}_{a_3}x^3\end{aligned}$$

Verificamos que, de fato, é satisfeita a relação $a_1 = 2a_2 + a_3$, portanto, $(\psi+\omega)(x) \in U$.

Agora, com relação à multiplicação por um escalar, basta considerar $\lambda \in \mathbb{R}$. É fácil, notar que:

$$a_1 = 2a_2 + a_3 \implies \lambda \cdot a_1 = 2\lambda \cdot a_2 + \lambda \cdot a_3 \tag{1}$$

Então, considerando que:
$\psi(x) = \alpha_0+(2\alpha_2+\alpha_3)x+\alpha_2x^2+\alpha_3x^3 \implies \lambda\cdot\psi(x) = \lambda\cdot\alpha_0+\lambda\cdot(2\alpha_2+\alpha_3)x+\lambda\cdot\alpha_2x^2+\lambda\cdot\alpha_3x^3$

Temos, então que 1 é satisfeita! Reparando, exclusivamente, para $\lambda = 0$, temos que o zero está incluso em U. Portanto, é subespaço.

2. Para mostrar que S não é LI vamos transformar cada elemento em um vetor correspondente a um polinômio, portanto, considerando que:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \implies p(\vec{x}) = (a_0, a_1, a_2, a_3)^T$$

Faz com que:

$$S = \left\{(1,0,1,-2)^T; (1,0,1,1)^T; (0,0,0,1)^T\right\}$$

Lembrando da independência das linhas ou das colunas de uma matriz, podemos realizar o método de pivoteamento para checar a dependência linear:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \implies \left\{L_1^{\text{nova}} \leftarrow L_1 + 3\cdot L_3 \right. \implies \begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Portanto, vemos claramente que as linhas possuem dependência linear! Uma maneira de juntar dois elementos L.I. de S é o conjunto:

$$N = \left\{(1,0,1,-2)^T; (1,0,1,1)^T\right\}$$

Uma vez que, nesse caso a dependência fica restrito a multiplicação por escalar, desse modo, teríamos:

$$1 + x^2 - 2x^3 = \lambda(1 + x^2 + x^3)$$

Nota-se que o monômio de grau 1 faz com que $\lambda = 1$, entretanto, o monômio de grau 3 faz com que $\lambda = -2$. Portanto, esses esses polinômios são L.I.

3. Queremos agora descobrir o subespaço $W \cap U$

   Então, vamos supor que tenhamos algum vetor pertencente ao subespaço W que é gerado por N. Então, temos que ele é formado pela base por:

$$\delta(x) = a \cdot (1 + x^2 - 2x^3) + b \cdot (1 + x^2 + x^3) = (a + b) + (a + b)x^2 + (-2a + b)x^3$$

   Agora colocando a restrição do subespaço U, temos que se a condição 1 deve ser satisfeita, então:

$$0 = 2(a + b) + (-2a + b) \implies b = 0$$

   Portanto, vamos ter que colocando na forma de combinação linear:

$$\delta(x) = a \cdot (1 + x^2 - 2x^3) + 0 \cdot (1 + x^2 + x^3) \implies \delta(x) = a \cdot (1 + x^2 - 2x^3)$$

   Portanto, a intersecção desses vetores é:

$$W \cap U = [(1, 0, 1, -2)]$$

Questão 2 Seja m um número real fixo e considere a transfromação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ que verifica

$$T(1,0,0) = 2 - x, \quad T(0,2,0) = m(2x^2 - 4), \quad T(1,1,1) = 4 + x + x^2.$$

1. [1 ponto] Encontre a matriz de $[T]_\gamma^\beta$ nas bases $\beta = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ e $\gamma = \{1, x, x^2\}$
2. [0,5 pontos] Determine m de forma que T **não seja** isomorfismo.
3. [1 ponto] Para m encontrado no ítem anterior, determine um conjunto gerador para os subespaços $\ker T$ e $\text{Im}T$.

Solução:

1. Primeiro vamos tomar a matriz de mudança de base que leva:

$$\{(1,0,0);(0,1,0);(0,0,1)\} \Rightarrow \underbrace{\{(1,0,0);(0,2,0);(1,1,1)\}}_{\alpha}$$

Para isso, basta lembrarmos que isso equivale a concatenarmos os vetores $(1,0,0);(0,2,0);(1,1,1)$ em colunas. Isto é:

$$[I]_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Fazemos desse jeito, pois sai de maneira mais direta encontrarmos a inversa desta matriz: Basta fazemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

A inversa desta matriz é

$$[I]_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Assim como, podemos obter a matriz de mudança de base. Desse modo, teremos:

$$[T]_\gamma^\beta = [T]_\gamma^\alpha \cdot [I]_\alpha^\beta \tag{2}$$

Que é justamente a composição que nos faz obter a transformação entendida como a matriz de que leva a canônica até o polinômio desejado: A matriz $[T]_\gamma^\alpha$ é obtida a partir dos dados do enunciado, pensando do mesmo jeito de concatenar os vetores em colunas. Portanto ficamos com:

$$[T]_\gamma^\alpha = \begin{pmatrix} 2 & -4m & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2m & 1 \end{pmatrix}$$

Fazendo, por fim o produto em (2), temos:

$$[T]_\gamma^\beta = \begin{pmatrix} 2 & -2m & 2+2m \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & m & 1-m \end{pmatrix}$$

Que é gerada justamente por:

$$[T]_\gamma^\beta = \begin{pmatrix} 2 & -4m & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Para não ser isomorfismo, então ela precisa ser não invertível! Desse modo, temos que calcular o determinante e verificar para qual condição de m o determinante é nulo e, portanto, é não invertível.

$$\begin{vmatrix} 2 & -2m & 2+2m \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & m & 1-m \end{vmatrix} = -8m$$

Logo, a condição para que não seja invertível é que o valor de m seja nulo.

3. Considerando $m = 0$, temos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Desse modo, para encontrar Ker(T) basta fazer:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Notamos que o sistema depende apenas das componentes x e z. Desse modo, temos que uma base para o Ker$T$ é $(0, 1, 0)$. Enquanto isso, temos que a imagem de T pode ser obtida através de:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+2z \\ -x+2z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot z$$

Que já nos retorna a base da imagem: $\{(2, -1, 0), (2, 2, 1)\}$

Questão 3 [2 pontos] Considere o espaço vetorial real $\mathbb{R}^5$ munido com o produto interno usual e W o subespaço definido por :

$$W = \{(x, y, z, t, w) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x - 2y + z + t = 0, w - 2t = 0\}.$$

Determine uma base para o subespaço W e para $W^{\perp}$.

Solução:

1. Vamos definir primeiramente a base para o subespaço W. Desse modo, vamos nos atentar às restrições:

$$x - 2y + z + t = 0$$
$$w - 2t = 0$$

Repare que podemos escrevê-las da seguinte maneira:

$$\begin{cases} x - 2y + z + t = 0 \\ w - 2t = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 2y - z - t \\ w = 2t \end{cases}$$

Colocando numa forma vetorial, temos:

$$(2y - z - t; y; z; t; 2t) = y \cdot (2, 1, 0, 0, 0) + z \cdot (-1, 0, 1, 0, 0) + t \cdot (-1, 0, 0, 1, 2)$$

Portanto, uma base que gera W é:

$$G = \left\{ \underbrace{(2, 1, 0, 0, 0)}_{\text{a}}; \underbrace{(-1, 0, 1, 0, 0)}_{\text{b}}; \underbrace{(-1, 0, 0, 1, 2)}_{\text{c}} \right\}$$

Para gerar o complemento ortogonal, podemos fazer. Dado que o produto interno é usual, temos o vetor $u = (\alpha, \beta, \gamma, \theta, \tau)$ tal que:

$$\begin{cases} \langle u, a \rangle = 0 \\ \langle u, b \rangle = 0 \\ \langle u, c \rangle = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 \\ -\alpha + \gamma = 0 \\ -\alpha + \theta + 2\tau = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \beta = -2\alpha \\ \gamma = \alpha \\ \theta = \alpha - 2\tau \end{cases}$$

Jogando para os elementos do vetor u, temos que:

$$(\alpha, -2\alpha, \alpha, \alpha - 2\tau, \tau) = \alpha(1, -2, 1, 1, 0) + \tau(0, 0, 0, -1, 1)$$

Que forma justamente o complemento ortogonal, isto é, a base para $W^{\perp} = \{(1, -2, 1, 1, 0); (0, 0, 0, -1, 1)\}$

Questão 4

1. [2 pontos] Obtenha uma base ortonormal de autovetores para a matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

   (Ajuda: 9 é um dos autovalores de A)

2. [1 pontos] Utilize o resultado obtido no item anterior para identificar se a equação seguinte é descreve um cilindro ou uma reta

$$5x^2 + 8y^2 + 5z^2 - 4xy - 8xz - 4yz = 0.$$

Solução:

1. Vamos primeiramente lembrar que se A é simétrica, então ela possui apenas autovalores reais. Desse modo, vamos encontrar seu polinômio característico:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & -4 \\ -2 & 8-\lambda & -2 \\ -4 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 18\lambda^2 - 81\lambda$$

   Usando a dica, temos:

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + 18\lambda^2 - 81\lambda = \lambda(-\lambda^2 + 18\lambda - 81) = -\lambda(\lambda - 9)^2$$

   Queremos agora encontrar o núcleo das matrizes:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{bmatrix} \qquad A_9 = \begin{bmatrix} -4 & -2 & -4 \\ -2 & -1 & -2 \\ -4 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

   Para A_0 teremos:

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} 5x - 2y - 4z = 0 \\ -2x + 8y - 2z = 0 \\ -4x - 2y + 5z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = z \\ y = \frac{z}{2} \\ z = z \end{cases}$$

   Substituindo agora os valores encontrados, teremos que o vetor da base do autoespaço gerado pelos autovetores associados a zero é:

$$G_0 = \{(1, 1/2, 1)\}$$

Agora com relação ao autovalor de nove, teremos:

$$\begin{bmatrix} -4 & -2 & -4 \\ -2 & -1 & -2 \\ -4 & -2 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x = -\frac{1}{2}y - z \\ y = y \\ z = z \end{cases}$$

O que implica que a base nesse caso irá ser:

$$G_9 = \{(-1/2, 1, 0); (-1, 0, 1)\}$$

Agora note que G_9 não é ortonormal, para isso vamos realizar o processo de Gram-Schmidt:

$$u_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = \left(-\sqrt{5}/5, 2\sqrt{5}/5, 0\right)$$

$$u_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 = \left(-4\sqrt{5}/15, -2\sqrt{5}/15, \sqrt{5}/3\right)$$

Lembrando que se a matriz for simétrica então autovetores associados a diferentes autovalores serão ortogonais, basta normalizar G_0

Ou seja:

$$u_3 = \frac{(1, 1/2, 1)}{|(1, 1/2, 1)|} = (2/3, 1/3, 2/3)$$

Temos então que a base ortonormal é:

$$G = \left\{\left(-\sqrt{5}/5, 2\sqrt{5}/5, 0\right); \left(-4\sqrt{5}/15, -2\sqrt{5}/15, \sqrt{5}/3\right); (2/3, 1/3, 2/3)\right\}$$

2. Notando que a equação pode ser reescrita como:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Como a dimensão o grau de cada raiz é igual à dimensão do seu autoespaço associado, temos que essa cônica é não degenerada, portanto, ela define um cilindro!