

# Poder do teste e determinação do tamanho da amostra:PCA & PBC

Prof. Caio Azevedo

## ■ Relembrando:

- $\alpha$  = probabilidade do erro do tipo I:  $P(\text{Rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é verdadeira})$ .
  - $\beta$  = probabilidade do erro do tipo II:  $P(\text{Não rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é falsa})$ .
  - $\psi$  = poder do teste :  $= 1 - \beta = P(\text{Rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é falsa})$ .
- 
- Em geral, em qualquer experimento, a probabilidade do erro do tipo I é controlada ( $\alpha$ ).
  - A probabilidade do erro do tipo II (conseqüentemente o poder do teste) não é, em geral, controlada.
  - Como determinar tamanhos de amostra (por tratamento/no geral) que garantam um poder mínimo?
  - Como calcular o poder do teste, para um dado experimento?

- Sejam  $X_1, X_2, \dots, X_n \stackrel{ind}{\sim} N(\mu_i, \sigma_i^2)$ .
- Defina  $Y = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i}{\sigma_i}\right)^2$ . Dizemos então que  $Y$  tem distribuição qui-quadrado não central com  $n$  graus de liberdade e parâmetro de não-centralidade  $\delta = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\mu_i}{\sigma_i}\right)^2$
- Notação  $Y \sim \chi_{(n,\delta)}^2$ , cuja fdp é dada por

$$f_Y(y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{-\delta/2} (\delta/2)^i}{i!} f_{W_{n+2i}}(y) \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y),$$

em que  $W_{n+2i} \sim \chi_{(n+2i)}^2$

- Se  $\delta = 0$ , então  $Y \sim \chi_{(n)}^2$ .

- Seja  $V$  uma outra v.a., independente de  $Y$ ,  $V \sim \chi^2_{(m)}$ .
- Defina  $F = \frac{Y/n}{V/m}$ . Então,  $F$  tem distribuição F não central com graus de liberdade,  $n$  e  $m$  e parâmetro de não centralidade  $\delta$ .
- Notação  $F \sim \chi^2_{(n,m,\delta)}$ , cuja fdp é dada por

$$f_F(f) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{-\delta/2}(\delta/2)^i}{\beta(m/2, n/2 + i)i!} \left(\frac{n}{m}\right)^{n/2+i} \left(\frac{m}{m+nf}\right)^{(n+m)/2+i} \\ \times f^{n/2-1+i} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(f)$$

em que  $\beta(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx$

# ANOVA PCA com um único fator

- Tem-se um único fator com  $k$  níveis (grupos ou tratamentos).
- Em cada grupo tem-se  $n_i, i = 1, 2, \dots, k$  unidades experimentais.
- Tem-se um total de  $n = \sum_{i=1}^k n_i$  observações.

## Modelo (CR) para um único fator

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \xi_{ij}, i = 1, 2, \dots, k$$

(grupos);  $j = 1, \dots, n_i$  (unidades experimentais)

- Erros  $\xi_{ij} \stackrel{i.i.d}{\sim} N(0, \sigma^2)$ ,  $\mu, \alpha_i$  não aleatórios.
- $\alpha_1 = 0$ .
- Hipótese de interesse (primário)  $H_0 : \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_k = 0$  vs  $H_1$  : pelo menos uma desigualdade

- Lembremos que, sob  $H_0$ ,  $V = SQF/\sigma^2 \sim \chi^2_{(k-1)}$ .
- Independentemente de  $H_0$  ser verdadeira,  $W = SQR/\sigma^2 \sim \chi^2_{(n-k)}$ .
- Assim, sob  $H_0 = F = \frac{V/(k-1)}{W/(n-k)} \sim F_{(k-1, n-k)}$ .
- Lembrando que :

$$\mathcal{E}(SQF) = (k-1)\sigma^2 + \sum_{i=1}^k n_i(\mu_i - \bar{\mu})^2, \bar{\mu} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \mu_i$$

- No caso da parametrização CR, tem-se que

$$\mu_i - \bar{\mu} = \alpha_i - \bar{\alpha}, \bar{\alpha} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \alpha_i$$

assim

$$\mathcal{E}(SQF/\sigma^2) = \underbrace{(k-1)}_{\text{graus de liberdade}} + \underbrace{\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^k n_i(\alpha_i - \bar{\alpha})^2}_{\text{parâmetro de não centralidade}} .$$

- Assim, se  $H_0$  não for verdadeira, então

$$V \sim \chi^2_{(k-1, \delta)}, \delta = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (\alpha_i - \bar{\alpha})^2}{\sigma^2}.$$

- Portanto,  $\mathcal{E}(SQF/\sigma^2) = (k - 1) + \delta$ .
- Segue-se que, sob  $H_1$ ,  $F \sim F_{(k-1, n-k, \delta)}$
- Regra para obtenção do parâmetro de não-centralidade: em geral,

$\mathcal{E}(\text{Soma de Quadrados (Fator, Interação, Bloco)}/\sigma^2) =$   
graus de liberdade + parâmetro de não centralidade



- Assim, para um dado valor de  $\delta$  e para um nível de significância fixado  $\alpha$ , temos que o poder do teste é dado por

$$\psi = P(F_1 > f_c | H_0 \text{ é falsa}), F_1 \sim F_{(k-1, n-k, \delta)}$$

em que  $f_c$  (valor crítico) é o valor da distribuição  $F_{(k-1, n-k)}$ ,  
 $P(F_0 > f_c | H_0) = \alpha$ , ( $F_0 \sim F_{(k-1, n-k)}$ ).

- A função poder (em  $\delta$ ) é dada por:

$$\psi(\delta) = P(F_1 > f_c | H_0 \text{ é falsa}), F_1 \sim F((k-1, n-k, \delta)) \quad (1)$$

- Para um determinado conjunto de dados, podemos estimar  $\delta$ , através de

$$\hat{\delta} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (\hat{\alpha}_i - \hat{\bar{\alpha}})^2}{\hat{\sigma}^2},$$

em que  $\hat{\alpha}_i, i = 1, 2, \dots, k$  são os estimadores de mínimos quadrados,

$$\hat{\bar{\alpha}} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \hat{\alpha}_i \text{ e } \hat{\sigma}^2 = QMR.$$

- Logo, o poder estimado é dado por

$$\hat{\psi} = \psi(\hat{\delta})$$

ou seja, utiliza-se  $\hat{\delta}$  na equação (1)

## Exemplo 2 (retomando)

- Exemplo 2: Uma bioquímica (Tecnologia de Alimentos) está interessada em estudar a extração de pigmentos naturais, com aplicação como corante em alimentos. Numa primeira etapa tem-se a necessidade de escolher o melhor solvente extrator. A escolha do(s) melhor(es) solventes foi realizada através da medida da absorbância de um pigmento natural do fruto de baguaçú.  
Fator = tipos de solvente;  $k=5$  níveis;  $n_k=5$  repetições.

- Da análise anterior, temos:

$$\tilde{\alpha} = (0; 0,06854; 0,02752; -0,34258; -0,08970) \text{ e}$$

$$\tilde{\sigma}^2 = 0,0006358708.$$

- Isto implica que  $\tilde{\delta} = 851,222$ .
- Neste caso, para um  $\alpha = 0,05$ , o valor crítico é igual à 2,866.
- Assim, o poder estimado será igual à
$$\tilde{\psi} = P(F_1 > 2,866 | \text{é falsa}) \equiv P(F_1 > 2,866) > 0,9999$$

## Exemplo 3 (retomando)

- Tem-se o interesse em se saber se a quantidade de fósforo existente (administrada) no solo afeta a produção de milho (de uma certa variedade).
- Fator: quantidade de fósforo,  $k = 5$  níveis,  $n_i = 4, i = 1, 2, 3, 4$  repetições por tratamento (quantidade de fósforo administrada).
- Procedimento: 20 porções de terras, chamadas de parcelas, (em condições semelhantes) foram consideradas e cada uma delas recebeu uma determinada quantidade de fósforo, de modo aleatório (completamente casualizado).

## Exemplo 3 (cont.)

- Da análise anterior, temos:  $\tilde{\alpha} = (0, 4, 9925; 3, 6075; 3, 6525; 4, 7025)$  e  $\tilde{\sigma}^2 = 1, 556012$ ;
- Logo  $\tilde{\delta} = 40, 871$ .
- Assim, temos os seguintes resultados, conforme o valor de  $\alpha$  escolhido.

$\alpha$	$f_c$	$\tilde{\psi}$
0,90	2,36	0,9992
0,95	3,06	0,9965
0,99	4,89	0,9624

## Exemplo 3 (cont.)

- Suponha que o pesquisador queira realizar um outro experimento semelhante à este em questão.
- Ele quer, para  $\alpha = 0,95$ , um poder de pelo menos 0,90.
- Qual deve ser o tamanho para cada tratamento (consequentemente o tamanho total) para obter este poder?

$n_i$	$n$	$f_c$	$\delta$	$\tilde{\psi}$
2	10	5,19	20,43	0,6289
3	15	3,47	30,65	0,9536
4	20	3,06	40,87	0,9965

# Como proceder (PCA)

- Perguntar ao pesquisador e/ou usar informações de experimentos anteriores sobre o nível de significância ( $\alpha$ ).
- Perguntar ao pesquisador e/ou usar informações de experimentos anteriores sobre a variabilidade ( $\sigma^2$ ).
- Perguntar ao pesquisador e/ou usar informações de experimentos anteriores sobre a magnitude das diferenças entre as médias.

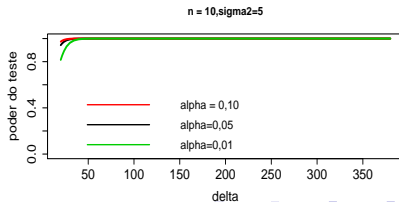
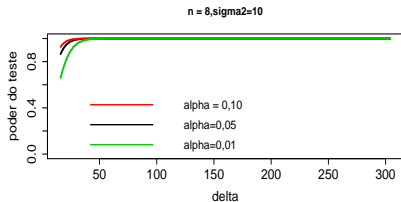
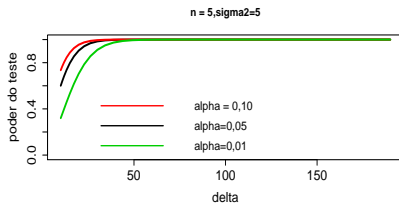
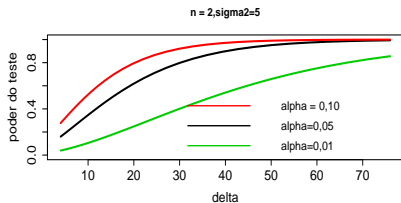


# Exemplo artificial

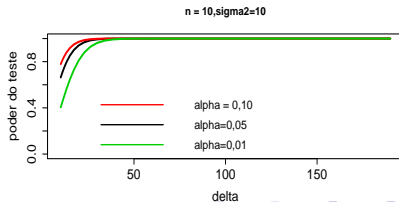
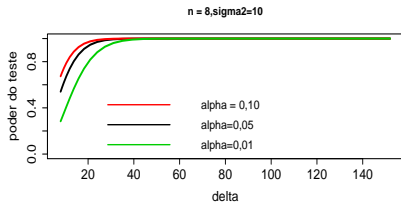
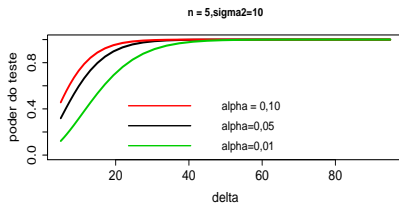
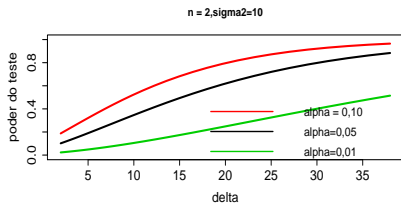
- Três grupos, experimento balanceado,  $\alpha = 0,95$ ,  $\sigma^2 = 5$ .

$\sum_{i=1}^3 \alpha_i^2$	$n_i$	$n$	$\tilde{\psi}$	$\sum_{i=1}^3 \alpha_i^2$	$n_i$	$n$	$\tilde{\psi}$
0,5	2	6	0,0521	50	2	6	0,2746
	3	9	0,0547		3	9	0,5794
	4	12	0,0574		4	12	0,7886
	5	15	0,0599		5	15	0,9032
	10	30	0,0732		10	30	0,9991
2	2	6	0,0586	200	2	6	0,7437
	3	9	0,0694		3	9	0,9919
	4	12	0,0803		4	12	0,9998
	5	15	0,0915		5	15	0,9999
	10	30	0,15022		10	30	>0,9999

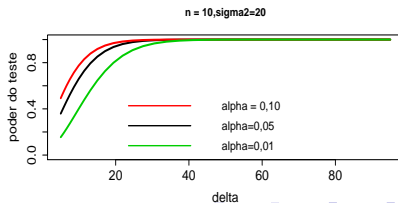
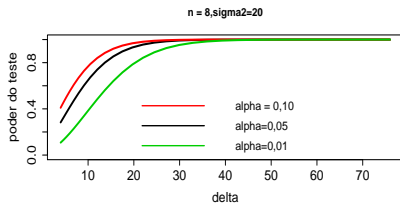
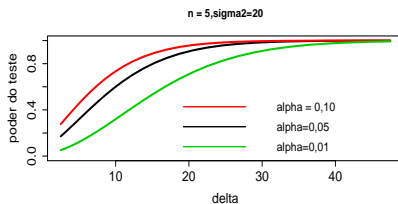
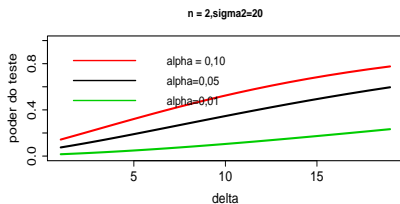
# Curvas de poder



# Curvas de poder



# Curvas de poder



# Comentários sobre o poder do teste

- Podemos notar que, quanto maior o valor do parâmetro de não centralidade ( $\delta$ ), maior o poder do teste.
- Quanto maior for a diferença entre as médias e menor for a variância, maior será o valor de  $\delta$ , conseqüentemente, maior será o poder do teste.
- Além disso, quanto maior for o valor da probabilidade do erro do tipo I ( $\alpha$ ), maior será o poder do teste;

# PCA desbalanceado com dois fatores

- Fator A: possui  $a$  níveis,  $i=1,\dots,a$ .
- Fator B: possui  $b$  níveis,  $j=1,\dots,b$ .
- Grupos: há um total de  $a \times b$  grupos (tratamentos), que são definidos pelas interseções dos níveis de cada grupo.
- Para cada grupos vamos considerar um total de  $n_{ij}$  observações. Cada uma das  $n_{ij}$  observações são alocadas aleatoriamente à cada uma das combinações (fatores). Temos uma PCA (planejamento completamente casualizado).
- Neste caso número total de observações  $n = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b n_{ij}$ .

# Esperanças das Somas de Quadrados

$$\mathcal{E}(SQF_A) = (a - 1)\sigma^2 + b \sum_{i=1}^a n_{ij} (\bar{\mu}_{i.} - \bar{\mu}_{..})^2$$

$$\mathcal{E}(SQF_B) = (b - 1)\sigma^2 + a \sum_{j=1}^b n_{ij} (\bar{\mu}_{.j} - \bar{\mu}_{..})^2$$

$$\mathcal{E}(SQF_{Int}) = (a - 1)(b - 1)\sigma^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b n_{ij} [(\mu_{ij} + \bar{\mu}_{..}) - (\bar{\mu}_{i.} + \bar{\mu}_{.j})]^2$$

$$\mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij}; \bar{\mu}_{i.} = \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b \mu_{ij};$$

$$\bar{\mu}_{.j} = \frac{1}{a} \sum_{i=1}^a \mu_{ij}; \bar{\mu}_{..} = \frac{1}{ab} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \mu_{ij}$$

# Esperanças das Somas de Quadrados (cont.)

$$\mathcal{E}(SQF_A/\sigma^2) = \underbrace{(a-1)}_{gl} + \underbrace{b \frac{\sum_{i=1}^a n_{ij}(\bar{\mu}_{i.} - \bar{\mu}_{..})^2}{\sigma^2}}_{pnc}$$

$$\mathcal{E}(SQF_B/\sigma^2) = \underbrace{(b-1)}_{gl} + \underbrace{a \frac{\sum_{j=1}^b n_{ij}(\bar{\mu}_{.j} - \bar{\mu}_{..})^2}{\sigma^2}}_{pnc}$$

$$\mathcal{E}(SQF_{Int}/\sigma^2) = \underbrace{(a-1)(b-1)}_{gl} + \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b n_{ij}[(\mu_{ij} + \bar{\mu}_{..}) - (\bar{\mu}_{i.} + \bar{\mu}_{.j})]^2}{\sigma^2}}_{pnc}$$



# Estimação dos parâmetros de não centralidade

Para estimar os parâmetros de não centralidade, basta substituir os parâmetros, pelos seus respectivos estimadores:

$$\hat{\mu}_{ij} = \hat{\mu} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j + \widehat{(\alpha\beta)}_{ij}; \hat{\mu}_{i.} = \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b \hat{\mu}_{ij};$$

$$\hat{\mu}_{.j} = \frac{1}{a} \sum_{i=1}^a \hat{\mu}_{ij}; \hat{\mu}_{..} = \frac{1}{ab} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \hat{\mu}_{ij}$$

## Exemplo 4: Resistência de materiais

- Um engenheiro está desenvolvendo um tipo de bateria para ser usado em um dispositivo eletrônico sujeito à variações extremas de temperatura.
- Fatores de interesse:
  - Tipo de material da placa: 1, 2 e 3.
  - Temperatura: 15°F, 70°F e 125°F. Equivalente à -9,44°C, 21,11°C e 51,67 °C, respectivamente
- Para cada combinação (tipo de material da placa × temperatura) 4 baterias foram feitas.
- Variável resposta: tempo de vida em horas de cada bateria . Vamos considerar apenas os dois primeiros níveis de cada fator.

## Exemplo 4: Resistência de materiais

- Neste caso, temos que  $\tilde{\beta} = (134, 75; 21, 00; -77, 50; 41, 50)$  e  $\tilde{\sigma}^2 = 857, 58$ .
- Assim, tem-se que  $\delta_A = 8, 130$ ,  $\delta_B = 15, 022$  e  $\delta_{Int} = 2, 008$  ; parâmetros de não centralidade associados aos testes de existência de efeito do Fator A, Fator B e interação, respectivamente.
- Assim, temos os seguintes poderes estimados  $\tilde{\psi}_A = 0, 7447$ ,  $\tilde{\psi}_B = 0, 9442$  e  $\tilde{\psi}_{Int} = 0, 2568$ .

# PBC: Modelo (casela de referência)

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \tau_j + \xi_{ij},$$

(Fator),  $i = 1, 2, 3, \dots, k$ ; (Bloco),  $j = 1, 2, 3, \dots, b$

- Erros  $\xi_{ij} \stackrel{i.i.d}{\sim} N(0, \sigma^2)$ ,  $\mu, \alpha_i, \tau_j$ , não aleatórios.
- Restrições :  $\alpha_1 = \tau_1 = 0$ .

# Esperanças das Somas de Quadrados

$$\mathcal{E}(SQF) = (k-1)\sigma^2 + b \sum_{i=1}^k (\bar{\mu}_i - \bar{\mu}_{..})^2$$

$$\mathcal{E}(SQB) = (b-1)\sigma^2 + k \sum_{j=1}^b (\bar{\mu}_{.j} - \bar{\mu}_{..})^2$$

$$\bar{\mu}_i = \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b \mu_{ij}; \bar{\tau}_{.j} = \frac{1}{a} \sum_{i=1}^a \mu_{ij}; \bar{\mu}_{..} = \frac{1}{ab} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \mu_{ij}$$

# Esperanças das Somas de Quadrados (cont.)

$$\mathcal{E}(SQF/\sigma^2) = (k-1) + \frac{b \sum_{i=1}^k (\bar{\mu}_{i.} - \bar{\mu}_{..})^2}{\sigma^2}$$
$$\mathcal{E}(SQB/\sigma^2) = (b-1) + \frac{k \sum_{j=1}^b (\bar{\mu}_{.j} - \bar{\mu}_{..})^2}{\sigma^2}$$

# Estimação dos parâmetros de não centralidade

Para estimar os parâmetros de não centralidade, basta substituir os parâmetros, pelos seus respectivos estimadores:

$$\hat{\mu}_{ij} = \hat{\mu} + \hat{\alpha}_i + \hat{\tau}_j; \hat{\mu}_{.i} = \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b \hat{\mu}_{ij}; \hat{\mu}_{.j} = \frac{1}{a} \sum_{i=1}^a \hat{\mu}_{ij};$$

$$\hat{\mu}_{..} = \frac{1}{ab} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \hat{\mu}_{ij}$$

Exercício: Fazer os desenvolvimentos acima para os modelos com três fatores e interações e com dois fatores (em bloco) e interação entre os fatores principais.