Resolução da Prova 2

Questão 1, item a)

Temos que $\mathcal{E}(\boldsymbol{Y}) = \mathcal{E}(V^{-1})\mathcal{E}(\boldsymbol{X}) = \mu\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{X}}$

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(\boldsymbol{Y}) &= \mathrm{E}\,(\boldsymbol{Y}\boldsymbol{Y}') - \mathrm{E}\,(\boldsymbol{Y})\mathrm{E}\,(\boldsymbol{Y})' = \mathrm{E}\,\left(\frac{1}{V}\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}'\frac{1}{V}\right) - \mathrm{E}\,\left(\frac{1}{V}\boldsymbol{X}\right)\mathrm{E}\,\left(\frac{1}{V}\boldsymbol{X}\right)' \\ &\overset{ind}{=} \mathrm{E}\,\left(\frac{1}{V^2}\right)\mathrm{E}\,(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}') - \mathrm{E}^{\,2}\left(\frac{1}{V}\right)\mathrm{E}\,(\boldsymbol{X})\mathrm{E}\,(\boldsymbol{X})',\end{aligned}$$

em que na última igualdade usamos a suposição de independência entre $\boldsymbol{X}$ e V. Como

$$\mathrm{E}\,\left(V^{-2}\right) = \operatorname{var}(V^{-1}) + \mathrm{E}^{\,2}(V^{-1}) = \sigma^2 + \mu^2$$

e

$$\mathrm{E}\,(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}') = \operatorname{cov}(\boldsymbol{X}) + \mathrm{E}\,(\boldsymbol{X})\mathrm{E}\,(\boldsymbol{X})' = \boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\mu}_X\boldsymbol{\mu}_X',$$

segue que

$$\operatorname{cov}(\boldsymbol{Y}) \;=\; (\sigma^2+\mu^2)(\boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\mu}_X\boldsymbol{\mu}_X') - \mu^2\boldsymbol{\mu}_X\boldsymbol{\mu}_X' = (\sigma^2+\mu^2)\boldsymbol{\Sigma} + \sigma^2\boldsymbol{\mu}_X\boldsymbol{\mu}_X'.$$

Questão 1, item b)

Sejam $\boldsymbol{X} \sim N_p(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ e $V \sim gama(\nu/2, \nu/2)$, com $\boldsymbol{X}$ e V independentes. Então, pelo item 2 do formulário, $\boldsymbol{Y} = \frac{1}{\sqrt{V}}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{\mu}$ tem distribuição t de Student p-variada. Assim, temos que:

$$\mathrm{E}\,(\boldsymbol{Y}) = \mathrm{E}\,\left(\frac{1}{\sqrt{V}}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{\mu}\right) \overset{ind}{=} \mathrm{E}\,(V^{-1/2})\underbrace{\mathrm{E}\,(\boldsymbol{X})}_{=\boldsymbol{0}} + \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu},$$

e pelos resultados do item anterior e do item 2 do formulário seguem que

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(\boldsymbol{Y}) &= \operatorname{cov}(V^{-1/2}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{\mu}) = \operatorname{cov}(V^{-1/2}\boldsymbol{X}) = [\operatorname{var}(V^{-1/2}) + \mathrm{E}^{\,2}(V^{-1/2})]\boldsymbol{\Sigma} \\ &= \mathrm{E}\,(V^{-1})\boldsymbol{\Sigma} = \frac{\nu}{\nu-2}\boldsymbol{\Sigma}.\end{aligned}$$

Questão 1), item c) (usar até a metade da folha)

Sejam $\boldsymbol{X} \sim t_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \nu)$ e $\boldsymbol{a}_{(p\times 1)} \in \mathbb{R}^p$ não aleatório. Então, vemos pelo item 2 do formulário que $\boldsymbol{X}$ pode ser representado como

$$\boldsymbol{X} = \frac{1}{\sqrt{V}}\boldsymbol{W} + \boldsymbol{\mu}, \quad \boldsymbol{W} \sim N_p(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma}), \quad V \sim Gama(\nu/2, \nu/2), \quad \boldsymbol{W} \perp V.$$

Logo

$$Y = \boldsymbol{a}\boldsymbol{X} = \frac{1}{\sqrt{V}}\boldsymbol{a}\boldsymbol{W} + \boldsymbol{a}\boldsymbol{\mu},$$

e do item 1 do formulário segue que $\boldsymbol{a}\boldsymbol{W} \sim N_1(0, \boldsymbol{a}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{a}')$, com $\boldsymbol{a}\boldsymbol{\mu}$ sendo um escalar. Logo, $Y \sim t_1(\boldsymbol{a}\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{a}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{a}', \nu)$.

Questão 2), item a)

Faltou dizer que a distribuição conjuntoa de $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{\xi})$ era normal $p+q$ variada e dar uma folha a mais de espaço (mas isto fora considerado na correção).

Questão 2)

Vamos usar os itens 1) e 3) do fromulário. Além disso, podemos definir, pela estrutura do problema, a seguinte relação:

$$\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{L} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix}$$

Por outro lado, temos que:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix} \sim N_{(q+p)} \left[\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Omega} & \boldsymbol{\Sigma} \\ \boldsymbol{\Sigma}' & \boldsymbol{\Psi} \end{pmatrix} \right]$$

Assim,

$$\mathcal{E}\left(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu}\right) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{L} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{E}(\boldsymbol{F}) \\ \mathcal{E}(\boldsymbol{\xi}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{L} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned} Cov\left(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu}\right) &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{L} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} Cov \begin{bmatrix} \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{L}' \\ \boldsymbol{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{L} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Omega} & \boldsymbol{\Sigma} \\ \boldsymbol{\Sigma}' & \boldsymbol{\Psi} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{L}' \\ \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{L\Omega} + \boldsymbol{\Sigma}' & \boldsymbol{L\Sigma} + \boldsymbol{\Psi} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{L}' \\ \boldsymbol{I} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{L\Omega L}' + \boldsymbol{\Sigma}'\boldsymbol{L}' + \boldsymbol{L\Sigma} + \boldsymbol{\Psi} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Sigma_X} \end{aligned}$$

Assim, $\boldsymbol{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma_X})$. Por outro lado, Temos que:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu} \\ \boldsymbol{F} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{L} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E}(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu}) \\ \mathcal{E}(\boldsymbol{F}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{L} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{E}(\boldsymbol{F}) \\ \mathcal{E}(\boldsymbol{\xi}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{L} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
Cov\begin{bmatrix} \boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu} \\ \boldsymbol{F} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{L} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} Cov\begin{bmatrix} \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{L}' & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{L} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Omega} & \boldsymbol{\Sigma} \\ \boldsymbol{\Sigma}' & \boldsymbol{\Psi} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{L}' & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{L\Omega}+\boldsymbol{\Sigma}' & \boldsymbol{L\Sigma}+\boldsymbol{\Psi} \\ \boldsymbol{\Omega} & \boldsymbol{\Sigma} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{L}' & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{L\Omega L}'+\boldsymbol{\Sigma}'\boldsymbol{L}'+\boldsymbol{L\Sigma}+\boldsymbol{\Psi} & \boldsymbol{L\Omega}+\boldsymbol{\Sigma}' \\ \boldsymbol{\Omega L}'+\boldsymbol{\Sigma} & \boldsymbol{\Omega} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
\begin{bmatrix} \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{F} \end{bmatrix} \sim N_{(p+q)}\left[\begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{L\Omega L}'+\boldsymbol{\Sigma}'\boldsymbol{L}'+\boldsymbol{L\Sigma}+\boldsymbol{\Psi} & \boldsymbol{L\Omega}+\boldsymbol{\Sigma}' \\ \boldsymbol{\Omega L}'+\boldsymbol{\Sigma} & \boldsymbol{\Omega} \end{pmatrix}\right]
$$

Desta forma:

$$
\boldsymbol{X}|\boldsymbol{F} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{\Sigma}^*) \text{ e } \boldsymbol{F}|\boldsymbol{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}^{**}, \boldsymbol{\Sigma}^{**})
$$

em que

$$
\boldsymbol{\mu}^* = \boldsymbol{\mu} + (\boldsymbol{L\Omega}+\boldsymbol{\Sigma}')\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{\mu} + (\boldsymbol{L}+\boldsymbol{\Sigma}'\boldsymbol{\Omega}^{-1})\boldsymbol{f}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\Sigma}^* &= (\boldsymbol{L\Omega L}'+\boldsymbol{\Sigma}'\boldsymbol{L}'+\boldsymbol{L\Sigma}+\boldsymbol{\Psi}) - (\boldsymbol{L\Omega}+\boldsymbol{\Sigma}')\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{\Omega L}'+\boldsymbol{\Sigma}) \\
&= (\boldsymbol{L\Omega L}'+\boldsymbol{\Sigma}'\boldsymbol{L}'+\boldsymbol{L\Sigma}+\boldsymbol{\Psi}) - \left(\boldsymbol{L\Omega L}'+\boldsymbol{L\Sigma}+\boldsymbol{\Sigma}'\boldsymbol{L}'+\boldsymbol{\Sigma}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}\right) \\
&= \boldsymbol{\Psi} - \boldsymbol{\Sigma}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}
\end{aligned}
$$

$$
\boldsymbol{\mu}^{**} = (\boldsymbol{\Omega L}'+\boldsymbol{\Sigma})(\boldsymbol{L\Omega L}'+\boldsymbol{\Sigma}'\boldsymbol{L}'+\boldsymbol{L\Sigma}+\boldsymbol{\Psi})^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})
$$

$$
\boldsymbol{\Sigma}^{**} = \boldsymbol{\Omega} - (\boldsymbol{\Omega L}'+\boldsymbol{\Sigma})\left(\boldsymbol{L\Omega L}'+\boldsymbol{\Sigma}'\boldsymbol{L}'+\boldsymbol{L\Sigma}+\boldsymbol{\Psi}\right)^{-1}(\boldsymbol{L\Omega}+\boldsymbol{\Sigma}')
$$

Questão 2), item b)

Temos que $\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu}\sim N_p\left(\boldsymbol{0},\boldsymbol{L\Omega L}'+\boldsymbol{\Sigma}'\boldsymbol{L}'+\boldsymbol{L\Sigma}+\boldsymbol{\Psi}\right)$. Então
$\mathcal{E}(\boldsymbol{F}_1)=\left(\boldsymbol{L}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{L}\right)^{-1}\boldsymbol{L}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\mathcal{E}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})=\boldsymbol{0}$. Analogamente,
$\mathcal{E}(\boldsymbol{F}_2)=\boldsymbol{L}'\left(\boldsymbol{LL}'+\boldsymbol{\Psi}\right)^{-1}\mathcal{E}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})=\boldsymbol{0}$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
Cov(\boldsymbol{F}_1) &= \left(\boldsymbol{L}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{L}\right)^{-1}\boldsymbol{L}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\left(\boldsymbol{L\Omega L}'+\boldsymbol{\Sigma}'\boldsymbol{L}'+\boldsymbol{L\Sigma}+\boldsymbol{\Psi}\right)\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{L}\left(\boldsymbol{L}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{L}\right)^{-1}\\
&= \Big(\left(\boldsymbol{L}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{L}\right)^{-1}\boldsymbol{L}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{L\Omega L}'+\left(\boldsymbol{L}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{L}\right)^{-1}\boldsymbol{L}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}'\boldsymbol{L}'\\
&+ \left(\boldsymbol{L}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{L}\right)^{-1}\boldsymbol{L}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{L\Sigma}+\left(\boldsymbol{L}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{L}\right)^{-1}\boldsymbol{L}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{\Psi}\Big)\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{L}\left(\boldsymbol{L}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{L}\right)^{-1}\\
&= \Big(\boldsymbol{\Omega L}'+\left(\boldsymbol{L}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{L}\right)^{-1}\boldsymbol{L}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}'\boldsymbol{L}'+\boldsymbol{\Sigma}+\left(\boldsymbol{L}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{L}\right)^{-1}\boldsymbol{L}'\Big)\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{L}\left(\boldsymbol{L}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{L}\right)^{-1}\\
&= \boldsymbol{\Omega L}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{L}\left(\boldsymbol{L}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{L}\right)^{-1}+\left(\boldsymbol{L}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{L}\right)^{-1}\boldsymbol{L}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}'\boldsymbol{L}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{L}\left(\boldsymbol{L}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{L}\right)^{-1}\\
&+ \boldsymbol{\Sigma\Psi}^{-1}\boldsymbol{L}\left(\boldsymbol{L}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{L}\right)^{-1}+\left(\boldsymbol{L}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{L}\right)^{-1}\boldsymbol{L}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{L}\left(\boldsymbol{L}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{L}\right)^{-1}\\
&= \boldsymbol{\Omega}+\left(\boldsymbol{L}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{L}\right)^{-1}\boldsymbol{L}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}'+\boldsymbol{\Sigma\Psi}^{-1}\boldsymbol{L}\left(\boldsymbol{L}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{L}\right)^{-1}+\left(\boldsymbol{L}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{L}\right)^{-1}
\end{aligned}$$

$$Cov(\boldsymbol{F}_2)=\boldsymbol{L}'\left(\boldsymbol{LL}'+\boldsymbol{\Psi}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{L\Omega L}'+\boldsymbol{\Sigma}'\boldsymbol{L}'+\boldsymbol{L\Sigma}+\boldsymbol{\Psi}\right)\left(\boldsymbol{LL}'+\boldsymbol{\Psi}\right)^{-1}\boldsymbol{L}$$

Questão 3), item a)

A distribuição marginal de X é obtida somando as probabilidades nas colunas, resultando em

x	0	1
$P(X=x)$	p_1+p_3	p_2+p_4

enquanto a distribuição marginal de Y é obtida somando as probabilidades nas linhas, o que fornece

y	0	1
$P(Y=y)$	p_1+p_2	p_3+p_4

Temos que $X \sim Bern(p_2+p_4)$ e $Y \sim Bern(p_3+p_4)$.

A distribuição condicional de $X|Y=0$ é

x	0	1
$P(X=x\|Y=0)$	$\frac{p_1}{p_1+p_2}$	$\frac{p_2}{p_1+p_2}$

ou seja, $X|Y=0 \sim Bern(p_2/\{p_1+p_2\})$. A distribuição condicional de $X|Y=1$ é

x	0	1
$P(X=x\|Y=1)$	$\frac{p_3}{p_3+p_4}$	$\frac{p_4}{p_3+p_4}$

ou seja, $X|Y=1 \sim Bern(p_4/\{p_3+p_4\})$. A distribuição condicional de $Y|X=0$ é

y	0	1
$P(Y=y\|X=0)$	$\dfrac{p_1}{p_1+p_3}$	$\dfrac{p_3}{p_1+p_3}$

ou seja, $Y|X=0 \sim Bern(p_3/\{p_1+p_3\})$. A distribuição condicional de $Y|X=1$ é

y	0	1
$P(Y=y\|X=1)$	$\dfrac{p_2}{p_2+p_4}$	$\dfrac{p_4}{p_2+p_4}$

ou seja, $Y|X=1 \sim Bern(p_4/\{p_2+p_4\})$.

Segue então que

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\,(X) &= \mathrm{E}\,(X^2) = p_2+p_4 \\
\mathrm{var}\,(X) &= p_2+p_4-(p_2+p_4)^2 = (p_2+p_4)(1-p_2-p_4) = (p_2+p_4)(p_1+p_3) \\
\mathrm{E}\,(Y) &= \mathrm{E}\,(Y^2) = p_3+p_4 \\
\mathrm{var}\,(Y) &= (p_3+p_4)(1-p_3-p_4) = (p_3+p_4)(p_1+p_2) \\
\mathrm{E}\,(XY) &= p_4 \\
\mathrm{cov}\,(X,Y) &= p_4-(p_2+p_4)(p_3+p_4)
\end{aligned}$$

$$\text{cor}\,(X,Y) = \frac{p_4 - (p_2+p_4)(p_3+p_4)}{\sqrt{(p_2+p_4)(p_1+p_3)(p_3+p_4)(p_1+p_2)}}$$

Como os valores de p_1, p_2, p_3 e p_4 são arbitrários (salvo as devidas condições no enunciado da questão), X e Y não são necessariamente independentes. Essas variáveis aleatórias serão independentes quando tais valores satisfizerem $P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$ para quaisquer $x, y \in \{0, 1\}$.

Questão 3), item b)

Uma maneira de tomar os valores de p_1, p_2, p_3 e p_4 de forma que X e Y sejam independentes é a seguinte

y \ x	0	1	$P(X = x)$
0	1/4	1/4	1/2
1	1/4	1/4	1/2
$P(Y = y)$	1/2	1/2	1

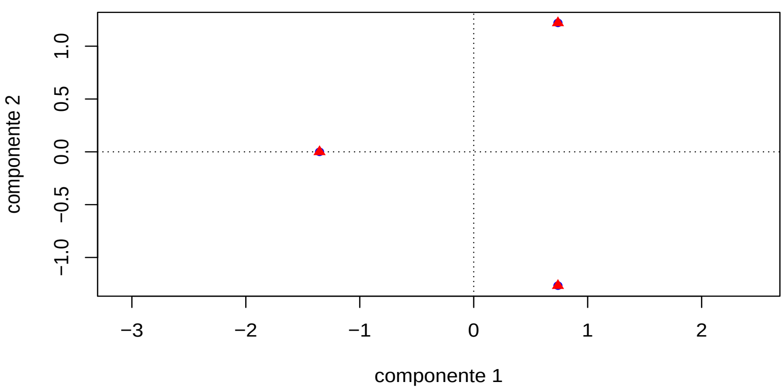
em que podemos notar que $P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y) = 1/4$ para quaisquer valores de $x, y \in \{0, 1\}$, ou seja, X e Y são independentes.

Questão 3), item c)

Considere o quadro abaixo

$y \backslash x$	0	1	2	$P(X=x)$
0	p_1	0	0	p_1
1	0	p_2	0	p_2
2	0	0	p_3	p_3
$P(Y=y)$	p_1	p_2	p_3	1

Vemos que X e Y tem a mesma distribuição marginal. Logo, os perfis das linhas e das colunas da matriz de correspondência $\boldsymbol{P} = \text{diag}\{p_1, p_2, p_3\}$ serão iguais. Com isso, o biplot para esses dados terá os pontos sobrepostos, como na figura abaixo (triângulo vermelho sobre um círculo azul), uma vez que a igualdade nos perfis das linhas e colunas faz com que os dois primeiros componentes na análise de correspondência sejam iguais.



Questão 4), item a)

Temos que $\boldsymbol{X}_i$, $i = 1, 2$, pode ser representado como

$$\boldsymbol{X}_i = \frac{1}{\sqrt{V_i}}\boldsymbol{W}_i + \boldsymbol{\mu}_i, \quad \boldsymbol{W}_i \sim N_p(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma}), \quad V_i \sim Gama(\nu_i/2, \nu_i/2), \quad \boldsymbol{W}_i \perp V_i.$$

Logo

$$\begin{aligned} Y_i &= (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2)'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{X}_i = (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2)'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{V_i}}\boldsymbol{W}_i + \boldsymbol{\mu}_i\right) \\ &= (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2)'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\frac{1}{\sqrt{V_i}}\boldsymbol{W}_i + (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2)'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}_i, \end{aligned}$$

e usando o resultado da questão 1(c) com $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2)'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$, temos que

$$Y_i \sim t_1((\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2)'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}_i, (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2)'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2), \nu_i).$$

Questão 4), item b)

Usando o item 1 do formulário obtemos que Y_i tem distribuição normal univariada com média

$$\mu_{Y_i} = (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2)'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}_i$$

e variância

$$(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2)'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2) = (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2)'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2) = \Delta^2,$$

isto é, $Y_i \sim N_1(\mu_{Y_i}, \Delta^2)$.

Questão 4), item c)

- Para $\boldsymbol{\Sigma}$ fixo, temos que $\Delta \to \infty$ quando algum componente da diferença $\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2 = (\mu_{11} - \mu_{12}, \ldots, \mu_{p1} - \mu_{p2})'$ diverge, isto é, $|\mu_{i1} - \mu_{i2}| \to \infty$ para pelo menos um $i = 1, \ldots, p$.
- Nesse caso, o $PTCI = \Phi(-\Delta/2)$ tende a zero, o que significa que a AD passa a ter uma probabilidade de classificação incorreta tendendo a zero.
- Tal situação indica que quanto mais diferentes forem as médias das duas populações, menor será a probabilidade de classificação incorreta.