Processos Lineares

Prof. Caio Azevedo

Introdução

- Processos lineares desempenham um papel muito importante em ST.
- Isso deve ao fato de possuírem diversas propriedades importantes (interessantes) e também por permitirem a obtenção de resultados de forma menos complicada.
- Além disso, muitos modelos que veremos estão relacionados à esse tipo de processo.
- Uma classe importante de processos lineares que veremos nas próximas aulas é a família ARMA (auto-regressivos de médias móveis) (e suas duas subclasses (AR - Autor-regressivos e MA-médias móveis).

Introdução

- Um processo linear $\{Y_t\}$ é dito ser $MA(\infty)$ (média móvel infinito ou "infinity moving average") se puder ser escrito como:

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \epsilon_{t-j}, t = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

em que $\{\epsilon_t\}$ é um ruído branco estrito (i.e., $\epsilon_t \perp \epsilon_k$, $\forall t \neq k$) e $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$ (embora alguns autores considerem necessário apenas que $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$)

- Note que a equação (1) equivale a dizer que o processo corresponde à uma série matemática da variáveis independentes (ϵ_t), ponderadas por coeficientes não aleatórios (ψ_j).

Operador defasagem

- Uma ferramenta importante para definirmos e obtermos propriedades de processos lineares é o operador defasagem (B) que é dado tal que:

$$B^k Y_t = Y_{t-k}.$$

- **Exemplo:** Considere Y_t um processo MA(∞), então:

$$\begin{aligned} Y_t &= \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \epsilon_{t-j} = \psi_0 \epsilon_t + \psi_1 \epsilon_{t-1} + \psi_2 \epsilon_{t-2} + \ldots \\ &= \psi_0 \epsilon_t + \psi_1 B \epsilon_t + \psi_2 B^2 \epsilon_t + \ldots \\ &= (\psi_0 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \ldots)\epsilon_t = \Psi(B)\epsilon_t \qquad (2) \end{aligned}$$

em que $\Psi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j$.

Exemplo

- Assim, o polinômio $\Psi(B)$ pode ser enxergado como um Filtro Linear, o qual, aplicado no processo de entrada $\{\epsilon_t\}$ produz a saída $\{Y_t\}$.
- Seja Y_t um processo AR(1) estacionário, note, considerando $\epsilon_t \sim RB(0, \sigma^2)$, que:

$$
\begin{aligned}
Y_t &= \phi Y_{t-1} + \epsilon_t \rightarrow Y_t - \phi Y_{t-1} = \epsilon_t \\
\rightarrow Y_t - \phi B Y_t &= \epsilon_t \rightarrow (1 - \phi B) Y_t = \epsilon_t \\
Y_t &= \frac{1}{1 - \phi B} \epsilon_t \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Exemplo

- Assim, igualando (2) a (3) vem que:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-\phi B}\epsilon_t &= (\psi_0 B^0 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \ldots)\epsilon_t \\
\rightarrow 1 &= (1-\phi B)\left(\psi_0 B^0 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \ldots\right) \\
\rightarrow 1 &= \psi_0 B^0 + (\psi_1 - \psi_0\phi)B + (\psi_2 - \psi_1\phi)B^2 + \ldots \quad (4)
\end{aligned}
$$

Exemplo

- Na equação (4) temos dois polinômios em B, que serão iguais se, e somente se, os respectivos coeficientes o forem, ou seja:

$$
\begin{aligned}
\psi_0 &= 1 \\
\psi_1 - \psi_0\phi &= 0 \rightarrow \psi_1 = \phi \\
\psi_2 - \psi_1\phi &= 0 \rightarrow \psi_2 = \phi^2 \\
&\vdots \\
\psi_k - \psi_{k-1}\phi &= 0 \rightarrow \psi_k = \phi^k \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Exemplo

- Analogamente, da fórmula da soma de uma PG infinita temos que:

$$\frac{1}{1-\phi B} = \sum_{j=0}^{\infty}(\phi B)^j = \sum_{j=0}^{\infty}\phi^j B^j,$$

portanto:

$$Y_t = \frac{1}{1-\phi B}\epsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty}\phi^j B^j \epsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty}\phi^j \epsilon_{t-j},$$

logo, Y_t é um processo MA(∞) com $\psi_j = \phi^j$. Além disso, note que se $|\phi| < 1$ então $\sum_{j=0}^{\infty}|\phi^j| < \infty$ e $\sum_{j=0}^{\infty}\left(\phi^j\right)^2 < \infty$.

Exemplo

- O exemplo anterior ilustra um procedimento para obter a representação $MA(\infty)$ de um processo. De fato, seja $Y_t = A(B)\epsilon_t$ com $A(B) = a_0 + a_1 B + a_2 B^2 + \ldots$ De (2) obtemos $A(B) = \Psi(B)$, então os coeficientes $\psi - j$ são encontrados resolvendo essa igualdade de polinômios.
- O seguinte resultado (próximo slide) estabelece que se aplicarmos um filtro linear a um processo estacionário, então o resultado é outro processo estacionário.

Propriedades

- **Definição:** Seja Y_t um processo estacionário com $E(Y_t) = 0$ e (função de) autocovariância $\gamma(h)$. Se $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$ então $X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j Y_{t-j}$ é estacionário com esperança zero e autocovariância dada por:

$$\begin{aligned}
\gamma_X(h) &= Cov\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j Y_{t-j}, \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_k Y_{t-k+h}\right) \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_k Cov(Y_{t-j}, Y_{t-k+h}) \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_k \gamma(h + k - j).
\end{aligned}$$

Propriedades

- Mais ainda, se Y_t é ruído branco então

$$\gamma_X(h) = \sigma^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_{j+h}.$$

- A expressão acima permite calcular as autocovariancias em processos lineares.

Propriedades

- **Exemplo:** No caso do modelo AR(1) (estacionário) provamos que Y_t pode ser representado como um processo MA(∞) do tipo $Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \epsilon_{t-j}$ com $\psi_j = \phi^j$ e $\epsilon_t \sim RB(0, \sigma^2)$. Logo $\gamma(h) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \phi^{j+h} = \sigma^2 \phi^h \sum_{j=0}^{\infty} \phi^{2j} = \sigma^2 \phi^h \frac{1}{1-\phi^2}$. Como $\gamma(0) = \sigma^2/(1-\phi^2)$ então sua função de autocorrelação é dada por $\rho(h) = \phi^h$.

Propriedades

- **Teorema:** Seja Y_t um processo linear satisfazendo $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$, então $|\gamma(h)| \to 0$ quando $h \to 0$. Ou seja, a FAC tende à zero à medida que a distância entre as observação de uma ST aumenta.
- Existe uma classe de processos estacionários que não satisfazem o teorema acima e que será de nosso interesse estudar para definirmos o teorema de Wold. Tais processos são conhecidos como harmônicos ou singulares.

Processos singulares

- Y_t é dito ser um processo singular se satisfaz:

$$Y_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi_j e^{i\lambda_j t} \epsilon_j, \ \ t \in \mathbb{Z},$$

em que $\{\varphi_j\}$ é uma sequência de constantes tais que $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi^2 < \infty$ e λ_j é um número no intervalo $(-\pi, \pi]$, para todo j.

Processos singulares

- É possível demonstrar que um processo singular é estacionário com função de autocovariância:

$$\gamma(h) = \sigma^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi_j^2 e^{i\lambda_j h}, \ \ h \in \mathbb{Z},$$

logo $|\gamma(h)| \not\to 0$ quando $h \to 0$

Teorema de Wold

- **Teorema de Wold:** Todo processo estacionário $\{Y_t\}$ pode ser escrito como $Y_t = U_t + V_t$ em que $U_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \epsilon_{t-j}$ é um processo MA(∞), $V_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi_j e^{i\lambda_j t} \varepsilon_j$ é um processo singular, $\{\epsilon_t\}$ e $\{\varepsilon_t\}$ e são ruídos brancos com $E(\epsilon_t) = E(\varepsilon_t) = 0$, $Var(\epsilon_t) < \infty$ e $Var(\varepsilon_t) < \infty$.A além disso $\{\psi_j\}$, $\{\varphi_j\}$, $\{\lambda_j\}$ satisfazem $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$, $\sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j^2 < \infty$, $\lambda_j \in (-\pi, \pi]$ e $Cov(U_t, V_t) = 0, \forall t$.