# Probabilidade Condicional, independência e Teorema de Bayes

Notas de Aula da Professora Verónica González-López, digitadas por Beatriz Cuyabano, Pós-Graduação IMECC/UNICAMP, com modificações do Prof. Caio Azevedo

# Probabilidade Condicional

- Seja o experimento que consiste em lançar um dado duas vezes e observar a face voltada para cima em cada lançamento.
- O espaço amostral é dado por $\Omega = \{(i, j) \in \mathcal{N}^2 : 1 \leq i \leq 6, 1 \leq j \leq 6\}$.
- Sejam os eventos:

  $A = \{$o valor obtido em cada lançamento é menor ou igual a $2\}$ .

  $B = \{$a soma dos valores obtidos nos dois lançamentos é $4\}$.
- Perguntas:
  - $P(A) =?$
  - $P(B) =?$

# Probabilidade Condicional

- Para calcular as probabilidades dos eventos $A$ e $B$, note que esses eventos correspondem aos seguintes conjuntos:

  $A = \{(1,1);(1,2);(2,1);(2,2)\}, B = \{(1,3);(2,2);(3,1)\}.$

- Portanto, assumindo equiprobabilidade em $\Omega$, e sabendo que o total de resultados possíveis em $\Omega$ é 36, temos que:

$$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}, P(B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

- Além disso, os eventos $A$ e $B$ têm o ponto (elemento) $(2,2)$ em comum, portanto:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{36}.$$

# Probabilidade Condicional

- Suponha agora que, de alguma forma, saibamos que em cada um dos lançamentos, o número a ser observado será menor ou igual a 2, ou seja, $A$ é uma informação que conhecemos "a priori".
- Assumindo a potencial ocorrência de $A$, qual a probabilidade de $B$ acontecer?

$$P(B|A) = P(\text{B ocorrer dado que A ocorre}).$$

- $B$ agora está sendo observado em um espaço amostral diferente de $\Omega$. Com efeito, está sendo observado no espaço delimitado pelo evento $A$.

# Probabilidade Condicional

- Considerando então que $A$ agora é nosso espaço amostral, e assumindo equiprobabilidade em $A$, temos que:

$$\{\text{B ocorrer dado que A ocorre}\} = \{(2,2)\}.$$

- Portanto, $P(B|A) = \dfrac{1}{4}$.
- Note agora que: $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{(1/36)}{(1/9)} = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4}$.

# Probabilidade Condicional

- Definição de probabilidade condicional:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)\,P(B|A)\,.$$

- Portanto, para calcular a probabilidade condicional de um evento dado outro, basta conhecer a probabilidade dos eventos, e não necessariamente seus espaços amostrais.

- OBS:
  - Como $(A \cap B) \subset A$, então por P4 (Propriedade 4), $P(A \cap B) \leq P(A) \rightarrow 0 \leq P(B|A) \leq 1$.
  - Em princípio, podemos ter $P(B|A) > P(B)$ ou $P(B|A) < P(B)$.

# Probabilidade Condicional

- Algumas propriedades da probabilidade condicional. Sejam $A, B, C, A_i \subset \Omega, i = 1, 2, ..., n, ....$ então:
  - $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B|C)$.
  - Se $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$, então:
    - $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i|C\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i|C)$.
    - $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i|C\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|C)$.
  - $P(A|C) = 1 - P(A^c|C)$.
  - Se $A \subset B$, então $P\left(A|C\right) \leq P\left(B|C\right)$.
- Dem: exercício.

# Exemplo 1

- Relembremos a seguinte tabela (link)

| | Masculino (Ma) | Feminino (Fe) | Total |
|---|---|---|---|
| Mat. Pura (M) | 70 | 40 | 110 |
| Mat. Aplicada (A) | 15 | 15 | 30 |
| Estatística (E) | 10 | 20 | 30 |
| Computação (C) | 20 | 10 | 30 |
| Total | 115 | 85 | 200 |

# Exemplo 1

- $P(Fe|E) = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$. (diretamente, pela terceira linha da tabela).
- Outra forma. Temos que

$$P(E \cap Fe) = \frac{20}{200}, P(E) = \frac{30}{200.}$$

- Logo

$$P(Fe|E) = \frac{P(E \cap Fe)}{P(E)} = \frac{(20/200)}{(30/200)} = \frac{20}{200} \times \frac{200}{30} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}.$$

# Exemplo 2

- Uma urna contém 2 bolas brancas (B) e 3 vermelhas (V). Suponha que sorteamos duas bolas ao acaso **sem reposição**.
  - Na primeira retirada temos as seguintes probabilidades:

$$P(B) = \frac{2}{5}, P(V) = \frac{3}{5}.$$

  - Na segunda retirada podemos ter probabilidades diferentes, de acordo com o que fora selecionado na primeira, com efeito:

$$P(B|B) = \frac{1}{4}, P(B|V) = \frac{2}{4}, P(V|B) = \frac{3}{4}, P(V|V) = \frac{2}{4}.$$

# Exemplo 2

- Em termos das probabilidades conjuntas dos resultados relativos a primeira e a segunda retiradas, temos que:

$$
\begin{aligned}
P(B,B) &= P(B)\,P(B|B) = \frac{2}{5}\times\frac{1}{4} = \frac{2}{20} \\
P(B,V) &= P(B)\,P(V|B) = \frac{2}{5}\times\frac{3}{4} = \frac{6}{20} \\
P(V,B) &= P(V)\,P(B|V) = \frac{3}{5}\times\frac{2}{4} = \frac{6}{20} \\
P(V,V) &= P(V)\,P(V|V) = \frac{3}{5}\times\frac{2}{4} = \frac{6}{20}
\end{aligned}
$$

# Exemplo 3

- Uma urna contém 2 bolas brancas (B) e 3 vermelhas (V). Suponha que sorteamos duas bolas ao acaso **com reposição**. Nesse caso, os resultados entre as retiradas são independentes, ou seja, a primeira retirada não influencia nas possibilidades de resultados da segunda retirada.
  - Na primeira retirada temos as seguintes probabilidades:
$$P(B) = \frac{2}{5}, P(V) = \frac{3}{5}.$$
  - Na segunda retirada temos as seguintes probabilidades:
$$P(B|B) = \frac{2}{5}, P(B|V) = \frac{2}{5}, P(V|B) = \frac{3}{5}, P(V|V) = \frac{3}{5}.$$

# Exemplo 3

- Note que, nesse caso, $P(B|*) = P(B)$ e $P(V|*) = P(V)$, $* \in \{B, V\}$.
- Portanto:

$$\begin{aligned}
P(B,B) &= P(B)P(B|B) = P(B)P(B) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25} \\
P(B,V) &= P(B)P(V|B) = P(B)P(V) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25} \\
P(V,B) &= P(V)P(B|V) = P(V)P(B) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{25} \\
P(V,V) &= P(V)P(V|V) = P(V)P(V) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}
\end{aligned}$$

# Exemplo 4

- Considere a mesma urna com 2 bolas brancas (B) e 3 vermelhas (V). Suponha, agora, que sorteamos três bolas ao acaso **sem reposição**.
  - Temos, então, na primeira retirada:

$$P(B) = \frac{2}{5}, P(V) = \frac{3}{5}$$

  - Na segunda retirada, temos que:

$$P(B|B) = \frac{1}{4}, P(B|V) = \frac{2}{4}, P(V|B) = \frac{3}{4}, P(V|V) = \frac{2}{4}$$

# Exemplo 4

- (Cont.) Na terceira retirada, temos que:

$$
\begin{aligned}
P(B|B,B) &= 0, P(V|B,B) = 1, P(B|B,V) = \frac{1}{3},\\
P(V|B,V) &= \frac{2}{3}, P(B|V,B) = \frac{1}{3}, P(V|V,B) = \frac{2}{3},\\
P(B|V,V) &= \frac{2}{3}, P(V|V,V) = \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

# Exemplo 4

- Portanto, por exemplo:

$$
\begin{aligned}
P(B,B,V) &= P(B)\,P(B|B)\,P(V|B,B) = \frac{2}{5}\times\frac{1}{4}\times 1 = \frac{1}{10}\\
P(B,V,B) &= P(B)\,P(V|B)\,P(B|B,V) = \frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{10}
\end{aligned}
$$

- No caso de três eventos $A$, $B$ e $C$, temos que:

$$
P(A\cap B\cap C) = P(A)\,P(B|A)\,P(C|A\cap B) \tag{1}
$$

# Exemplo 4

- No caso geral, $A_i, i = 1, 2, ..., n$, temos que:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1, A_2)...P(A_n|A_1, ..., A_{n-1}) \quad (2)$$

- Para as fórmulas das Equações (3) e (2), em princípio, a ordem do condicionamento dos eventos é irrelevante, ou seja (por exemplo):

$$P(A \cap B \cap C) = P(C)\, P(A|C)\, P(B|A, C) \quad (3)$$

também é válida

# Independência de Eventos

- Em geral, dois eventos $A$ e $B$ são considerados independentes, se, e somente se:
  - $P\left(A|B\right) = P\left(A\right)\left[P(B|A) = P(B)\right]$ ou
  - $P\left(A \cap B\right) = P\left(A\right) P\left(B\right)$
- Ou seja, significa que do conhecimento o evento $A$ não traz nenhuma informação sobre a ocorrência do evento $B$ e vice-versa.

# Teorema de Bayes

- Exemplo de motivação: temos 5 urnas, cada uma com 6 bolas.
  - Duas urnas são do tipo $C_1$, que contém 3 bolas brancas (B)
  - Duas urnas são do tipo $C_2$, que contém 2 bolas brancas (B)
  - Uma urna é do tipo $C_3$, em que 6 bolas são brancas (B)
- Escolhemos ao acaso uma urna, e dela retiramos uma bola. Qual a probabilidade da urna escolhida ter sido do tipo $C_3$, dado que a bola sorteada é branca?

$$P\left(C_3 | B\right) = ?$$

# Teorema de Bayes

- Pela descrição das urnas, sabemos que:

$$P\left(B|C_1\right) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, P\left(B|C_2\right) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, P\left(B|C_3\right) = \frac{6}{6} = 1$$

- Note que

$$P\left(C_3|B\right) = \frac{P\left(C_3 \cap B\right)}{P\left(B\right)} = \frac{P\left(B|C_3\right) P\left(C_3\right)}{P\left(B\right)}.$$

- Pergunta: $P\left(B\right) = ?$
- Note que $B = \left(B \cap C_1\right) \cup \left(B \cap C_2\right) \cup \left(B \cap C_3\right)$.

# Teorema de Bayes

- Note que $C_1$, $C_2$ e $C_3$ são eventos mutuamente exclusivos.
- Além disso, $C_1 \cup C_2 \cup C_3 = \Omega$.
- Assim, $B = (B \cap C_1) \cup (B \cap C_2) \cup (B \cap C_3)$ é uma união disjunta, então

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap C_1) + P(B \cap C_2) + P(B \cap C_3) \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \times 1 = \frac{8}{15} \end{aligned}$$

- Finalmente:

$$P(C_3|B) = \frac{P(C_3 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|C_3)\,P(C_3)}{P(B)} = \frac{1 \times (1/5)}{(8/15)} = \frac{3}{8}.$$

# Teorema de Bayes

- Seja $\{C_1, C_2, ..., C_n\}$ uma partição do espaço amostral $\Omega$, ou seja:
  - $C_i \bigcap C_j = \emptyset$, $\forall\ i \neq j$.
  - $\Omega = C_1 \bigcup C_2 \bigcup ... \bigcup C_n$.
- Seja $A$ um outro evento de $\Omega$, assim:

$$P\left(C_j|A\right) = \frac{P\left(C_j\right) P\left(A|C_j\right)}{\sum_{i=1}^{n} P\left(C_i\right) P\left(A|C_i\right)}, \forall, j = 1, ..., n$$

# Teorema de Bayes

- Demostração: Temos que:

$$P\left(C_j|A\right) = \frac{P\left(C_j \cap A\right)}{P(A)} = \frac{P(C_j)P(A|C_j)}{P(A)} \tag{4}$$

- Por outro lado tem-se que:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap \Omega) = P(A \cap (\cup_{i=1}^{n} C_j)) = P(\cup_{i=1}^{n} (A \cap C_j)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P\left(A \cap C_j\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(C_j\right) P(A|C_j) \end{aligned} \tag{5}$$

# Teorema de Bayes

- A Equação (5) é conhecida como Teorema da Probabilidade Total.
- Finalmente, da Equação (5) na Equação (4), tem-se o resultado desejado, ou seja :

$$P\left(C_j|A\right) = \frac{P(C_j)P(A|C_j)}{\sum_{i=1}^{n} P\left(C_i\right) P(A|C_i)}$$

- Retomando o exemplo das 5 urnas, os três tipos delas formam uma partição do espaço $\Omega = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, e o evento $A$ é a retirada de uma bola branca.