MA327: Álgebra Linear - Segunda Chamada - Prova 2

Aplicada em 07/12/2022

Turmas 21h-23h

Questão 1 Considere em $\mathbb{R}^4$ o produto interno canônico, e seja U o subespaço dado por

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, x_2 - x_3 = 0\}.$$

1. [1 ponto] Encontre uma base $\mathcal{B}$ de U e uma base $\mathcal{D}$ de $U^\perp$.
2. [1,5 pontos] Dê as coordenadas de um vetor $v \in \mathbb{R}^4$ de forma que o subespaço gerado por $\mathcal{B} \cup \{v\}$ possui um complemento ortogonal de dimensão 1.

SOLUÇÃO:

1. Sabemos que um vetor de U tem a forma

$$(x_1, x_2, x_2, x_1 + 3x_2) = x_1(1, 0, 0, 1) + x_2(0, 1, 1, 3). \tag{1}$$

Denotemos $u_1 = (1, 0, 0, 1)$ e $u_2 = (0, 1, 1, 3)$. Como esses vetores geram U (por 1) e são L.I., segue que $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$ é uma base de U.

Por definição, $U^\perp$ é formado pelos vetores que são ortogonais a todos os vetores de U ou, de forma equivalente, que são ortogonais a todos os vetores de uma base de U. Dessa forma,

$$U^\perp = \{v \in \mathbb{R} : \langle v, u_1\rangle = 0 \text{ e } \langle v, u_2\rangle = 0\}.$$

Se $v = (a, b, c, d) \in$ U$^\perp$, então as condições acima nos dão o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} a + d &= 0 \\ b + c + 3d &= 0 \end{cases}$$

e, ao resolvê-lo, obtemos as relações $d = -a$ e $c = 3a - b$, ou seja, os vetores de $U^\perp$ são da forma

$$(a, b, 3a - b, -a) = a(1, 0, 3, -1) + b(0, 1, -1, 0).$$

Portanto, $U^\perp$ é gerado por $w_1 = (1, 0, 3, -1)$ e $w_2 = (0, 1, -1, 0)$ e, como tais vetores são L.I., segue que $\mathcal{D} = \{w_1, w_2\}$ é uma base de $U^\perp$.

2. Seja $V = [\mathcal{B} \cup \{v\}]$, queremos encontrar v tal que $dim(V^\perp) = 1$. Temos que $\mathbb{R}^4 = V \bigoplus V^\perp$ e, portanto, analisando as dimensões, temos que $dim(V^\perp) = 1$ se, e somente se, $dim(V) = 3$. Agora, como $\mathcal{B} \cup \{v\}$ gera V e possui três vetores, para termos $dim(V) = 3$ é necessário e suficiente que $\mathcal{B} \cup \{v\}$ seja um conjunto L.I. ou, de forma equivalente, $v \notin [\mathcal{B}] = U$. Para isso, podemos tomar $v \in U^\perp$, por exemplo $v = w_2 = (0, 1, -1, 0)$.

Questão 2 Considere o produto interno canônico de $\mathbb{R}^3$. Seja $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear tal que $u = P(v)$ é a projeção ortogonal do elemento $v \in \mathbb{R}^3$ no plano $2y - 3z = 0$. Pede-se:

$a)$ [1 ponto] Encontre a expressão explícita do operador $P(x, y, z)$.

$b)$ [1 ponto] Determine a imagem do operador P.

$c)$ [1 ponto] Determine o núcleo do operador P.

SOLUÇÃO:

$a)$ Seja U o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ definido pelo plano $2y - 3z = 0$, ou seja, $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2y - 3z = 0\}$. Primeiro vamos encontrar uma base ortonormal de U.

Um vetor de U é da forma $(x, 3y, 2y) = x(1, 0, 0) + y(0, 3, 2)$ e, portanto, $U = [(1, 0, 0), (0, 3, 2)]$. Definindo $u_1 = (1, 0, 0)$ e $u_2 = (0, 3, 2)$, temos que eles são ortogonais (consequentemente L.I.) e, portanto, $\mathcal{B} = \left\{ \frac{u1}{||u1||}, \frac{u2}{||u2||} \right\}$ é uma base ortonormal de U. Além disso, calculamos

$$||u_1||^2 = 1 \text{ e } ||u_2||^2 = 13.$$

Assim, a expressão da projeção ortogonal P é

$$P(v) = \left\langle v, \frac{u_1}{||u_1||} \right\rangle \frac{u_1}{||u_1||} + \left\langle v, \frac{u_2}{||u_2||} \right\rangle \frac{u_2}{||u_2||} = \frac{\langle v, u_1 \rangle}{||u_1||^2} u_1 + \frac{\langle v, u_2 \rangle}{||u_2||^2} u_2$$

Se $v = (x, y, z)$, temos

$$\begin{aligned} P(x, y, z) &= \frac{\langle (x, y, z), (1, 0, 0) \rangle}{1}(1, 0, 0) + \frac{\langle (x, y, z), (0, 3, 2) \rangle}{13}(0, 3, 2) \\ &= x(1, 0, 0) + \frac{3y + 2z}{13}(0, 3, 2) = \frac{1}{13}(13x, 9y + 6z, 6y + 4z). \end{aligned}$$

$b)$ Por construção, P é projeção ortogonal em U e devemos ter $Im(P) = U$. Vamos verificar:

$$\begin{aligned} Im(P) &= [P(1, 0, 0), P(0, 1, 0), P(0, 0, 1)] = \left[(1, 0, 0), \left(0, \tfrac{9}{13}, \tfrac{6}{13}\right), \left(0, \tfrac{6}{13}, \tfrac{4}{13}\right)\right] \\ &= [(1, 0, 0), (0, 9, 6), (0, 6, 4)] = [(1, 0, 0), 3(0, 3, 2), 2(0, 3, 2)] = [(1, 0, 0), (0, 3, 2)] = U. \end{aligned}$$

$c)$ Do mesmo modo, pela construção, devemos ter $Ker(P) = U^\perp$. De fato, se $v \in U^\perp$, então $\langle v, u_1 \rangle = \langle v, u_2 \rangle = 0$ e $v \in Ker(P)$, portanto $U^\perp \subset Ker(P)$. Reciprocamente, se $v = (x, y, z) \in Ker(P)$, então pelo item $a)$

$$\begin{cases} 13x &= 0 \\ 9y + 6z &= 0 \\ 6y + 4z &= 0 \end{cases},$$

de onde temos $x = 0$ e $2z = -3y$, ou seja, $v \in [(0, 2, -3)] = U^\perp$. Portanto, $Ker(P) \subset U^\perp$ e concluímos que $Ker(P) = U^\perp$.

Questão 3 Seja S o espaço vetorial de matrizes simétricas 2×2.

1. [1 ponto] Mostre que a seguinte função define um produto interno em S:

$$\langle A, B \rangle = \text{ traço}(AB).$$

2. [1 ponto] Calcule o ângulo entre a matriz identidade e a matriz $B = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

SOLUÇÃO:

1. Precisamos provar cada uma das seguintes propriedade:

- *Positividade:* $\langle A, A \rangle \geq 0$, para todo $A \in S$. Além disso, $\langle A, A \rangle = 0$ se, e somente se, $A = 0_S$;
- *Simetria:* $\langle A, B \rangle = \langle B, A \rangle$, para todo $A, B \in S$;
- *Distributividade:* $\langle A + B, C \rangle = \langle A, C \rangle + \langle B, C \rangle$, para todo $A, B, C \in S$;
- *Homogeneidade:* $\langle \lambda A, B \rangle = \lambda \langle A, B \rangle$, para todo $A, B \in S$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Positividade: Seja $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix} \in S$, temos que

$$\langle A, A \rangle = \text{ traço}(A^2) = \text{ traço} \begin{pmatrix} a_1^2 + a_2^2 & a_1\, a_2 + a_2\, a_3 \\ a_1\, a_2 + a_2\, a_3 & a_2^2 + a_3^2 \end{pmatrix} = a_1^2 + 2a_2^2 + a_3^2$$

Como o quadrado de um número real é sempre não negativo, segue que $\langle A, A \rangle \geq 0$. Além disso, a expressão acima nos mostra que

$$\langle A, A \rangle = 0 \text{ se, e somente se, } a_1 = a_2 = a_3 = 0, \text{ ou seja, } A = 0_S.$$

Simetria: Sejam $A, B \in S$, temos

$$\langle A, B \rangle = \text{ traço}(AB) = \text{ traço}\left((AB)^T\right) = \text{ traço}\left(B^T A^T\right) = \text{ traço}(BA) = \langle B, A \rangle .$$

Portanto, $\langle A, B \rangle = \langle B, A \rangle$.

Distributividade: Sejam $A, B, C \in S$, temos

$$\begin{aligned} \langle A + B, C \rangle &= \text{ traço}((A + B)C) = \text{ traço}(AC + BC) \\ &= \text{ traço}(AC) + \text{ traço}(BC) = \langle A, C \rangle + \langle B, C \rangle . \end{aligned}$$

Portanto, $\langle A + B, C \rangle = \langle A, C \rangle + \langle B, C \rangle$.

Homogeneidade: Sejam $A, B \in S$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos

$$\langle \lambda A, B \rangle = \text{ traço}((\lambda A)B) = \text{ traço}(\lambda(AB)) = \lambda \text{ traço}(AB) = \lambda \langle A, B \rangle .$$

Portanto, $\langle \lambda A, B \rangle = \lambda \langle A, B \rangle$.

Logo, concluímos que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ define um produto interno em S.

2. Denotando por θ o ângulo entre I (matriz identidade 2×2) e $B = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, sabemos que

$$\cos(\theta) = \frac{\langle I, B \rangle}{||I||\,||B||}.$$

Vamos calcular cada produto interno separadamente:

$$\langle I, B \rangle = \text{ traço}(IB) = \text{ traço}(B) = a;$$

$$||I||^2 = \langle I, I \rangle = \text{ traço}(I^2) = \text{ traço}(I) = 2;$$

$$||B||^2 = \langle B, B \rangle = \text{ traço}(B^2) = \text{ traço} \begin{pmatrix} a^2+1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} = a^2 + 2.$$

Dessa forma, concluímos que $\theta = \arccos\left(\dfrac{a}{\sqrt{2a^2+4}}\right)$.

Questão 4 Determine se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. Justifique adequadamente sua resposta.

1. [1,25 pontos] Toda transformação linear $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ que é sobrejetora, é um isomorfismo.

2. [1,25 pontos] Existe um espaço vetorial com produto interno $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ e dois vetores $u, v \in V$ satisfazendo $||u|| = 1$, $||v|| = 2$ e $||u + v|| = 3$ e $\langle u, v\rangle = 0$.

SOLUÇÃO:

1. Verdadeiro. De fato, seja $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ sobrejetora. Temos que $Im(T) = \mathbb{R}^5$ e, em particular, $dim(Im(T)) = 5$. Pelo Teorema Núcleo-Imagem, segue que $dim(Ker(T)) = dim(\mathbb{R}^5) - dim(Im(T)) = 0$, ou seja, T é injetora. Logo, T é um isomorfismo.

2. Falso, vamos provar que tal espaço vetorial não pode existir. Suponha por absurdo que exista V espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ satisfazendo as propriedades enunciadas, ou seja, existem $u, v \in V$ tais que $||u|| = 1$, $||v|| = 2$, $||u + v|| = 3$ e $\langle u, v\rangle = 0$. Temos

$$\begin{aligned} ||u+v||^2 &= \langle u+v, u+v\rangle = \langle u, u\rangle + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle \\ &= \langle u, u\rangle + \langle u, v\rangle + \overline{\langle u, v\rangle} + \langle v, v\rangle = ||u||^2 + 2Re\left(\langle u, v\rangle\right) + ||v||^2 \end{aligned}$$

e, portanto, $Re\left(\langle u, v\rangle\right) = \frac{1}{2}\left(||u+v||^2 - ||u||^2 - ||v||^2\right) = 2$. Porém isso contradiz a hipótese $\langle u, v\rangle = 0$.