Permutabilidade e o Teorema da Representação de Bruno De Finetti

Prof. Caio Azevedo

Motivação

- Um dos conceitos mais importantes, e muitas vezes, mais questionáveis da inferência Estatística (probabilidade), é o conceito de independência (probabilística,estatística).
- Em geral, para construção de verossimilhanças, faz-se alguma suposição de independência acerca das variáveis aleatórias envolvidas.
- Uma das principais ferramentas nesse sentido (de se obter alguma estrutura de indpendência) é a “condicionalidade” (condicionar a distribuição das variáveis aleatórias de interesse em alguma “quantidade” (des)conhecida).

Motivação (cont.)

- Suponha que existam duas urnas: uma com 6 bolas brancas e 4 bolas pretas e outra com 4 bolas brancas e 6 bolas pretas.
- Sorteia-se uma urna (com probabilidade $1/2$ para cada uma) e da urna sorteada (sem se saber qual urna foi de fato sorteada), faz-se extrações sucessivas ao acaso, com reposição.
- Tais extrações **não são independentes** pois, à medida que se conhece os resultados, estaremos inclinados à concluir que a urna escolhida é aquela que contem o maior número de bolas da cor que mais vezes foi sorteada.

Motivação (cont.)

- Sejam os eventos $A = \{preta, branca, branca, preta, branca\}$ e B $= \{branca, preta, preta, branca, branca\}$
- Note que (pelo teorema da probabilidade total)
  $P(A) = P(A \cup urna1) + P(A \cup urna2) = \frac{1}{2}[(\frac{3}{5})^3(\frac{2}{5})^2 + (\frac{3}{5})^2(\frac{2}{5})^3]$
  $P(B) = P(B \cup urna1) + P(B \cup urna2) = \frac{1}{2}[(\frac{3}{5})^3(\frac{2}{5})^2 + (\frac{3}{5})^2(\frac{2}{5})^3]$
- Logo $P(A) = P(B)$. Na verdade, todas as sucessões que variam apenas na ordem possuem a mesma probabilidade de ocorrência.

Permutabilidade

- A independência, de fato, é perdida na medida que não sabemos de qual urna estamos selecionando as bolas. Em outras palavras "desconhecemos o verdadeiro valor do parâmetro".
- Dizemos então que os eventos que correspondem à todas as sucessões que variam apenas na ordem, são permutáveis (embora não independentes).
- Em outras palavras, por exemplo:

$$P\{preta, branca, branca, preta, branca\} \neq$$

$$P\{preta\}P\{branca\}P\{branca\}P\{preta\}P\{branca\}$$

(respeitando a ordem de sorteio)

Permutabilidade

- Dizemos que um conjunto de variáveis aleatórias $X_1, ..., X_n$, com fdp (conjunta) p(.), são permutáveis se:

$$\begin{aligned} p(x_1, ..., x_n) &= p(x_{\pi(1)}, ..., x_{\pi(n)}) \\ p(\boldsymbol{x}) &= p(\boldsymbol{x_\pi}) \end{aligned}$$

para qualquer permutação $\boldsymbol{\pi} = \{\pi(1), \pi(2)..., \pi(n)\}'$, em que $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n)'$ e $\boldsymbol{x_\pi} = (x_{\pi(1)}, ..., x_{\pi(n)})'$.

Permutabilidade

- Exemplo de três variáveis aleatórias permutáveis:

$$\begin{aligned} p(x_1, x_2, x_3) &= p(x_1, x_3, x_2) = p(x_2, x_1, x_3) = p(x_3, x_1, x_2) \\ &= p(x_2, x_3, x_1) = p(x_3, x_2, x_1) \end{aligned}$$

- No contexto da inferência bayesiana, as variáveis aleatórias, em geral, são condicionalmente independentes (condicionadas no parâmetro θ) e marginal permutáveis em relação à ele.

Permutabilidade

- Exemplo: Seja $\boldsymbol{X} = (X_1, ..., X_n)'$ tal que

$$p(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{n!\left(1+\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{n+1}} \prod_{i=1}^{n} I_{(0,\infty)}(x_i)$$

Assim, as componentes de $\boldsymbol{X}$ são permutáveis. Basta notar que $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_{\pi_{(i)}}$ e $\prod_{i=1}^{n} I_{(0,\infty)}(x_i) = \prod_{i=1}^{n} I_{(0,\infty)}(x_{\pi_{(i)}})$.

- Contudo, $X_i|\theta \overset{i.i.d.}{\sim} exp(\theta^{-1})$, com $\theta \sim exp(1)$. Ou seja:

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{x}) &= \int_0^\infty \prod_{i=1}^{n} p(x_i|\theta)p(\theta)d\theta = \prod_{i=1}^{n} I_{(0,\infty)}(x_i) \int_0^\infty \theta^n e^{-(n\overline{x}+1)\theta} d\theta \\ &= \frac{\prod_{i=1}^{n} I_{(0,\infty)}(x_i)}{\Gamma(n+1)\left(1+\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{n+1}} = \frac{1}{n!\left(1+\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{n+1}} \prod_{i=1}^{n} I_{(0,\infty)}(x_i) \end{aligned}$$

Permutabilidade

- A distribuição anterior (veremos mais adiante) é conhecida como distribuição preditiva à priori da amostra ($\boldsymbol{x}$).
- Um outro exemplo se encontra aqui, slide 17.
- Exercício. Seja $\boldsymbol{X} = (X_1, .., X_n)'$, tal que

$$p(\boldsymbol{x}) = \beta\left(n(\overline{x} - 1) + a, n\overline{x} + b\right) \prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{1,2,\ldots\}}(x_i).$$

  - Prove que as componentes de $\boldsymbol{X}$ são permutáveis.
  - Prove que $X_i|\theta \overset{iid}{\sim} \text{geométrica}, \mathcal{E}(X|\theta) = \frac{1}{\theta}$, $\theta \sim \beta(a, b)$.

Teorema da Representação de De Finetti

- Sejam $X_1, X_2, ...$ uma sequência de variáveis aleatórias permutáveis, então, $X_1, X_2, ...$ são iid, condicionadas em algum parâmetro (escalar ou vetor) ou outro objeto aleatório.
- Uma consequência de grande relevância do teorema acima, para a Inferência Bayesiana é que

$$p_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = p_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}_{\pi}) \leftrightarrow p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} p_X(x_i|\boldsymbol{\theta})$$