Gabarito MA327 - 2S 2022 - Segunda Chamada - Prova 3 - Turmas 21h-23h

9 de dezembro de 2022

Questão 1

[2 Pontos] Determinar todos os valores de $b \in \mathbb{R}$ tais que a matriz $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1-b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

é diagonalizável.

Resolução.

Calculando o polinômio característico da matriz A temos que

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-b-\lambda & 0 \\ 1 & b-\lambda \end{vmatrix} = ((1-b)-\lambda)(b-\lambda)$$

De onde segue que os autovalores de A são $\lambda_1 = 1-b$ e $\lambda_2 = b$. Note ainda que $\lambda_1 = \lambda_2$ se, e somente se, $1-b = b$. Ou seja, $\lambda_1 = \lambda_2$ se, e somente se, $b = \frac{1}{2}$. Temos então que para todo $b \neq \frac{1}{2}$ a matriz A possui dois autovalores distintos. Portanto, A é diagonalizável se $b \neq \frac{1}{2}$. Caso $b = \frac{1}{2}$ temos que $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$. Ou seja, o único autovalor de A neste caso é $\lambda = \frac{1}{2}$. Dessa maneira este autovalor tem multiplicidade algébrica 2. Vamos verificar a multiplicidade geométrica de $\lambda = \frac{1}{2}$ neste caso. Encontremos então $V_{\frac{1}{2}} = Ker(A - \frac{1}{2}I_2)$. Para isso resolvemos o sitema abaixo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(A - \frac{1}{2}I_2\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dessa maneira $x = 0$. Ou seja, $V_{\frac{1}{2}} = \{(0,y) \,|\, y \in \mathbb{R}\} = [(0,1)]$. Ou seja, a multiplicidade geométrica de $\lambda = \frac{1}{2}$ é igual a $\dim(V_{\frac{1}{2}}) = 1$. Neste caso o único autovalor de A é tal que sua multiplicidade algébrica é maior que sua multiplicidade geométrica. Logo, A não é diagonalizável se $b = \frac{1}{2}$. Concluimos então que A é diagonalizável se, e somente se, $b \neq \frac{1}{2}$.

Questão 2

[4 Pontos] Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$T(x,y,z) = (3x - 2y + 4z, -2x + 6y + 2z, 4x + 2y + 3z).$$

1. [1 Ponto] Determine os autovalores de T. (Ajuda: mostre que $\lambda = -2$ é autovalor de T, e encontre os restantes)

2. [2 Pontos] Para cada autovalor de T, determine o autoespaço correspondente.

3. [1 Ponto] Determine uma base ortonormal de autovetores de T.

Resolução.

1. Seja β a base canônica de $\mathbb{R}^3$ e vamos calcular $[T]_\beta^\beta$. Para isso note que

$$T(1,0,0) = (3,-2,4),\ T(0,1,0) = (-2,6,2),\ T(0,0,1) = (4,2,3).$$

Então

$$[T]_\beta^\beta = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculando o polinômio característico do operador T temos que

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det([T]_\beta^\beta - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 4 \\ -2 & 6-\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda)^2(6-\lambda) - 32 - 4(3-\lambda) - 4(3-\lambda) - 16(6-\lambda) \\ &= (\lambda^2 - 6\lambda + 9)(6-\lambda) + 24\lambda - 152 = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 21\lambda - 98. \end{aligned}$$

Note que

$$p(-2) = -(-2)^3 + 12 \cdot (-2)^2 - 21 \cdot (-2) - 98 = 8 + 48 + 42 - 98 = 0.$$

Logo, $\lambda = -2$ é raiz de p e temos que

$$p(\lambda) = (-2-\lambda)(\lambda^2 - 14\lambda + 49) = (-2-\lambda)(7-\lambda)^2.$$

Portanto, $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 7$ são os autovalores do operador T. O autovalor λ_1 tem multiplicidade algébrica 1 e o autovalor λ_2 tem multiplicidade algébrica 2.
2. Primeiramente vamos encontrar o autoespaço correspondente ao autovalor $\lambda_1 = -2$ dado por $V_{-2} = V_{\lambda_1} = \ker(T - \lambda_1 I) = \ker(T + 2I)$. Ou seja, devemos resolver o seguinte sistema linear

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Utilizando o método da eliminação Gaussiana temos que

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \overset{L_2 + \frac{2}{5}L_1 \to L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 0 & \frac{36}{5} & \frac{18}{5} \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \overset{L_3 - \frac{4}{5}L_1 \to L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 0 & \frac{36}{5} & \frac{18}{5} \\ 0 & \frac{18}{5} & \frac{9}{5} \end{pmatrix}$$
$$\overset{L_3 - \frac{1}{2}L_2 \to L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 0 & \frac{36}{5} & \frac{18}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Portanto, basta resolver o sistema

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 0 & \frac{36}{5} & \frac{18}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De onde segue que $x = 2y$ e $z = -2y$. Ou seja, $V_{10} = \{(2y, y, -2y) \,|\, y \in \mathbb{R}\} = [(2, 1, -2)]$. Note que $\lambda_1 = -2$ tem multiplicidade geométrica igual a 1. Agora encontramos o autoespaço correspondente ao autovalor $\lambda_2 = 7$ dado por $V_7 = V_{\lambda_2} = \ker(T - \lambda_2 I) = \ker(T - 7I)$. Ou seja, devemos resolver o seguinte sistema linear

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Utilizando o método da eliminação Gaussiana temos que

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix} \overset{L_2 - \frac{1}{2}L_1 \to L_2}{\sim} \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix} \overset{L_3 + L_1 \to L_3}{\sim} \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Portanto, basta resolver o sistema

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De onde segue que $y = -2x + 2z$. Ou seja, $V_7 = \{(x, -2x+2z, z) \,|\, x, z \in \mathbb{R}\} = [(1, -2, 0), (0, 2, 1)]$. Note que $\lambda_2 = 7$ tem multiplicidade geométrica igual a 2.
3. Pelo que já foi notado nos itens 1 e 2 temos que as multiplicidades algébricas e geométricas são iguais para ambos os autovalores $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 7$. Logo, a matriz é diagonalizável. E como $[T]_\beta^\beta$ é simétrica segue pela teoria que existe base ortonormal de autovetores. Como V_{-2} e V_7 são ortogonais entre si basta ortonormalizar a base de cada um destes espaços para obter uma base ortonormal de autovetores de T. Pelo que foi encontrado em 2 temos que $\{v_1 = (2, 1, -2)\}$ forma uma base de V_{-2}. Portanto, $\{q_1 = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})\}$ forma uma base ortonormal de V_{-2}. Por outro lado, $\{v_2 = (1, -2, 0), v_3 = (0, 2, 1)\}$ formam uma base de V_7. Ortogonalizando tal base pelo processo de Gram-Schmidt obtemos

$$\begin{aligned} u_2 &= v_2 = (1, -2, 0) \\ u_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2 = (0, 2, 1) + \frac{4}{5}(1, -2, 0) = \left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, 1 \right) \end{aligned}$$

Encontramos então a seguinte base ortonormal de V_7 dada por

$$\left\{ q_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0 \right), q_3 = \left(\frac{4\sqrt{5}}{15}, \frac{2\sqrt{5}}{15}, \frac{\sqrt{5}}{3} \right) \right\}.$$

Portanto, $\{(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}), (\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0), (\frac{4\sqrt{5}}{15}, \frac{2\sqrt{5}}{15}, \frac{\sqrt{5}}{3})\}$ é uma base ortonormal de autovetores de T.

Questão 3

[2,5 Pontos] Efetue uma mudança de coordenadas para determinar se a figura dada pela equação
$$y^2 - x^2 + 4xy + 6y = 0$$
é uma hipérbole ou duas retas concorrentes.

Resolução.

Note que podemos escrever a equação acima como

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

onde
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vamos diagonalizar a matriz simétrica A encontrando uma base ortonormal de autovetores. Calculando seu polinômio característico obtemos

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5 = (\lambda + \sqrt{5})(\lambda - \sqrt{5}).$$

Logo, os autovalores de A são $\lambda_1 = -\sqrt{5}$ e $\lambda_2 = \sqrt{5}$. Encontremos então base ortonormal de autovetores. Para encontrar autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = -\sqrt{5}$ devemos resolver o sistema linear abaixo:
$$\begin{pmatrix} -1+\sqrt{5} & 2 \\ 2 & 1+\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pelo processo da eliminação Gaussiana temos que

$$\begin{pmatrix} -1+\sqrt{5} & 2 \\ 2 & 1+\sqrt{5} \end{pmatrix} \overset{\frac{1+\sqrt{5}}{4}L_1 \to L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 2 & 1+\sqrt{5} \end{pmatrix} \overset{L_2 - 2L_1 \to L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Portanto, basta resolver
$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Então $x = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}y$. Logo, $v_1 = (\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, 1)$ é um autovetor de A associado ao autovalor $\lambda_1 = -\sqrt{5}$. Agora vamos encontrar autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = \sqrt{5}$. Para isso devemos resolver o sistema linear abaixo:

$$\begin{pmatrix} -1-\sqrt{5} & 2 \\ 2 & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pelo processo da eliminação Gaussiana temos que

$$\begin{pmatrix} -1-\sqrt{5} & 2 \\ 2 & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix} \overset{\frac{1-\sqrt{5}}{4}L_1 \to L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 2 & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix} \overset{L_2 - 2L_1 \to L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Portanto, basta resolver

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Então $x = -\frac{1-\sqrt{5}}{2}y$. Logo, $v_2 = (\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1)$ é um autovetor de A associado ao autovalor $\lambda_2 = \sqrt{5}$. Obtemos então uma base ortonormal de autovetores de A dada por

$$\beta = \left\{ \frac{1}{||v_1||}v_1, \frac{1}{||v_2||}v_2 \right\}.$$

Então a matriz mudança de base da base β para a base canônica do $\mathbb{R}^2$ é dada por

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{||v_1||}\frac{-1-\sqrt{5}}{2} & \frac{1}{||v_2||}\frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ \frac{1}{||v_1||} & \frac{1}{||v_2||} \end{pmatrix}$$

Assim,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{||v_1||}\frac{-1-\sqrt{5}}{2}x' + \frac{1}{||v_2||}\frac{\sqrt{5}-1}{2}y' \\ \frac{1}{||v_1||}x' + \frac{1}{||v_2||}y' \end{pmatrix}$$

Escrevendo a equação da cônica com as coordenadas novas temos que

$$-\sqrt{5}x'^2 + \sqrt{5}y'^2 + \frac{6}{||v_1||}x' + \frac{6}{||v_2||}y' = 0.$$

Completando os quadrados obtemos

$$-\sqrt{5}\left(x' - \frac{3}{||v_1||\sqrt{5}}\right)^2 + \frac{9\sqrt{5}}{5||v_1||^2} + \sqrt{5}\left(y' + \frac{3}{||v_2||\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{9\sqrt{5}}{5||v_2||^2} = 0.$$

Realizando a mudança de variaveis

$$\begin{cases} x'' = x' - \frac{3}{||v_1||\sqrt{5}}, \\ y'' = y' + \frac{3}{||v_2||\sqrt{5}}, \end{cases}$$

obtemos que

$$-\sqrt{5}x''^2 + \frac{9\sqrt{5}}{5||v_1||^2} + \sqrt{5}y''^2 - \frac{9\sqrt{5}}{5||v_2||^2} = 0.$$

Ou seja,

$$-x''^2 + y''^2 = \frac{9}{5}\left(\frac{1}{||v_2||^2} - \frac{1}{||v_1||^2}\right).$$

Note ainda que

$$||v_1||^2 = \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + 1^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} + 1 = \frac{5+\sqrt{5}}{2},$$

$$||v_2||^2 = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 + 1^2 = \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} + 1 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}.$$

De onde segue que $k = \frac{9}{5}\left(\frac{1}{||v_2||^2} - \frac{1}{||v_1||^2}\right) \neq 0$ e portanto a equação da cônica pode ser escrita como

$$-x''^2 + y''^2 = k$$

onde $k \neq 0$. Concluímos então a figura dada pela equação inicial é uma hipérbole.

Questão 4

[2 Pontos] Determine se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. Justifique adequadamente sua resposta.

1. [0,75 Pontos] Se $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ possui autovalores 1,2,2, então é diagonalizável.

2. [0,75 Pontos] Se $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ possui um único autovalor, então não é diagonalizável.

Resolução.

1. Falsa. De fato, considere $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Note que o polinômio característico de A é dado por $p(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)^2$. Portanto, os autovalores de A são $1, 2, 2$. Note que o autovalor $\lambda = 2$ possui multiplicidade algébrica igual a 2. Encontremos o autoespaço $V_2 = V_\lambda = \ker(A - \lambda I_3) = \ker(A - 2I_3)$. Para isso encontramos a solução do sistema linear abaixo:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Então $x = z = 0$ e temos que $V_2 = \{(0, y, 0) \,|\, y \in \mathbb{R}\} = [(0, 1, 0)]$. Ou seja, $\dim(V_2) = 1$ e segue que a multiplicicdade geométrica do autovalor $\lambda = 2$ é 1. Portanto, a multiplicidade algébrica do autovalor $\lambda = 2$ é maior que sua multiplicidade geométrica. Logo, segue pela teoria vista em sala que A não é diagonalizável. Então a matriz A possui autovalores $1, 2, 2$ e não é diagonalizável.

2. Falsa. De fato, considere $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Note que A é uma matriz diagonal. Portanto, A é obviamente uma matriz diagonalizável. Por outro lado, $p(\lambda) = (1-\lambda)^3$ é o polinômio característico de A. Ou seja, A possui um único autovalor $\lambda = 1$. Então a matriz A possui apenas um autovalor e é diagonalizável.