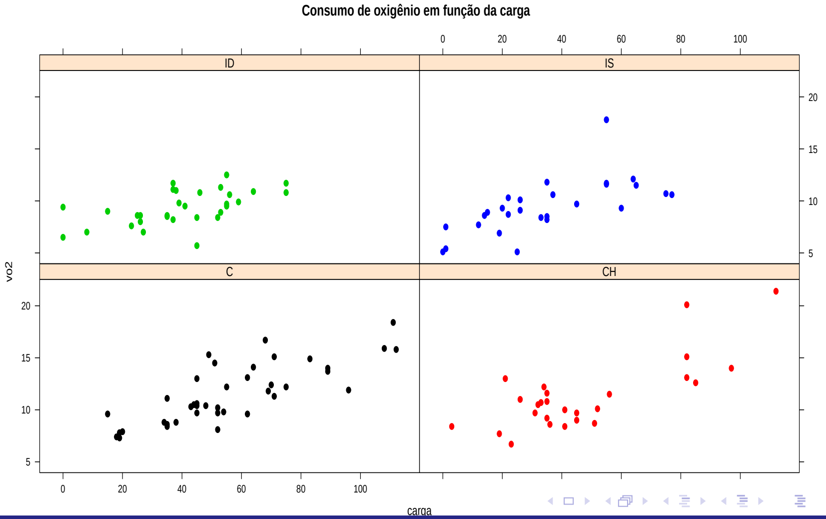
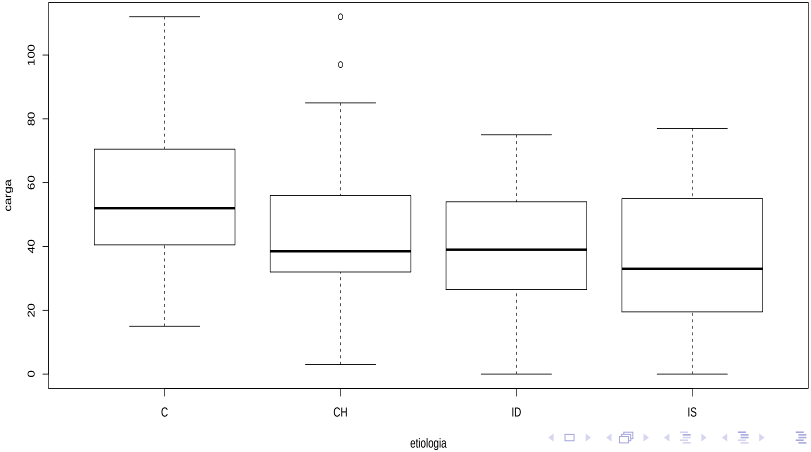
Modelos de regressão múltipla e análise de dados: parte 2

Prof. Caio Azevedo

Exemplo 1: Dispersão entre carga e consumo



Box-plots das cargas em função das etiologias



Box-plots das cargas em função das etiologias

Etiologia	Média	DP	Var.	CV(%)	Mínimo	Máximo	n
C	56,20	25,37	643,70	45,14	15,00	112,00	40
CH	47,46	26,72	714,10	56,30	3,00	112,00	26
ID	39,90	19,05	363,09	47,75	0,00	75,00	31
IS	34,41	22,37	500,64	65,03	0,00	77,00	27

Exemplo 1: considerando as etiologias cardíacas

$$Y_{ij} = \beta_{0i} + \beta_{1i}x_{ij} + \xi_{ij}, i = 1, ..., ; j = 1, ..., n_i$$

- Etiologias : CH ($i = 1$), ID ($i = 2$), IS ($i = 3$), C: ($i = 4$).
- $\xi_{ij} \overset{i.i.d.}{\sim} N(0, \sigma^2)$.
- x_{ij}: carga à que o paciente j que apresenta a etiologia cardíaca i foi submetido (conhecido e não aleatório).
- β_{0i} : consumo esperado para pacientes da i-ésima etiologia submetidos à uma carga igual a 0.
- β_{1i} : incremento (positivo ou negativo) no consumo esperado, de pacientes da i-ésima etiologia, para o aumento em uma unidade da carga.

Análise no R

- Ao ajustarmos o modelo anterior no R, ele fornece a seguinte "Tabela ANOVA":

FV	GL	SQ	QM	Estatística F	p-valor
(1)?	4	13749,95	3437,49	1015,73	$<$0,0001
(2)?	4	473,30	118,33	34,96	$<$0,0001
Resíduos	116	392,57	3,38		

- Que hipóteses estão sendo testadas em cada linha da tabela acima?
- (1)?: $H_0 : \beta_{01} = \beta_{02} = \beta_{03} = \beta_{04} = 0$ vs H_1 : há pelo menos uma diferença?
- (2)?: $H_0 : \beta_{11} = \beta_{12} = \beta_{13} = \beta_{14} = 0$ vs H_1 : há pelo menos uma diferença?

Análise no R

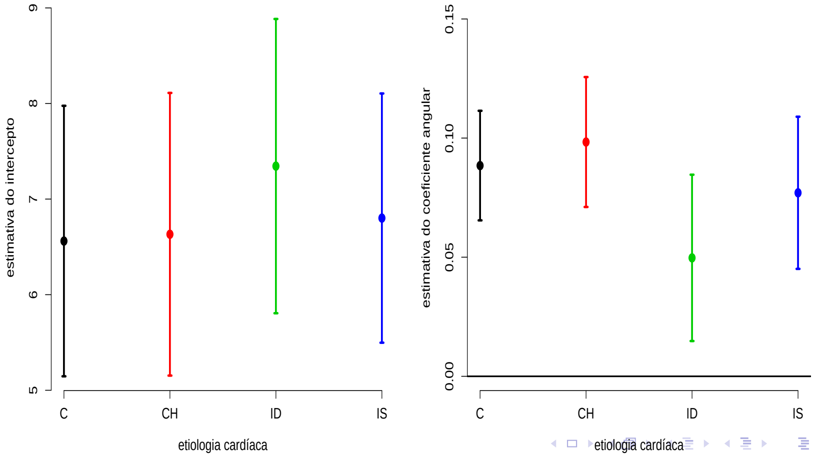
- Para responder à essas perguntas, precisamos saber como as somas de quadrados foram calculadas (matricialmente, de preferência) e estudar suas propriedades.
- Sugestões:
  - Note que $SQ(1) + SQ(2) = SQT - SQR = \mathbf{Y}' \left(\mathbf{H} - n^{-1}\mathbf{J}\right) \mathbf{Y}$.
  - Considerar o mesmo raciocínio utilizado para o desenvolvimento da ANOVA.

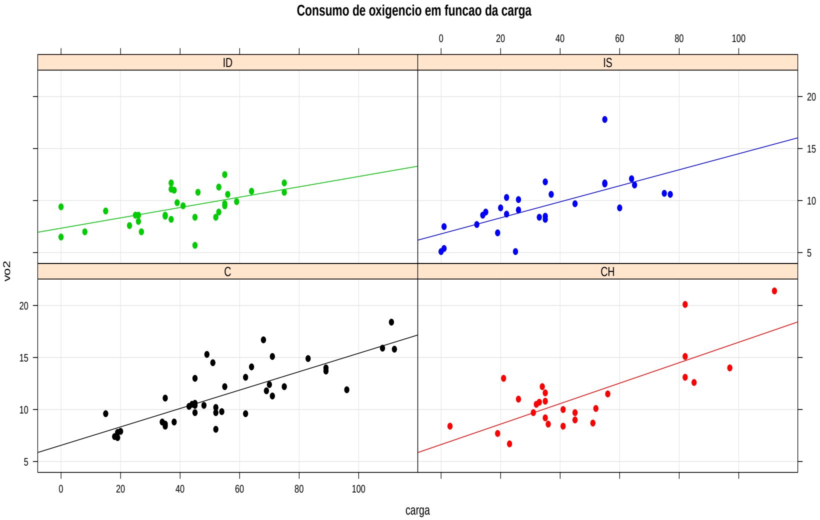
Estimativas dos parâmetros

Parâmetro	Estimativa	EP	Estat. t	IC(95%)	p-valor
$\beta_{01}(C)$	6,56	0,71	9,18	[5,15 ; 7,98]	<0,0001
$\beta_{02}(CH)$	6,63	0,75	8,88	[5,15 ; 8,11]	<0,0001
$\beta_{03}(ID)$	7,35	0,78	9,45	[5,81 ; 8,88]	<0,0001
$\beta_{04}(IS)$	6,80	0,66	10,33	[5,50 ; 8,10]	<0,0001
$\beta_{11}(C)$	0,09	0,01	7,62	[0,07 ; 0,11]	<0,0001
$\beta_{12}(CH)$	0,10	0,01	7,14	[0,07 ; 0,13]	<0,0001
$\beta_{13}(ID)$	0,05	0,02	2,82	[0,01 ; 0,08]	0,0056
$\beta_{14}(IS)$	0,08	0,02	4,78	[0,05 ; 0,11]	<0,0001

O consumo de oxigênio dos pacientes para carga 0 parecem ser semelhantes entre os grupos. O aumento no consumo parecer ser menor que os demais, para pacientes idiopáticos e igual para os outros três tipos.

Estimativas dos parâmetros do modelo completo





Consumo de oxigencio em funcao da carga
ID
IS
C
CH
vo2
carga
0
20
40
60
80
100
5
10
15
20

- Temos interesse em saber se os consumos de oxigênio, para pacientes submetidos à uma carga nula, são os mesmos entre os grupos. Ou seja, desejamos testar se:

$$H_0 : \beta_{01} = \beta_{02} = \beta_{03} = \beta_{04} \; vs \; H_1 : \text{há pelo menos uma diferença} \quad (1)$$

- Temos interesse em saber se os aumentos no consumo de oxigênio, são todos nulos entre os grupos. Ou seja, desejamos testar:

$$H_0 : \beta_{11} = \beta_{12} = \beta_{13} = \beta_{14} = 0 \; vs \; H_1 : \text{há pelo menos uma diferença} \quad (2)$$

- Em sendo não nulos, temos interesse em saber se os aumentos no consumo de oxigênio, são os mesmos entre os grupos. Ou seja, desejamos testar:

$$H_0 : \beta_{11} = \beta_{12} = \beta_{13} = \beta_{14} \textit{ vs } H_1 : \text{há pelo menos uma diferença} \quad (3)$$

- Ao se detectar a existência de pelo menos uma diferença (rejeitar H_0), devemos identificar os padrões dela (comparações dois a dois, por exemplo, sempre procedendo-se com cautela).
- Em geral, muitas das hipóteses de interesse podem ser descritas como:

$$H_0 : \mathbf{C}_{(q \times p)} \boldsymbol{\beta}_{(p \times 1)} = \mathbf{0}_{(q \times 1)} \; vs \; H_1 : \mathbf{C}_{(q \times p)} \boldsymbol{\beta}_{(p \times 1)} \neq \mathbf{0}_{(q \times 1)} \qquad (4)$$

em que, via de regra, $q \leq p$ e $\mathbf{C}$ é conhecida e não aleatória. Além disso, as linhas da matriz $\mathbf{C}$ têm de ser linearmente independentes (do contrário, estar-se-ia testando a(s) mesma(s) hipótese(s) mais de uma vez).

- Como podemos testar as hipóteses acima?

- Lembremos que $\boldsymbol{\beta} = (\beta_{01}, \beta_{02}, \beta_{03}, \beta_{04}, \beta_{11}, \beta_{21}, \beta_{31}, \beta_{41})'$
- A hipótese (nula) (1), pode ser escrita como:

$$H_0 : \begin{cases} \beta_{01} - \beta_{02} = 0 \\ \beta_{01} - \beta_{03} = 0 \\ \beta_{01} - \beta_{04} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow H_0 : \mathbf{C}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0},$$

em que

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- A hipótese (nula) (2), pode ser escrita como:

$$H_0 : \begin{cases} \beta_{11} = 0 \\ \beta_{12} = 0 \\ \beta_{13} = 0 \\ \beta_{14} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow H_0 : \mathbf{C}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0},$$

em que

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- A hipótese (nula) (3), pode ser escrita como:

$$H_0 : \begin{cases} \beta_{11} - \beta_{12} = 0 \\ \beta_{11} - \beta_{13} = 0 \\ \beta_{11} - \beta_{14} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow H_0 : \mathbf{C}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0},$$

em que

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Construção da Estatística do Teste

- Sabemos que:

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{C}\widehat{\boldsymbol{\beta}} \sim N_q(\mathbf{C}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\mathbf{C}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}').$$

- Lembremos que

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-p}(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}})'(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = \frac{1}{n-p}\mathbf{Y}'\left(\mathbf{I}-\mathbf{H}\right)\mathbf{Y} = \frac{SQR}{n-p} = QMR$$

- Temos, sob $H_0(\mathbf{C}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0})$ e usando alguns resultados de distribuições de formas quadráticas (provar), que

$$Q = \frac{1}{\sigma^2}\left(\mathbf{C}\widehat{\boldsymbol{\beta}}\right)'\left(\mathbf{C}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{C}'\right)^{-1}\left(\mathbf{C}\widehat{\boldsymbol{\beta}}\right) \sim \chi^2_{(q)}$$

Cont.

- Além disso, já provammos que $(n-p)\widehat{\sigma}^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{(n-p)}$.
- Temos ainda que

$$Q = \mathbf{Y}'\frac{\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}'\left(\mathbf{C}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}'\right)^{-1}\mathbf{C}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'}{\sigma^2}\mathbf{Y}$$

- Pode-se provar, portanto que, sob H_0:

$$F_t = \frac{Q/q}{\widehat{\sigma}^2/\sigma^2} = \frac{1}{q\widehat{\sigma}^2}\left(\mathbf{C}\widehat{\boldsymbol{\beta}}\right)'\left(\mathbf{C}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{C}'\right)^{-1}\left(\mathbf{C}\widehat{\boldsymbol{\beta}}\right) \sim F_{(q,n-p)}$$

- $p - valor = P(F \geq f_t|H_0)$, em que f_t é o valor calculado da estatística F_t, e $F \sim F_{(q,n-p)}$.

Voltando ao exemplo

- Para o teste de nulidade simultânea de todos os interceptos, temos (estatística (p-valor)): 89,95 ($< 0{,}0001$) $\neq$ 1015,73 (ANOVA).
- Para o teste de nulidade simultânea de todos os incrementos, temos (estatística (p-valor)): 34,96 ($< 0{,}001$) $=$ 34,96 (ANOVA).
- **Para o teste de igualdade simultânea de todos os interceptos, temos (estatística (p-valor)): 0,22 (0,8842).**
- **Para o teste de igualdade simultânea de todos os incrementos, temos (estatística (p-valor)): 1,72 (0,1666).**

- Conclusão: o modelo com um único intercepto e um único coeficiente angular é, em princípio, o mais adequado.
- À rigor devemos avaliar se as hipóteses se verificam (homocedasticidade, ausência de correlação e normalidade dos erros). Faremos isso mais adiante.
- Devemos ajustar um modelo reduzido que contemple apenas uma intercepto e um incremento (comuns à todos os grupos).

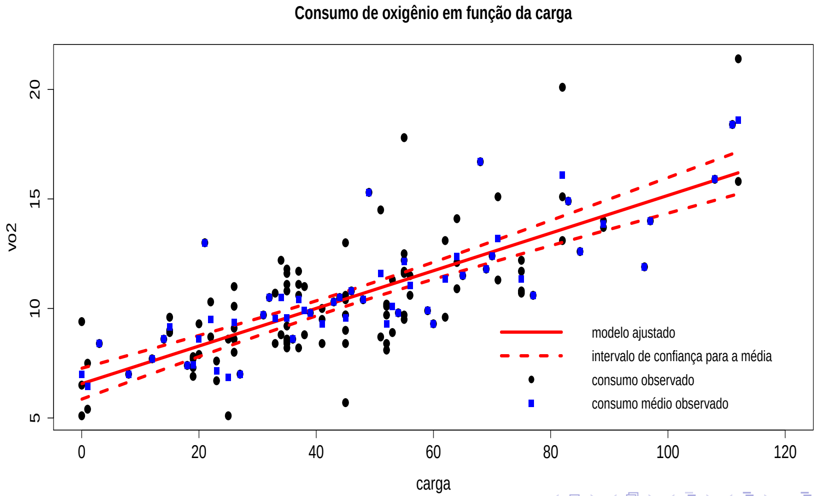
Exemplo 1: modelo reduzido

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \xi_i, i = 1, ..., 124$$

- $\xi_i \overset{i.i.d.}{\sim} N(0, \sigma^2)$.
- x_i: carga à que o paciente i foi submetido (conhecido e não aleatório).
- β_0 : consumo esperado para pacientes submetidos à uma carga igual a 0 (independentemente de sua etiologia cardíaca).
- β_1 : incremento (positivo ou negativo) no consumo esperado para o aumento em uma unidade da carga (independentemente de sua etiologia cardíaca).

Lembramos que tal análise já foi feta anteriormente.

Reta ajustada e intervalos de confiança para as médias



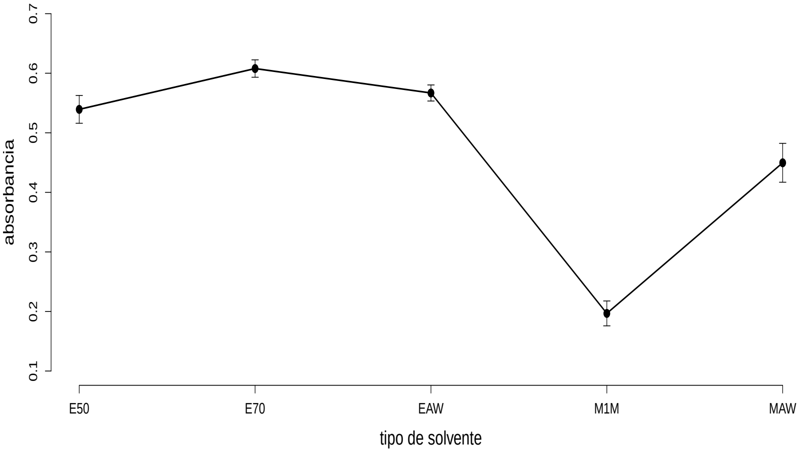
Exemplo 5: Medidas de absorbância

- Exemplo 2: Uma bioquímica (Tecnolóloga de Alimentos) está interessada em estudar a extração de pigmentos naturais, com aplicação como corante em alimentos. Numa primeira etapa tem-se a necessidade de escolher o melhor solvente extrator. A escolha do(s) melhor(es) solventes foi realizada através da medida da absorbância de um pigmento natural do fruto de baguaçú. Fator = tipos de solvente; k=5 níveis; n_k=5 repetições.

- Quanto maior a absorbância, melhor o solvente.
- Unidade experimental: 10 gramas de polpa do fruto de baguaçú.
- Casualização: a partir de 1 kg de polpa, foram sendo retiradas amostras de 10 gramas, onde foram aplicados os tratamentos, numa ordem aleatória.
- Em princípio, o fator de interesse (solvente) é qualitativo.
- Experimento balanceado : mesmo número de observações (unidades experimentais) por nível do fator.
- Possível dependência entre as unidades experimentais?

Dados

Solvente	Absorbância (Observação)				
	1	2	3	4	5
E50	0,5553	0,5623	0,5585	0,5096	0,5110
EAW	0,5436	0,5660	0,5860	0,5731	0,5656
MAW	0,4748	0,4321	0,4309	0,5010	0,4094
E70	0,6286	0,6143	0,5826	0,6079	0,6060
M1M	0,1651	0,1840	0,2144	0,2249	0,1954



absorbancia
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
E50
E70
EAW
M1M
MAW
tipo de solvente

Análise descritiva

Não há sentido em construir box-plots ou histogramas (poucas observações por grupo).

Solvente	Medida descritiva					
	Média	DP	Var.	CV%	Mínimo	Máximo
E50	0,539	0,026	0,0007	4,937	0,510	0,562
E70	0,608	0,017	0,0003	2,744	0,583	0,629
EAW	0,567	0,015	0,0002	2,717	0,544	0,586
M1M	0,197	0,024	0,0006	12,107	0,165	0,225
MAW	0,450	0,037	0,0014	8,283	0,409	0,501

Exemplo 5: Modelo (casela de referência)

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \xi_{ij},$$

$i = 1, 2, .., 5$ (grupos); $j = 1, ..., 5$(unidades experimentais)

- $\xi_{ij} \overset{ind.}{\sim} N(0, \sigma^2)$. Parte sistemática: $\mu_i = \mu + \alpha_i$, é a média populacional relacionada ao i-ésimo fator, $\alpha_1 = 0$ (restrição de identificabilidade) .
- μ : é a média populacional do grupo de referência, $\mu_1 = \mu$.
- $\alpha_i = \mu_i - \mu_1, i = 2, ..., 5$, é o incremento (positivo ou negativo) entre a média do grupo i e a média do grupo de referência.
- Grupos : grupo 1(E50), grupo 2(E70), grupo 3(EAW), grupo 4(M1M), grupo 5(MAW).

Modelo: representação via variáveis indicadoras

$$Y_{ij} = \beta_0 + \sum_{k=2}^{5} \beta_k x_{kj} + \xi_{ij}, x_{kj} = 1, \text{se } k = i \text{ e } 0, \text{caso contrário}$$

$i = 1, 2, .., 5$ (grupos); $j = 1, ..., 5$(unidades experimentais)

- $\xi_{ij} \overset{ind.}{\sim} N(0, \sigma^2)$. Parte sistemática: $\mu_i = \beta_0 + \beta_i$, é a média populacional relacionada ao i-ésimo fator, $\beta_1 = 0$ (restrição de identificabilidade).
- β_0 : é a média populacional do grupo de referência, $\mu_1 = \beta_0$.
- $\beta_i = \mu_i - \mu_1, i = 2, ..., 5$, é o incremento (positivo ou negativo) entre a média do grupo i e a média do grupo de referência.
- Grupos : grupo 1(E50), grupo 2(E70), grupo 3(EAW), grupo 4(M1M), grupo 5(MAW).

Forma matricial

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_{11} \\ \vdots \\ Y_{15} \\ Y_{21} \\ \vdots \\ Y_{25} \\ Y_{31} \\ \vdots \\ Y_{35} \\ Y_{41} \\ \vdots \\ Y_{45} \\ Y_{51} \\ \vdots \\ Y_{55} \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{12} \\ \xi_{13} \\ \xi_{14} \\ \xi_{15} \\ \xi_{21} \\ \vdots \\ \xi_{51} \\ \vdots \\ \xi_{55} \end{bmatrix}$$

Tabela ANOVA

Interesse inicial: Testar: $H_0 : \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$ (todas as médias são iguais) vs H_1 : há pelo menos uma diferença.

FV	SQ	GL	QM	Estatística F	pvalor
Solvente	0,541	4	0,135	212,81	$<$ 0,0001
Resíduo	0,012	20	$<$ 0,001		
Total	0.553	24			

Rejeita-se H_0. Existe algum padrão diferença entre as médias.

Estimativas dos parâmetros do modelo

Parâmetro	Estimativa	EP	IC(95%)	Estat. t	pvalor
μ (E50)	0,539	0,011	[0,517; 0,561]	47,826	$<$ 0,0001
α_2 (E70)	0,069	0,0160	[0,037 ; 0,010]	4,298	0,0003
α_3 (EAW)	0,028	0,0160	[-0,004 ; 0,059]	1,726	0,0998
α_4 (M1M)	-0,343	0,0160	[-0,374; -0,311]	-21,481	$<$ 0,0001
α_5 (MAW)	-0,090	0,0160	[-0,121 ;-0,058]	-5,624	$<$ 0,0001

Parâmetro α_3 não significativo. Isto sugere uma possível equivalência entre os solventes E50 e EAW.

Modelo reduzido (casela de referência)

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \xi_{ij},$$

$i = 1, 2, 3, 4$(grupos); $j = 1, ..., 4$(unidades experimentais)

- Parte sistemática: $\mu_i = \mu + \alpha_i$, é a média populacional relacionada ao i-ésimo fator, $\alpha_1 = 0$ (restrição de identificabilidade).
- μ : é a média populacional do grupo de referência, $\mu_1 = \mu$.
- $\alpha_i = \mu_i - \mu_1, i = 2, 3, 4$, é o incremento (positivo ou negativo) entre a média do grupo i e a média do grupo de referência.
- Grupos : grupo 1(E50/EAW), grupo 2(E70), grupo 3(M1M), grupo 4(MAW).

Estimativas dos parâmetros do modelo

Parâmetro	Estimativa	EP	IC(95%)	Estat. t	pvalor
μ (E50/EAW)	0,553	0,008	[0,537;0,569]	66,310	$<$ 0,0001
α_2 (E70)	0,055	0,0114	[0,026;0,083]	3,792	0,0011
α_3 (M1M)	-0,356	0,0114	[-0,385;-0,328]	-24,665	$<$ 0,0001
α_4 (MAW)	-0,103	0,0114	[-0,132;-0,075]	-7,161	$<$ 0,0001

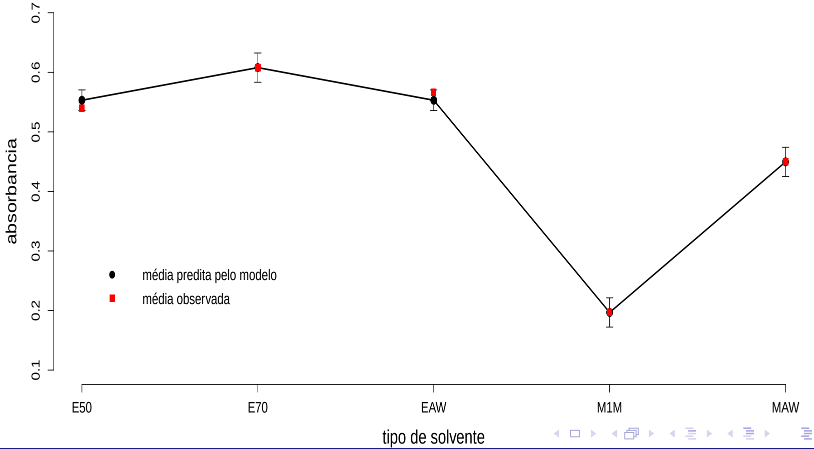
Todos os incrementos α são significativos e todos parecem distintos entre si.

Estimativas finais das médias

Solvente	Estimativa	EP	IC(95%)
E50/EAW	0,553	0,008	[0,537;0,569]
E70	0,607	0,012	[0,584;0,631]
M1M	0,197	0,012	[0,173;0,220]
MAW	0,450	0,012	[0,426;0,472]

- Melhor solvente: E70.
- Pior solvente: M1M.
- Os soventes E50 e EAW são equivalentes.

Gráficos de perfis ajustados



Teste de algumas hipóteses através da metodologia vista para ($\mathbf{C}\beta = \mathbf{M}$) modelo reduzido

- Hipóteses de interesse:
  - Igualdade entre as média dos grupos 1 e 2; $H_{01} : \mu_1 = \mu_2$ vs $H_{11} : \mu_1 \neq \mu_2$.
  - Igualdade entre as médias dos grupos 1 e 4; $H_{02} : \mu_1 = \mu_4$ vs $H_{12} : \mu_1 \neq \mu_4$.
- As hipóteses anteriores podem ser reescritas como:
  - $H_{01} : \alpha_2 = 0$
  - $H_{02} : \alpha_4 = 0$.
- Resultados: $H_{01} : 14,38(0,0011)$; $H_{02} : 51,28(< 0,0001)$.

Exercício (modelo inicial)

- Reescrever as hipóteses abaixo em termos do vetor β (no modelo reduzido) e explicar o que elas significam em termos do problema.
  - $H_{01}: \begin{cases} \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ \mu_1 - \mu_5 = 0 \end{cases}$ vs há pelo menos uma diferença.
  - $H_{02}: \mu_1 = \mu_5$ vs $H_{02}: \mu_1 \neq \mu_5$.
  - $H_{03}: \mu_2 = \mu_5$ vs $H_{03}: \mu_2 \neq \mu_5$.
  - $H_{04}: \frac{\mu_1+\mu_2}{2} = \frac{\mu_4+\mu_5}{2}$ vs $H_{04}: \frac{\mu_1+\mu_2}{2} \neq \frac{\mu_4+\mu_5}{2}$.

Outras hipóteses de interesse? (exemplo artificial)

- Suponha que o pesquisador deseja testar se $H_0 : \frac{\mu_1+\mu_2}{2} = 3\left(\frac{\mu_3+\mu_4}{2}\right) + 5$ vs $H_1 : \frac{\mu_1+\mu_2}{2} \neq 3\left(\frac{\mu_3+\mu_4}{2}\right) + 5$.
- Tal hipótese equivale a testar se $H_0 : 4\mu - \alpha_2 + 3\alpha_3 + 3\alpha_4 = -10$ vs $H_1 : H_0 : 4\mu - \alpha_2 + 3\alpha_3 + 3\alpha_4 \neq -10$.
- Podemos escrever essas hipóteses na forma:

$$H_0 : \mathbf{C}_{(q\times p)}\boldsymbol{\beta}_{(p\times 1)} = \mathbf{M}_{(q\times 1)} \; vs \; H_1 : \mathbf{C}_{(q\times p)}\boldsymbol{\beta}_{(p\times 1)} \neq \mathbf{M}_{(q\times 1)}$$

em que **M** é um vetor conhecido e não aleatório e as outras quantidades são como definidas anteriormente.

Outras hipóteses de interesse? (exemplos artificiais)

- De fato, nesse caso

$$\mathbf{C} = \left[\begin{array}{cccc} 4 & -1 & 3 & 3 \end{array}\right]; \mathbf{M} = \left[\begin{array}{c} -10 \end{array}\right].$$

- Como testar as hipóteses de interesse?
- Essencialmente, utilizando o mesmo raciocínio para testar as hipóteses: $H_0 : \mathbf{C}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ *vs* $H_1 : \mathbf{C}\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$
- Sabemos que: $\widehat{\gamma} = \mathbf{C}\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{M} \sim N_q(\mathbf{C}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{M}, \sigma^2\mathbf{C}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}')$.
- Pode-se provar que, sob H_0:

$$V = \frac{1}{\sigma^2}\left(\mathbf{C}\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{M}\right)'\left(\mathbf{C}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{C}'\right)^{-1}\left(\mathbf{C}\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{M}\right) \sim \chi^2_{(q)}$$

Outras hipóteses de interesse? (exemplos artificiais)

- Além disso, pode-se provar que, sob H_0:

$$W_t = \frac{V/q}{\widehat{\sigma}^2/\sigma^2} = \frac{1}{q\widehat{\sigma}^2}\left(\mathbf{C}\widehat{\beta} - \mathbf{M}\right)'\left(\mathbf{C}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{C}'\right)^{-1}\left(\mathbf{C}\widehat{\beta} - \mathbf{M}\right) \sim F_{(q,n-p)}$$

- $p - valor = P(F \geq w_t | H_0)$, em que w_t é o valor calculado da estatística W_t, e $F \sim F_{(q,n-p)}$.

Outras hipóteses de interesse? (exemplos artificiais)

- Idéia para provar o resultado. Utilizar (provando) o fato de que

$$[\mathbf{Y} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{M}]'\mathbf{B}[\mathbf{Y} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{M}]$$

em que $\mathbf{A} = (\mathbf{C}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')$ e $\mathbf{B} = \frac{1}{\sigma^2}\mathbf{A}[\mathbf{C}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}']^{-1}\mathbf{A}'$

- Assim, deve-se verificar certass propriedas das matrizes $\mathbf{B}$ e $\mathbf{B\Sigma}$ e a ortogonalidade entre $\mathbf{B}$ e $\frac{\mathbf{I}-\mathbf{H}}{\sigma^2}$, em que $\mathbf{\Sigma} = \sigma^2\mathbf{I}$.
- Demonstração: exercício.
- Aplicando-se o resultados nas hipóteses anteriores, obtemos: 37563,07 ($<$ 0,0001).