

Tabelas de contingência: modelos de regressão e testes de hipóteses (parte 1)

Prof. Caio Azevedo

Tabela de contingência $r \times s$: multinomial

		Variável 1 (resposta)					Total
		C_{11}	C_{12}	...	$C_{1(s-1)}$	C_{1s}	
Variável 2 (resposta)	C_{21}	$N_{11}(\theta_{11})$	$N_{12}(\theta_{12})$...	$N_{1(s-1)}(\theta_{1(s-1)})$	$N_{1s}(\theta_{1s})$	$N_{1.}$
	C_{22}	$N_{21}(\theta_{21})$	$N_{22}(\theta_{22})$...	$N_{2(s-1)}(\theta_{2(s-1)})$	$N_{2s}(\theta_{2s})$	$N_{2.}$
	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots	
	C_{2r}	$N_{r1}(\theta_{r1})$	$N_{r2}(\theta_{r2})$...	$N_{r(s-1)}(\theta_{r(s-1)})$	$N_{rs}(\theta_{rs})$	$N_{r.}$
Total	-	$N_{.1}$	$N_{.2}$...	$N_{.(s-1)}$	$N_{.s}$	$n_{..}$

Somente o total geral é fixado.

Tabela de contingência $r \times s$: multinomial

- $\mathbf{N} = (N_{11}, N_{12}, \dots, N_{r(s-1)}) \sim \text{Multinomial}_{r \times s}(n_{..}, \boldsymbol{\theta})$.
- $\boldsymbol{\theta} = (\theta_{11}, \theta_{12}, \dots, \theta_{r(s-1)})'$ ($(r \times s) - 1$ parâmetros), $\theta_{ij} \in (0, 1)$ e
$$\left(\sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=1}^s \theta_{ij} + \sum_{j=1}^{s-1} \theta_{rj} \right) < 1.$$
- $\boldsymbol{\pi} = (\theta_{11}, \theta_{12}, \dots, \theta_{r(s-1)}, \theta_{rs})'$ ($r \times s$ parâmetros), $\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \theta_{ij} = 1$.

Tabela de contingência $r \times s$: produto de multinomiais independentes

		Variável 1 (resposta)					Total
		C_{11}	C_{12}	...	$C_{1(s-1)}$	C_{1s}	
Variável 2 (explicativa)	C_{21}	$N_{11}(\theta_{11})$	$N_{12}(\theta_{12})$...	$N_{1(s-1)}(\theta_{1(s-1)})$	$N_{1s}(\theta_{1s})$	$n_{1.}$
	C_{22}	$N_{21}(\theta_{21})$	$N_{22}(\theta_{22})$...	$N_{2(s-1)}(\theta_{2(s-1)})$	$N_{2s}(\theta_{2s})$	$n_{2.}$
	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots	
	C_{2r}	$N_{r1}(\theta_{r1})$	$N_{r2}(\theta_{r2})$...	$N_{r(s-1)}(\theta_{r(s-1)})$	$N_{rs}(\theta_{rs})$	$n_{r.}$
Total	-	$N_{.1}$	$N_{.2}$...	$N_{.(s-1)}$	$N_{.s}$	$n_{..}$

Os totais marginais por linha ou coluna são fixadas.

Tabela de contingência $r \times s$: produto de multinomiais independentes

- $\mathbf{N}_i = (N_{i1}, N_{i2}, \dots, N_{i(s-1)}) \sim \text{Multinomial}_s(n_{i\cdot}, \boldsymbol{\theta}_i), i = 1, \dots, r.$
- $\boldsymbol{\theta}_i = (\theta_{i1}, \theta_{i2}, \dots, \theta_{i(s-1)})'$ ($(s-1)$ parâmetros), $\theta_{ij} \in (0, 1)$ e
$$\sum_{j=1}^{s-1} \theta_{ij} < 1, i = 1, \dots, r.$$
- $\boldsymbol{\pi} = (\theta_{11}, \theta_{12}, \dots, \theta_{1s})'$ (s parâmetros), $\sum_{j=1}^s \theta_{ij} = 1, i = 1, \dots, r.$
- Defina $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}'_1, \dots, \boldsymbol{\theta}'_r)'$ ($r \times (s-1)$ parâmetros) e $\boldsymbol{\pi} = (\boldsymbol{\pi}'_1, \dots, \boldsymbol{\pi}'_r)'$ ($r \times s$ parâmetros).

Hipóteses de interesse

- Para ambos os modelos probabilísticos (tabelas) muitas (mas não todas as) hipóteses de interesse podem se escritas nas formas matriciais:

- Multinomial

- $H_0 : \mathbf{B}_{b \times (r \times s)} \boldsymbol{\pi}_{(r \times s) \times 1} = \mathbf{D}_{b \times 1}$ vs $H_1 : \mathbf{B} \boldsymbol{\pi} \neq \mathbf{D}$ (1).

- $H_0 : \mathbf{C}_{c \times (r \times s - 1)} \boldsymbol{\theta}_{(r \times s - 1) \times 1} = \mathbf{M}_{c \times 1}$ vs $H_1 : \mathbf{C} \boldsymbol{\theta} \neq \mathbf{M}$ (2).

- Produto de multinomiais

- $H_0 : \mathbf{B}_{b \times (r \times s)} \boldsymbol{\pi}_{(r \times s) \times 1} = \mathbf{D}_{b \times 1}$ vs $H_1 : \mathbf{B} \boldsymbol{\pi} \neq \mathbf{D}$ (1).

- $H_0 : \mathbf{C}_{c \times (r \times (s - 1))} \boldsymbol{\theta}_{(r \times (s - 1)) \times 1} = \mathbf{M}_{c \times 1}$ vs $H_1 : \mathbf{C} \boldsymbol{\theta} \neq \mathbf{M}$ (2).

- Em que \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} e \mathbf{M} são conhecidos e não aleatórios.

Hipóteses de interesse

- Em geral, é mais fácil escrever as hipóteses na forma (1), enquanto que a forma (2) implica numa simplicidade um pouco maior em termos de ajuste do modelo e testes de hipóteses.
- Trabalharemos com a forma (1).
- Exercícios: obter os resultados para a segunda forma.

Exemplo 3 (duas inclinações partidárias)

		Inclinação partidária		
		Democrata	Republicano	Total
Gênero	Feminino	762 (θ_{11})	468(θ_{12})	$n_{1.} = 1230$
	Masculino	484(θ_{21})	477(θ_{22})	$n_{2.} = 961$
Total	-	1246	945	$n_{.} = 2191$

Hipóteses de interesse

- Homogeneidade entre as distribuições.
- $H_0 : \theta_{11} = \theta_{21}$ vs $H_1 : \theta_{11} \neq \theta_{21} \leftrightarrow H_0 : \theta_{11} - \theta_{21} = 0$ vs $H_1 : \theta_{11} - \theta_{21} \neq 0$.
- Nesse caso $\boldsymbol{\pi} = (\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{21}, \theta_{22})'$ e $\boldsymbol{\theta} = (\theta_{11}, \theta_{21})'$.
- Assim $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$; $\mathbf{D} = [0]$.

Exemplo 3 (três inclinações partidárias)

		Inclinação partidária			Total
		Democrata	Independente	Republicano	
Gênero	Feminino	762 (θ_{11})	327(θ_{12})	468(θ_{13})	$n_{1.} = 1557$
	Masculino	484(θ_{21})	239(θ_{22})	477(θ_{23})	$n_{2.} = 1200$
Total	-	1246	566	945	$n_{..} = 2757$

Hipóteses de interesse

- Homogeneidade entre as distribuições.

$$\begin{aligned} \text{■ } H_0 : \begin{cases} \theta_{11} = \theta_{21} \\ \theta_{12} = \theta_{22} \end{cases} &\leftrightarrow H_0 : \begin{cases} \theta_{11} - \theta_{21} = 0 \\ \theta_{12} - \theta_{22} = 0 \end{cases} \quad \text{vs} \\ H_1 : &\text{há pelo menos uma diferença} \end{aligned}$$

- Nesse caso $\boldsymbol{\pi} = (\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{21}, \theta_{22}, \theta_{23})'$ e $\boldsymbol{\theta} = (\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{21}, \theta_{22})'$.

- Assim $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$; $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Hipóteses de interesse

- Caso se rejeite H_0 , as (sub)hipóteses de interesse são:
 - $H_0 : \theta_{11} = \theta_{21}$ vs $H_1 : \theta_{11} \neq \theta_{21} \leftrightarrow H_0 : \theta_{11} - \theta_{21} = 0$ vs $H_1 : \theta_{11} - \theta_{21} \neq 0$.
 - $H_0 : \theta_{12} = \theta_{22}$ vs $H_1 : \theta_{12} \neq \theta_{22} \leftrightarrow H_0 : \theta_{12} - \theta_{22} = 0$ vs $H_1 : \theta_{12} - \theta_{22} \neq 0$.

Hipóteses de interesse

- Para cada (sub) hipótese temos, respectivamente, que:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$

e

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 1: comparação de métodos de detecção de cárie

		Risco de cárie segundo o método convencional			
		Baixo	Médio	Alto	Total
Risco de cárie segundo o método simplificado	Baixo	11 (θ_{11})	5(θ_{12})	0(θ_{13})	16($\theta_{1.}$)
	Médio	14(θ_{21})	34(θ_{22})	7(θ_{23})	55($\theta_{2.}$)
	Alto	2(θ_{31})	13(θ_{32})	11(θ_{33})	26($\theta_{3.}$)
Total	-	27($\theta_{.1}$)	52($\theta_{.2}$)	18($\theta_{.3}$)	$n_{..} = 97$

Hipóteses de interesse

- Homogeneidade (simetria) marginal

$$H_0 : \begin{cases} \theta_{1.} = \theta_{.1} \\ \theta_{2.} = \theta_{.2} \end{cases} \leftrightarrow H_0 : \begin{cases} \theta_{12} + \theta_{13} - \theta_{21} - \theta_{31} = 0 \\ \theta_{21} + \theta_{23} - \theta_{12} - \theta_{32} = 0 \end{cases}$$

vs H_1 : há pelo menos uma diferença

- Nesse caso $\pi = (\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{21}, \theta_{22}, \theta_{23}, \theta_{31}, \theta_{32}, \theta_{33})'$ e

$$\theta = (\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{21}, \theta_{22}, \theta_{23}, \theta_{31}, \theta_{32})'$$

- Assim $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$; $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Exemplo 7: efeitos de certos fatores na sobrevivência de recém nascidos (considerando apenas o fator idade)

idade	N. de cigarros	Sobrevivência		Total
		Não	Sim	
<30	< 5	74 ($\theta_{(1)11}$)	4327($\theta_{(1)12}$)	$n_{(1)1.} = 4401$
	5+	15($\theta_{(1)21}$)	499($\theta_{(1)22}$)	$n_{(1)2.} = 514$
30+	< 5	55($\theta_{(2)11}$)	1741($\theta_{(2)12}$)	$n_{(2)1.} = 1796$
	5+	5($\theta_{(2)21}$)	135($\theta_{(2)22}$)	$n_{(2)2.} = 140$

Hipóteses de interesse

- Independência (sobrevivência e n. de cigarros) dentro de cada estrato (grupo: idade)

$$H_0 : \begin{cases} \theta_{(1)11} = \theta_{(1)21} \\ \theta_{(2)11} = \theta_{(2)21} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta_{(1)11} - \theta_{(1)21} = 0 \\ \theta_{(2)11} - \theta_{(2)21} = 0 \end{cases}$$

vs H_1 : há pelo menos uma diferença

- Nesse caso $\boldsymbol{\pi} = (\theta_{(1)11}, \theta_{(1)12}, \theta_{(1)21}, \theta_{(1)22}, \theta_{(2)11}, \theta_{(2)12}, \theta_{(2)21}, \theta_{(2)22})'$
e $\boldsymbol{\theta} = (\theta_{(1)11}, \theta_{(1)21}, \theta_{(2)11}, \theta_{(2)21})'$.

- Assim $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$; $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Exemplo 7 (fatores idade e duração da gestação)

idade	Dur. da gest.	N. de cigarros	Sobrevivência		Total
			Não	Sim	
<30	≤ 260	< 5	$50(\theta_{(11)11})$	$315(\theta_{(11)12})$	$n_{(11)1.} = 365$
		5+	$9(\theta_{(11)21})$	$40(\theta_{(11)22})$	$n_{(11)2.} = 49$
	>260	< 5	$24(\theta_{(12)11})$	$4012(\theta_{(12)12})$	$n_{(12)1.} = 4036$
		5+	$6(\theta_{(12)21})$	$459(\theta_{(12)22})$	$n_{(12)2.} = 465$
30+	≤ 260	< 5	$41(\theta_{(21)11})$	$147(\theta_{(21)12})$	$n_{(21)1.} = 188$
		5+	$4(\theta_{(21)21})$	$11(\theta_{(21)22})$	$n_{(21)2.} = 15$
	>260	<5	$14(\theta_{(22)11})$	$1594(\theta_{(22)12})$	$n_{(22)1.} = 1608$
		5 +	$1(\theta_{(22)21})$	$124(\theta_{(22)22})$	$n_{(22)2.} = 125$

Hipóteses de interesse

- Independência (sobrevivência e n. de cigarros) dentro de cada estrato (grupo: idade \times duração da gestação)

$$H_0 : \begin{cases} \theta_{(11)11} = \theta_{(11)21} \\ \theta_{(12)11} = \theta_{(12)21} \\ \theta_{(21)11} = \theta_{(21)21} \\ \theta_{(22)11} = \theta_{(22)21} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \theta_{(11)11} - \theta_{(11)21} = 0 \\ \theta_{(12)11} - \theta_{(12)21} = 0 \\ \theta_{(21)11} - \theta_{(21)21} = 0 \\ \theta_{(22)11} - \theta_{(22)21} = 0 \end{cases}$$

vs H_1 : há pelo menos uma diferença

Hipóteses de interesse

- Nesse caso

$$\boldsymbol{\pi} = (\theta_{(11)11}, \theta_{(11)12}, \theta_{(11)21}, \theta_{(11)22}, \theta_{(12)11}, \theta_{(12)12}, \theta_{(12)21}, \theta_{(12)22}, \\ \theta_{(21)11}, \theta_{(21)12}, \theta_{(21)21}, \theta_{(21)22}, \theta_{(22)11}, \theta_{(22)12}, \theta_{(22)21}, \theta_{(22)22})' \text{ e}$$
$$\boldsymbol{\theta} = (\theta_{(11)11}, \theta_{(11)21}, \theta_{(12)11}, \theta_{(12)21}, \theta_{(21)11}, \theta_{(21)21}, \theta_{(22)11}, \theta_{(22)21})'.$$

- Assim

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$; \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0, 0, 0, 0 \end{bmatrix}'.$$

Testes de hipótese

- Como testar as hipóteses de interesse?
- Para cada vetor de parâmetros $\boldsymbol{\pi}$ e $\boldsymbol{\theta}$ e cada modelo probabilístico (multinomial e produto de multinomiais), os estimadores usuais são as proporções amostrais (frequência relativas):

$$\hat{\boldsymbol{\pi}} = [\hat{\theta}_{ij}] = \left[\frac{N_{ij}}{n_{..}} \right] \text{ (multinomial)}$$

$$\hat{\boldsymbol{\pi}} = [\hat{\theta}_{ij}] = \left[\frac{N_{ij}}{n_i} \right] \text{ (produto de multinomiais)}$$

- Os estimadores de máxima verossimilhança coincidem com tais estimadores.

Testes de hipótese

- O vetor $\hat{\theta}$ corresponde ao vetor $\hat{\pi}$ sem algum(ns) elemento(s) (veja as definições anteriores).
- Trabalharemos com o vetor $\hat{\pi}$.
- Problema: (a matriz de) informação de Fisher para qualquer um dos dois modelos probabilísticos é singular (determinante igual à 0) se a cacularmos em função de π (mesmo se todos os θ_{ij} forem diferentes de 0).

Testes de hipótese

- Se a calcularmos em função de θ , ela será não singular (se todos os θ_{ij} forem diferentes de 0).
- O problema acima compromete a obtenção da distribuição assintótica dos estimadores de MV de π .
- Portanto, não utilizaremos os resultados assintóticos associados aos estimadores de MV.
- Contudo, podemos usar outro resultado.

Resultado sobre convergência de variáveis i.i.d.

- Seja X_1, X_2, \dots *i.i.d.* X , $X \sim D(\mu, \sigma)$, em que $D(., .)$ significa qualquer distribuição tal que $\mathcal{E}(X) = \mu$, $\mathcal{V}(X) = \sigma$, ambas finitas, então

$$\sqrt{n}(\bar{X} - \mu) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} N(0, \sigma) \quad (1)$$

$$\bar{X} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \mu \quad (2)$$

em que

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

- Ou seja, para n suficientemente grande, $\bar{X} \approx N(\mu, \sigma/n)$.

Testes de hipótese

- Como cada componente do estimador $\hat{\pi}$ corresponde à uma média de variáveis aleatórias iid Bernoulli(θ_{ij}), utilizaremos os resultados apresentados em (1) e (2).
- Entretanto, mesmo assim, a matriz de variâncias e covariâncias de $\hat{\pi}$ é singular.
- Portanto, o estimador $\hat{\pi}$ converge em distribuição para uma distribuição normal multivariada singular.

Testes de hipótese

- Entretanto, voltando ao conjunto de hipóteses $\mathbf{B}\boldsymbol{\pi} = \mathbf{D}$, temos que, se a matriz \mathbf{B} for tal que $\text{Cov}(\mathbf{B}\boldsymbol{\pi}) = \mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\pi}}\mathbf{B}'$ seja não singular, o resultado sobre convergência em distribuição, de $\mathbf{B}\boldsymbol{\pi}$, para uma normal multivariada não singular, é válido.
- Exemplos de matriz \mathbf{B} que levam à matriz $\text{Cov}(\mathbf{B}\boldsymbol{\pi})$ ser singular: $\mathbf{B} = \mathbf{I}$ ou se houver alguma dependência linear entre suas linhas.

Matriz de variâncias e covariâncias exata de π (modelo multinomial)

$$\begin{aligned}\Sigma_{\pi} &= \text{Cov}(\hat{\pi}) = \\ &= \frac{1}{n_{..}} \begin{bmatrix} \theta_{11}(1 - \theta_{11}) & -\theta_{11}\theta_{12} & -\theta_{11}\theta_{13} & \dots & -\theta_{11}\theta_{rs} \\ -\theta_{11}\theta_{12} & \theta_{12}(1 - \theta_{12}) & -\theta_{12}\theta_{13} & \dots & -\theta_{12}\theta_{rs} \\ -\theta_{11}\theta_{13} & -\theta_{12}\theta_{13} & \theta_{13}(1 - \theta_{13}) & \dots & -\theta_{13}\theta_{rs} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\theta_{11}\theta_{rs} & -\theta_{12}\theta_{rs} & -\theta_{13}\theta_{rs} & \dots & \theta_{rs}(1 - \theta_{rs}) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{n_{..}} [\text{diag}(\pi) - \pi\pi'] \quad (3)\end{aligned}$$

Matriz de variâncias e covariâncias exata de π (modelo produto de multinomiais)

$$\Sigma_{\pi} = Cov(\hat{\pi}) = \begin{bmatrix} \Sigma_{\pi_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Sigma_{\pi_2} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Sigma_{\pi_3} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \Sigma_{\pi_r} \end{bmatrix}$$

em que $\Sigma_{\pi_i} = \frac{1}{n_i} [\text{diag}(\pi_i) - \pi_i \pi_i']$, $i = 1, 2, \dots, r$ ou seja, é uma matriz semelhante à (3), de dimensão $s \times s$ dividida por n_i .

Testes de hipótese: multinomial

- De fato, sob a validade da não singularidade de $\mathbf{B}\Sigma_{\pi}\mathbf{B}'$ e sob H_0 , temos que

$$\sqrt{n}(\mathbf{B}\hat{\pi} - \mathbf{D}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} N_b(\mathbf{0}, \mathbf{B}\Sigma\mathbf{B}')$$

em que b é o número de linhas da matriz \mathbf{B} .

- Além disso, independentemente da validade das suposições acima,

$$\hat{\Sigma} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \Sigma$$

- Portanto, para n suficientemente grande e sob H_0 ,

$$\mathbf{B}\hat{\pi} \approx N_b(\mathbf{D}, \mathbf{B}\Sigma_{\pi}\mathbf{B}').$$

Σ : modelo multinomial

$$\begin{aligned}\Sigma &= \begin{bmatrix} \theta_{11}(1-\theta_{11}) & -\theta_{11}\theta_{12} & -\theta_{11}\theta_{13} & \dots & -\theta_{11}\theta_{rs} \\ -\theta_{11}\theta_{12} & \theta_{12}(1-\theta_{12}) & -\theta_{12}\theta_{13} & \dots & -\theta_{12}\theta_{rs} \\ -\theta_{11}\theta_{13} & -\theta_{12}\theta_{13} & \theta_{13}(1-\theta_{13}) & \dots & -\theta_{13}\theta_{rs} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\theta_{11}\theta_{rs} & -\theta_{12}\theta_{rs} & -\theta_{13}\theta_{rs} & \dots & \theta_{rs}(1-\theta_{rs}) \end{bmatrix} \\ &= \text{diag}(\boldsymbol{\pi}) - \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\pi}' = n_{..}\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\pi}}\end{aligned}\quad (4)$$

$$\text{Assim, } \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\pi}} = \frac{1}{n_{..}}\boldsymbol{\Sigma}$$

Σ produto de multinomiais

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Sigma_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \Sigma_r \end{bmatrix}$$

em que $\Sigma_i = n_i \Sigma_{\pi_i}$, $i = 1, \dots, r$ é uma matriz como em (4) de dimensão $s \times s$. Assim, $\Sigma_{\pi_i} = \frac{1}{n_i} \Sigma_i$ e $\Sigma_{\pi} = \text{diag}(\Sigma_{\pi_1}, \Sigma_{\pi_2}, \dots, \Sigma_{\pi_r})$

$\hat{\Sigma}$ e $\hat{\Sigma}_{\pi}$ modelo multinomial

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_{11}(1 - \hat{\theta}_{11}) & -\hat{\theta}_{11}\hat{\theta}_{12} & -\hat{\theta}_{11}\hat{\theta}_{13} & \dots & -\hat{\theta}_{11}\hat{\theta}_{rs} \\ -\hat{\theta}_{11}\hat{\theta}_{12} & \hat{\theta}_{12}(1 - \hat{\theta}_{12}) & -\hat{\theta}_{12}\hat{\theta}_{13} & \dots & -\hat{\theta}_{12}\hat{\theta}_{rs} \\ -\hat{\theta}_{11}\hat{\theta}_{13} & -\hat{\theta}_{12}\hat{\theta}_{13} & \hat{\theta}_{13}(1 - \hat{\theta}_{13}) & \dots & -\hat{\theta}_{13}\hat{\theta}_{rs} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\hat{\theta}_{11}\hat{\theta}_{rs} & -\hat{\theta}_{12}\hat{\theta}_{rs} & -\hat{\theta}_{13}\hat{\theta}_{rs} & \dots & \hat{\theta}_{rs}(1 - \hat{\theta}_{rs}) \end{bmatrix}$$
$$= \text{diag}(\hat{\pi}) - \hat{\pi}\hat{\pi}' \quad (5)$$

$$\text{e } \hat{\Sigma}_{\pi} = \frac{1}{n} \hat{\Sigma}$$

$\widehat{\Sigma}$ e $\widehat{\Sigma}_{\pi}$ produto de multinomiais

$$\widehat{\Sigma} = \begin{bmatrix} \widehat{\Sigma}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widehat{\Sigma}_2 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \widehat{\Sigma}_3 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \vdots & \widehat{\Sigma}_r \end{bmatrix}$$

em que $\widehat{\Sigma}_i, i = 1, \dots, r$ é uma matriz como em (5) de dimensão $s \times s$.

Além disso, $\widehat{\Sigma}_{\pi_i} = \frac{1}{n_i} \widehat{\Sigma}_i$. Logo, $\widehat{\Sigma}_{\pi} = \text{diag}(\widehat{\Sigma}_{\pi_1}, \widehat{\Sigma}_{\pi_2}, \dots, \widehat{\Sigma}_{\pi_r})$

Teste para Hipóteses de interesse

- Assim, para testar as hipóteses $H_0 : \mathbf{B}\boldsymbol{\pi} = \mathbf{D}$ vs $\mathbf{B}\boldsymbol{\pi} \neq \mathbf{D}$, qualquer que seja o modelo probabilístico, podemos utilizar a estatística

$$Q = (\mathbf{B}\hat{\boldsymbol{\pi}} - \mathbf{D})' \left(\mathbf{B}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{\pi}}\mathbf{B}' \right)^{-1} (\mathbf{B}\hat{\boldsymbol{\pi}} - \mathbf{D})$$

a qual, sob H_0 é tal que $Q \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} \chi_b^2$, em que b é o número de linhas da matriz \mathbf{B} .

Teste para Hipóteses de interesse

- Naturalmente, as linhas da matriz **B** (assim como da matriz **C**) têm de ser linearmente independentes e definir hipóteses não equivalentes.
- Assim, rejeitamos H_0 se $p\text{-valor} \leq \alpha$, em que $p\text{-valor} \approx P(X \geq q|H_0)$, em que $X \sim \chi_b^2$ e q é o valor calculado da estatística Q .

■ Multinomial

- $\hat{\boldsymbol{\pi}} = [\hat{\theta}_{ij}] = \begin{bmatrix} N_{ij} \\ n_{..} \end{bmatrix}$
- $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{\pi}} = \frac{1}{n_{..}} [\text{diag}(\boldsymbol{\pi}) - \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\pi}']$.

■ Produto de Multinomiais

- $\hat{\boldsymbol{\pi}} = [\hat{\theta}_{ij}] = \begin{bmatrix} N_{ij} \\ n_{i.} \end{bmatrix}$
- $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{\pi}} = \text{diag}(\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{\pi}_1}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{\pi}_2}, \dots, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{\pi}_r})$, em que
 $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{\pi}_i} = \frac{1}{n_{i.}} [\text{diag}(\boldsymbol{\pi}_i) - \boldsymbol{\pi}_i\boldsymbol{\pi}_i']$, $i = 1, \dots, r$.

Aplicação da metodologia aos exemplos anteriores

- Exemplo 3 (duas inclinações partidárias): $q = 29,72$, p-valor $< 0,0001$.
- Exemplo 3 (três inclinações partidárias): $q = 30,02$, p-valor $< 0,0001$.
- Exemplo 1 : $q = 8,69$, p-valor = $0,0130$.
- Exemplo 7: (grupo= idade): $q = 2,70$, p-valor= $0,2596$.
- Exemplo 7: (grupo= idade \times duração da gestação):
 $q = 2,50$, p-valor= $0,6450$.

Modelos de regressão lineares

- Todas as hipóteses (nulas) discutidas anteriormente (e outras) podem ser representadas através da seguinte estrutura de regressão:

$$\mathbf{A}_{a \times q} \boldsymbol{\pi}_{q \times 1} = \mathbf{X}_{a \times p} \boldsymbol{\beta}_{p \times 1}$$

em que \mathbf{A} e \mathbf{X} são matrizes de planejamento conhecidas e $\boldsymbol{\beta}$ é um vetor de parâmetros de interesse (de modo a representar as hipóteses a serem testadas e/ou o modelo a ser ajustado). O índice q depende do modelo probabilístico adotado (multinomial ou produto de multinomiais).

Exemplo 3 (duas inclinações partidárias)

- Homogeneidade entre as distribuições.
- $H_0 : \theta_{11} = \theta_{21}$ vs $H_1 : \theta_{11} \neq \theta_{21} \leftrightarrow H_0 : \theta_{11} - \theta_{21} = 0$ vs $H_1 : \theta_{11} - \theta_{21} \neq 0$.

- Nesse caso $\boldsymbol{\pi} = (\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{21}, \theta_{22})'$ e $\boldsymbol{\beta} = (\alpha)$.

- Assim $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

- Modelo

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\pi} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \Rightarrow \begin{bmatrix} \theta_{11} \\ \theta_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$$

Exemplo 3 (três inclinações partidárias)

- Homogeneidade entre as distribuições.

$$\blacksquare H_0 : \begin{cases} \theta_{11} = \theta_{21} \\ \theta_{12} = \theta_{22} \end{cases} \leftrightarrow H_0 : \begin{cases} \theta_{11} - \theta_{21} = 0 \\ \theta_{12} - \theta_{22} = 0 \end{cases} \text{ vs}$$

H_1 : há pelo menos uma diferença

- Nesse caso $\boldsymbol{\pi} = (\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{21}, \theta_{22}, \theta_{23})'$ e $\boldsymbol{\beta} = (\alpha_1, \alpha_2)'$.

Exemplo 3 (três inclinações partidárias)

■ Assim $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

■ Modelo

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\pi} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \Rightarrow \begin{bmatrix} \theta_{11} \\ \theta_{21} \\ \theta_{12} \\ \theta_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 1: comparação de métodos de detecção de cárie

- Homogeneidade (simetria) marginal

$$H_0 : \begin{cases} \theta_{1.} = \theta_{.1} \\ \theta_{2.} = \theta_{.2} \end{cases} \leftrightarrow H_0 : \begin{cases} \theta_{12} + \theta_{13} - \theta_{21} - \theta_{31} = 0 \\ \theta_{21} + \theta_{23} - \theta_{12} - \theta_{32} = 0 \end{cases}$$

vs H_1 : há pelo menos uma diferença

- Nesse caso $\boldsymbol{\pi} = (\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{21}, \theta_{22}, \theta_{23}, \theta_{31}, \theta_{32}, \theta_{33})'$ e

$$\boldsymbol{\beta} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)'$$

- Note que H_0 equivale à

$$H_0 : \begin{cases} \theta_{31} = \theta_{12} + \theta_{13} - \theta_{21} \\ \theta_{32} = \theta_{21} + \theta_{23} - \theta_{12} \end{cases}$$

■ Assim $\mathbf{A} =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Além disso,

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

■ Modelo

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\pi} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \Rightarrow \begin{bmatrix} \theta_{11} \\ \theta_{12} \\ \theta_{13} \\ \theta_{21} \\ \theta_{22} \\ \theta_{23} \\ \theta_{31} \\ \theta_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 \\ -\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 \end{bmatrix} .$$

Exemplo 7: efeitos de certos fatores na sobrevivência de recém nascidos (considerando apenas o fator idade)

- Independência (sobrevivência e n. de cigarros) dentro de cada estrato (grupo: idade)

$$H_0 : \begin{cases} \theta_{(1)11} = \theta_{(1)21} \\ \theta_{(2)11} = \theta_{(2)21} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \theta_{(1)11} - \theta_{(1)21} = 0 \\ \theta_{(2)11} - \theta_{(2)21} = 0 \end{cases}$$

vs H_1 : há pelo menos uma diferença

- Nesse caso $\boldsymbol{\pi} = (\theta_{(1)11}, \theta_{(1)12}, \theta_{(1)21}, \theta_{(1)22}, \theta_{(2)11}, \theta_{(2)12}, \theta_{(2)21}, \theta_{(2)22})'$
e $\boldsymbol{\beta} = (\alpha_1, \alpha_2)'$.

Exemplo 7

■ Assim $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

e

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 7

- Modelo

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\pi} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \Rightarrow \begin{bmatrix} \theta_{(1)11} \\ \theta_{(1)21} \\ \theta_{(2)11} \\ \theta_{(1)21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} .$$

Exemplo 7: efeitos de certos fatores na sobrevivência de recém nascidos (os fatores idade e dur. da gest.)

- Independência (sobrevivência e n. de cigarros) dentro de cada estrato (grupo: idade \times duração da gestação)

$$H_0 : \begin{cases} \theta_{(11)11} = \theta_{(11)21} \\ \theta_{(12)11} = \theta_{(12)21} \\ \theta_{(21)11} = \theta_{(21)21} \\ \theta_{(22)11} = \theta_{(22)21} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \theta_{(11)11} - \theta_{(11)21} = 0 \\ \theta_{(12)11} - \theta_{(12)21} = 0 \\ \theta_{(21)11} - \theta_{(21)21} = 0 \\ \theta_{(22)11} - \theta_{(22)21} = 0 \end{cases}$$

vs H_1 : há pelo menos uma diferença

Exemplo 7

- Nesse caso

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\pi} &= (\theta_{(11)11}, \theta_{(11)12}, \theta_{(11)21}, \theta_{(11)22}, \theta_{(12)11}, \theta_{(12)12}, \theta_{(12)21}, \theta_{(12)22}, \\ &\theta_{(21)11}, \theta_{(21)12}, \theta_{(21)21}, \theta_{(21)22}, \theta_{(22)11}, \theta_{(22)12}, \theta_{(22)21}, \theta_{(22)22})' \\ \text{e } \boldsymbol{\beta} &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)'.\end{aligned}$$

Exemplo 7

$$\blacksquare \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 7

$$\blacksquare \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Exemplo 7

■ Modelo

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\pi} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \Rightarrow \begin{bmatrix} \theta_{(11)11} \\ \theta_{(11)21} \\ \theta_{(12)11} \\ \theta_{(12)21} \\ \theta_{(21)11} \\ \theta_{(21)21} \\ \theta_{(22)11} \\ \theta_{(22)21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} .$$

Ajuste do modelo

- Mínimos quadrados generalizados (MQG): minimizar a seguinte forma quadrática em função de β

$$\left(\widehat{\mathbf{F}} - \mathbf{X}\beta\right)' \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{F}}^{-1} \left(\widehat{\mathbf{F}} - \mathbf{X}\beta\right)$$

em que $\widehat{\mathbf{F}} = \mathbf{A}\widehat{\boldsymbol{\pi}}$, $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{F}} = \text{Cov}(\widehat{\mathbf{F}}) = \mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\pi}}\mathbf{A}'$, $\widehat{\boldsymbol{\pi}}$ são as proporções amostrais e $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\pi}}$ a matriz de covariâncias de $\boldsymbol{\pi}$ calculadas conforme o modelo probabilístico (multinomial ou produto de multinomiais).

- Estimador MQG (como visto anteriormente):

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}^* = (\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{F}}^{-1}\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{F}}^{-1}\widehat{\mathbf{F}}$$

Ajuste do modelo

- Como desconhecemos Σ_F , a substituímos, na fórmula de $\hat{\beta}^*$, por um estimador consistente, por exemplo $\hat{\Sigma}_F = \mathbf{A}\hat{\Sigma}_\pi\mathbf{A}'$. Ou seja, trabalhamos com o estimador

$$\hat{\beta} = \left(\mathbf{X}'\hat{\Sigma}_F^{-1}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\hat{\Sigma}_F^{-1}\hat{\mathbf{F}}$$

em que $\hat{\Sigma}_\pi$ depende do modelo probabilístico (como visto anteriormente).

Ajuste do modelo

- Para tamanhos amostrais $n_{..}$ (multinomial) ou $n_{i.}$ (produto de multinomiais), $i = 1, \dots, r$ suficientemente grandes e sob H_0 temos que $\hat{\beta} \approx N_p(\beta, (\mathbf{X}'\Sigma_F^{-1}\mathbf{X})^{-1})$.
- Esse resultado pode ser utilizado para construir intervalos de confiança para cada componente do vetor β , utilizando a estimativa de Σ_F .

Ajuste do modelo

- O ajuste do modelo pode ser testado através da estatística

$$Q_F = (\widehat{\mathbf{F}} - \mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}})' \widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_F^{-1} (\widehat{\mathbf{F}} - \mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}})$$

- Sob H_0 e para tamanhos amostrais $n_{..}$ (multinomial) ou n_i (produto de multinomiais), $i = 1, \dots, r$ suficientemente grandes, $Q_F \approx \chi^2_{(a-p)}$, em que a é o número de linhas da matriz \mathbf{X} e p é o número de parâmetros do vetor $\boldsymbol{\beta}$.
- Assim, rejeitamos H_0 se p-valor $\leq \alpha$, em que p-valor $\approx P(X \geq q_F | H_0)$, $X \sim \chi^2_{(a-p)}$ e q_F é o valor calculado da estatística Q_F .

Ajuste do modelo

- Dado que o modelo está bem ajustado, podemos ainda testar hipóteses acerca do vetor β , da forma:

$$H_0 : \mathbf{C}_{(c \times p)} \beta_{(p \times 1)} = \mathbf{M}_{(c \times 1)} \text{ vs } H_1 : \mathbf{C}_{(c \times p)} \beta_{(p \times 1)} \neq \mathbf{M}_{(c \times 1)}$$

- Para tal, podemos considerar a estatística usual:

$$Q_C = \left(\mathbf{C} \hat{\beta} - \mathbf{M} \right)' \left[\mathbf{C} (\mathbf{X}' \hat{\Sigma}_F^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{C}' \right]^{-1} \left(\mathbf{C} \hat{\beta} - \mathbf{M} \right)$$

Ajuste do modelo

- Sob H_0 e para tamanhos amostrais $n_{..}$ (multinomial) ou n_i (produto de multinomiais), $i = 1, \dots, r$ suficientemente grandes, $Q_C \approx \chi_C^2$
- Assim, rejeitamos H_0 se p-valor $\leq \alpha$, $\approx P(X \geq q_C | H_0)$, $X \sim \chi_C^2$ e q_C é o valor calculado da estatística Q_C .

Aplicação da metodologia aos exemplos anteriores

- Exemplo 3 (duas inclinações partidárias): $q_F = 29,72$, p-valor $< 0,0001$. Estimativa dos parâmetros (erro-padrão) : $0,57(0,01)$.
- Exemplo 3 (três inclinações partidárias): $q_F = 30,02$, p-valor $< 0,0001$. Estimativa dos parâmetros (erro-padrão) : $0,45(0,01); 0,21(0,01)$.

Aplicação da metodologia aos exemplos anteriores

- Exemplo 1 : $q_F = 8,69$, p-valor = 0,0130.

Parâmetro	Estimativa	EP
α_1	0,12	0,03
α_2	0,08	0,02
α_3	0,00	0,00
α_4	0,08	0,02
α_5	0,38	0,05
α_6	0,10	0,02

Aplicação da metodologia aos exemplos anteriores

- Exemplo 7: (grupo= idade): $q_F = 2,70$, p-valor= 0,2596.

Estimativa dos parâmetros (erro-padrão) :

0,017(0,002); 0,03(0,004).

- Exemplo 7: (grupo= idade \times duração da gestação):

$q_F = 2,50$, p-valor= 0,6450. Estimativa dos parâmetros (erro-padrão) :

0,142(0,017); 0,006(0,001); 0,221(0,029); 0,009(0,002).