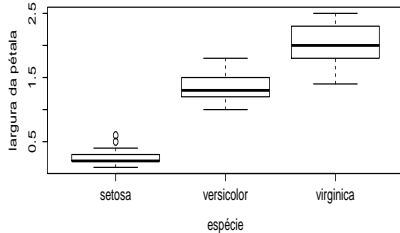
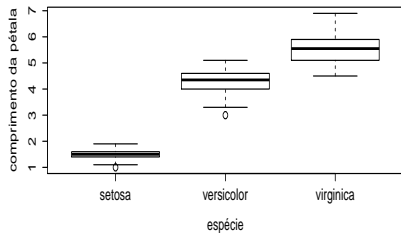
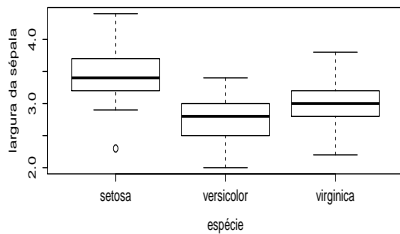
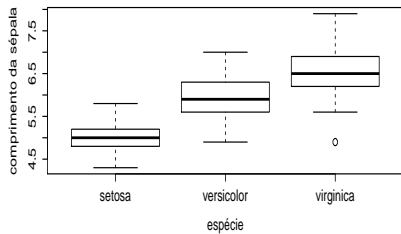


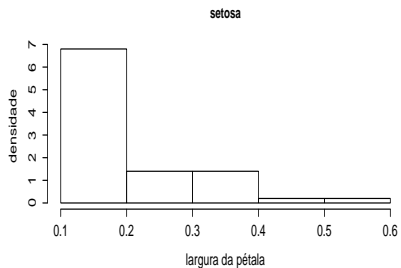
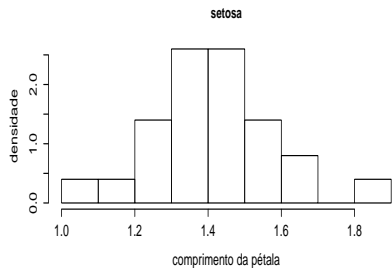
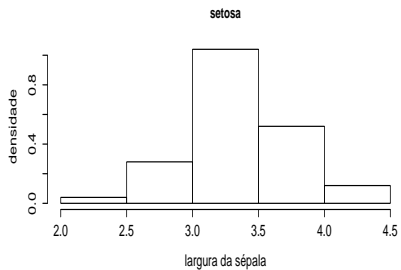
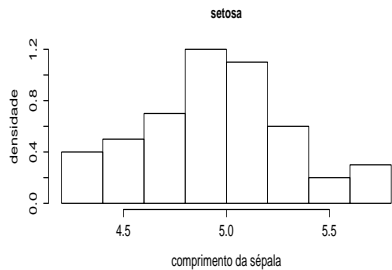
Modelo normal linear multivariado

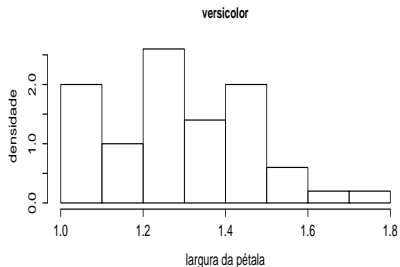
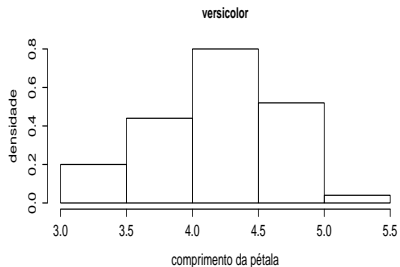
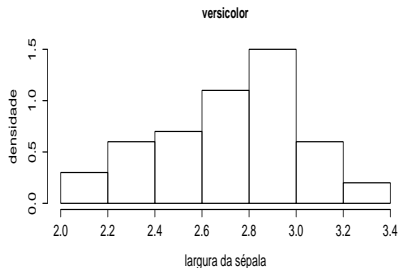
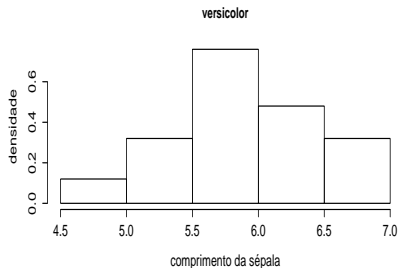
Prof. Caio Azevedo

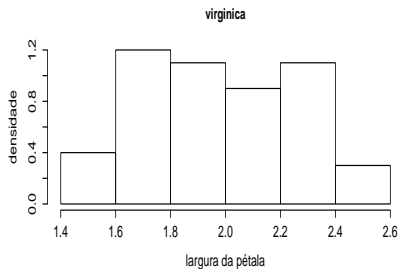
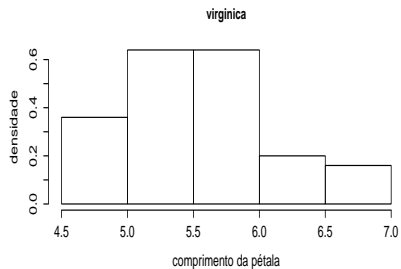
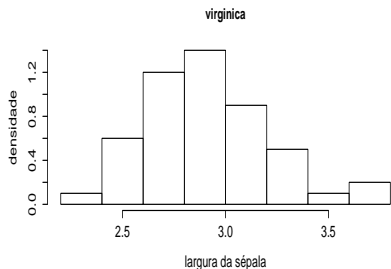
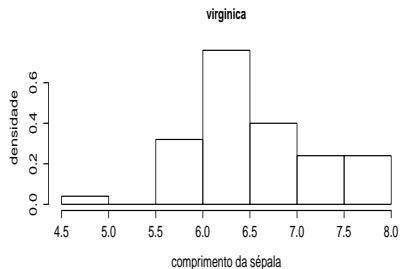
- Os dados consistem de 50 unidades amostrais de três espécies (setosa, virginica, versicolor) de íris (uma espécie de planta), ou seja, temos um total de 150 unidades amostrais.
- De cada uma delas mediu-se quatro variáveis: comprimento e largura da sépala (CS, LS) e comprimento e largura da pétala (CP,LP).
- Objetivo original: quantificar a variação morfológica em relação à essas espécies com bases nas quatro variáveis de interesse.

- Seja Y_{ijk} : o valor da k -ésima variável ($k=1,2,3,4$), para o j -ésimo indivíduo ($j=1,\dots,50$) do i -ésimo grupo ($i = 1, 2, 3$).
- Suposição $\mathbf{Y}_{ij} = (Y_{ij1}, Y_{ij2}, Y_{ij3}, Y_{ij4}) \stackrel{ind.}{\sim} N_4(\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\Sigma})$.
- Tem-se, portanto, dados balanceados (em relação aos grupos).

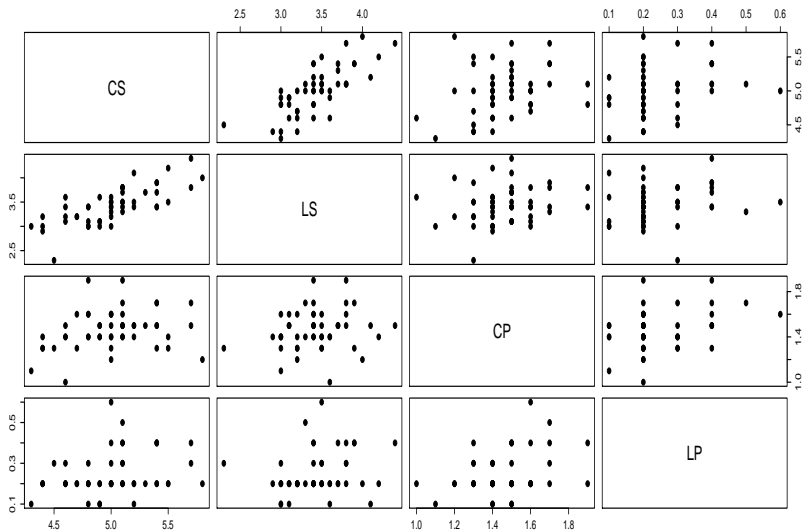




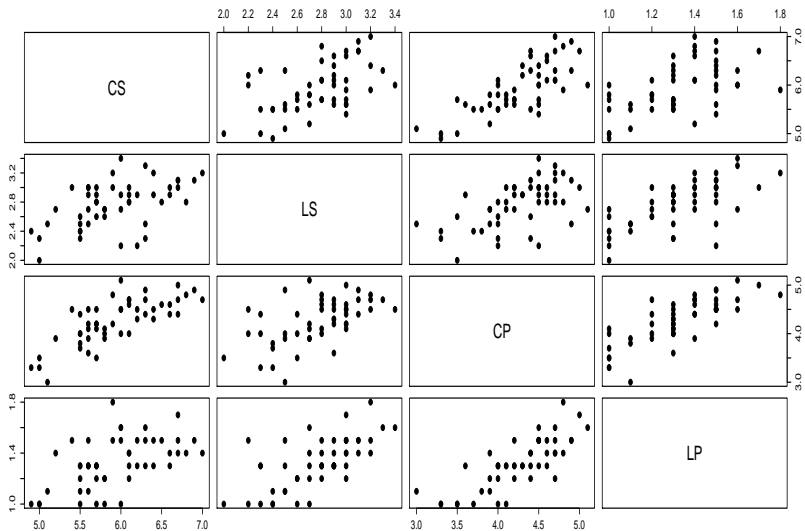




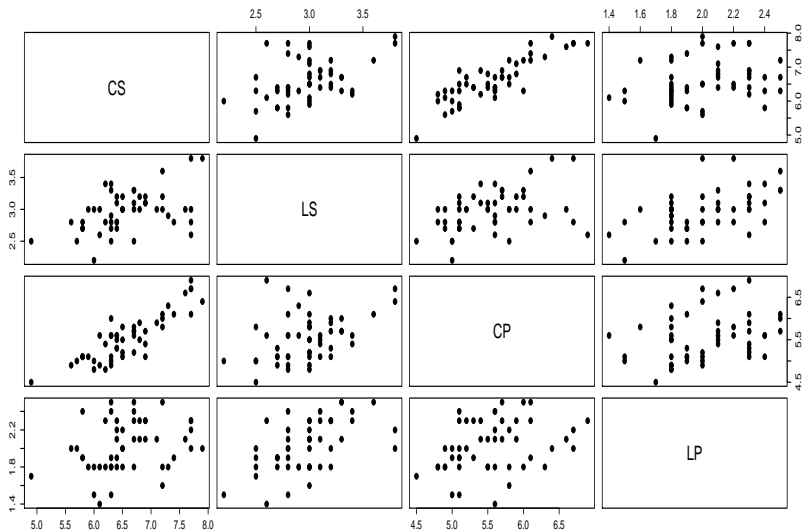
Iris setosa



Iris versicolor



Iris virginica



- Variâncias na diagonal principal, covariâncias abaixo e correlações acima (da diagonal principal).

$$\tilde{\Psi}_{setosa} = \begin{bmatrix} CS & 0,12 & 0,74 & 0,27 & 0,28 \\ LS & 0,10 & 0,14 & 0,18 & 0,23 \\ CP & 0,02 & 0,01 & 0,03 & 0,33 \\ LP & 0,01 & 0,01 & 0,01 & 0,01 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\Psi}_{versicolor} = \begin{bmatrix} CS & 0,27 & 0,53 & 0,75 & 0,55 \\ LS & 0,08 & 0,10 & 0,56 & 0,66 \\ CP & 0,18 & 0,08 & 0,22 & 0,79 \\ LP & 0,06 & 0,04 & 0,07 & 0,04 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\Psi}_{virginica} = \begin{bmatrix} CS & 0,40 & 0,46 & 0,86 & 0,28 \\ LS & 0,09 & 0,10 & 0,40 & 0,54 \\ CP & 0,30 & 0,07 & 0,30 & 0,32 \\ LP & 0,05 & 0,05 & 0,05 & 0,07 \end{bmatrix}$$

Medidas resumo: comprimento da sépala

Espécie	Média	DP	Var	CV(%)	Mínimo	Mediana	Máximo	n
setosa	5,01	0,35	0,12	7,04	4,30	5,00	5,80	50
versicolor	5,94	0,52	0,27	8,70	4,90	5,90	7,00	50
virginica	6,59	0,64	0,40	9,65	4,90	6,50	7,90	50

Medidas resumo: largura da sépala

Espécie	Média	DP	Var	CV(%)	Mínimo	Mediana	Máximo	n
setosa	3,43	0,38	0,14	11,06	2,30	3,40	4,40	50
versicolor	2,77	0,31	0,10	11,33	2,00	2,80	3,40	50
virginica	2,97	0,32	0,10	10,84	2,20	3,00	3,80	50

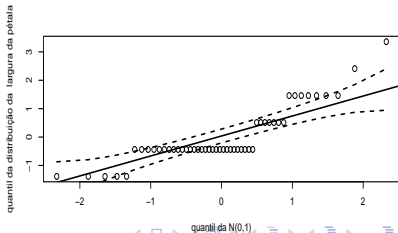
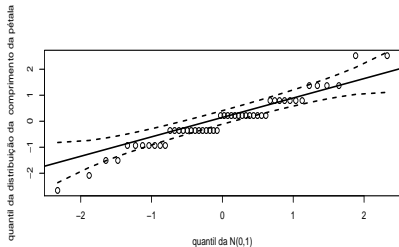
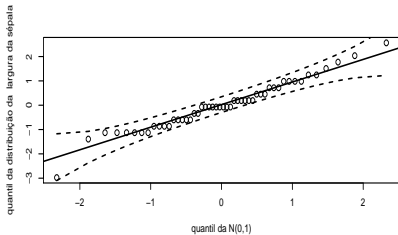
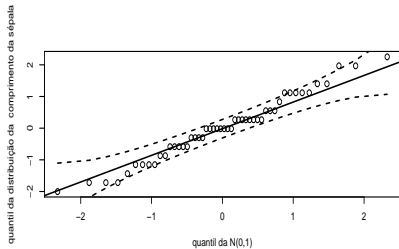
Medidas resumo: comprimento da pétala

Espécie	Média	DP	Var.	CV(%)	Mínimo	Mediana	Máximo	n
setosa	1,46	0,17	0,03	11,88	1,00	1,50	1,90	50
versicolor	4,26	0,47	0,22	11,03	3,00	4,35	5,10	50
virginica	5,55	0,55	0,30	9,94	4,50	5,55	6,90	50

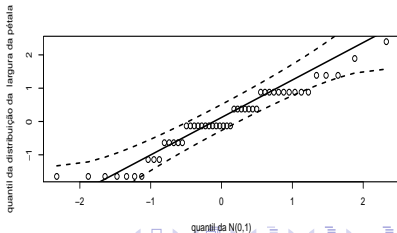
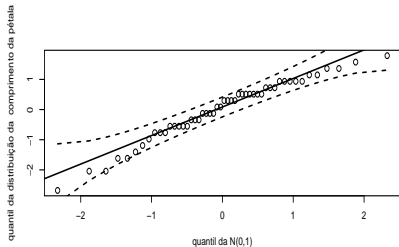
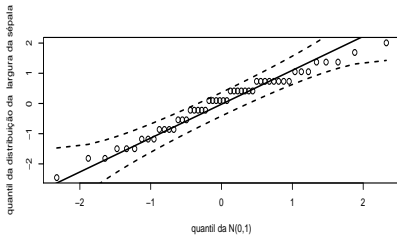
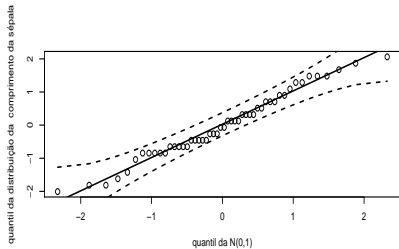
Medidas resumo: largura da pétala

Espécie	Média	DP	Var.	CV(%)	Mínimo	Mediana	Máximo	n
setosa	0,25	0,11	0,01	42,84	0,10	0,20	0,60	50
versicolor	1,33	0,20	0,04	14,91	1,00	1,30	1,80	50
virginica	2,03	0,27	0,08	13,56	1,40	2,00	2,50	50

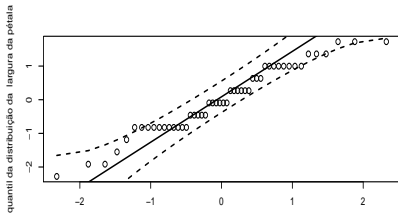
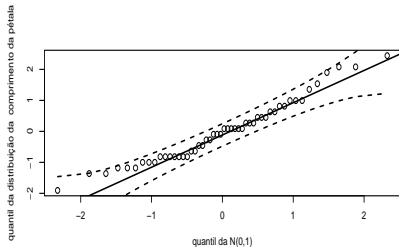
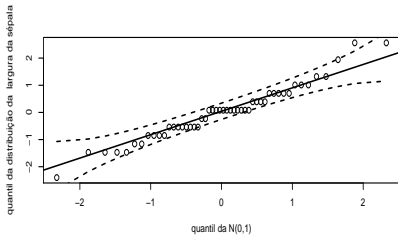
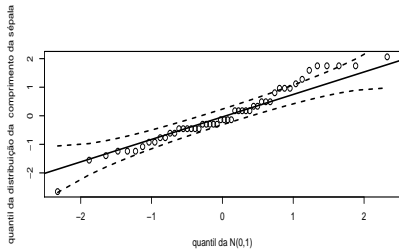
Gráficos de quantis-quantis com envelopes: setosa



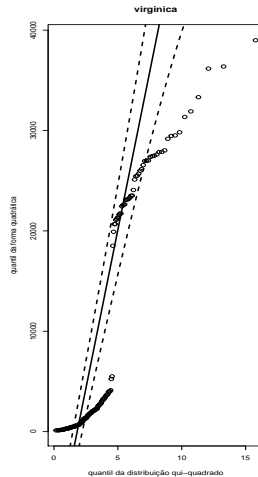
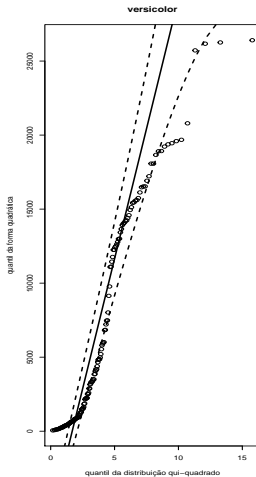
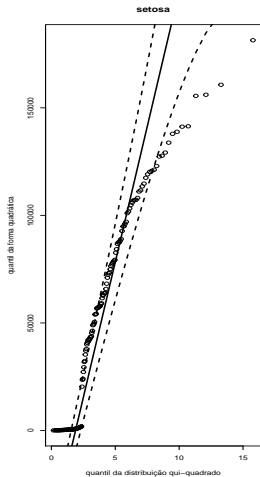
Gráficos de quantis-quantis com envelopes: versicolor



Gráficos de quantis-quantis com envelopes: virginica



Gráficos de quantis-quantis com envelopes: fq



$$\mathbf{Y}_{(n \times p)} = \begin{bmatrix}
 Y_{111} & Y_{112} & Y_{113} & Y_{114} \\
 Y_{121} & Y_{122} & Y_{123} & Y_{124} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 Y_{1(50)1} & Y_{1(50)2} & Y_{1(50)3} & Y_{1(50)4} \\
 \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\
 Y_{211} & Y_{212} & Y_{213} & Y_{214} \\
 Y_{221} & Y_{222} & Y_{223} & Y_{224} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 Y_{2(50)1} & Y_{2(50)2} & Y_{2(50)3} & Y_{2(50)4} \\
 \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\
 Y_{311} & Y_{312} & Y_{313} & Y_{314} \\
 Y_{321} & Y_{322} & Y_{323} & Y_{324} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 Y_{3(50)1} & Y_{3(50)2} & Y_{3(50)3} & Y_{3(50)4}
 \end{bmatrix}$$

Suposições

- Suponha um conjunto de G populações independentes da qual retiramos G amostras de tamanho n_i , $i = 1, \dots, G$,
- Por suposição, temos que $\mathbf{Y}_{ij} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\Sigma})$, em que $i = 1, 2, \dots, G$ (grupo) e $j = 1, 2, \dots, n_i$ (indivíduo). Notação: Y_{ijk} observação referente à variável k do indivíduo j do grupo i .
- Homocedasticidades: $\boldsymbol{\Sigma}_1 = \boldsymbol{\Sigma}_2 = \dots = \boldsymbol{\Sigma}_G = \boldsymbol{\Sigma}$.
- Assim, temos a seguinte matriz de dados ($n = \sum_{i=1}^G n_i$):

$$\mathbf{Y}_{(n \times p)} = \begin{bmatrix}
 Y_{111} & Y_{112} & \dots & Y_{11p} \\
 Y_{121} & Y_{122} & \dots & Y_{12p} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 Y_{1n_11} & Y_{1n_12} & \dots & Y_{1n_1p} \\
 \hline
 Y_{211} & Y_{212} & \dots & Y_{21p} \\
 Y_{221} & Y_{222} & \dots & Y_{22p} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 Y_{2n_21} & Y_{2n_22} & \dots & Y_{2n_2p} \\
 \hline
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \hline
 Y_{G11} & Y_{G12} & \dots & Y_{G1p} \\
 Y_{G21} & Y_{G22} & \dots & Y_{G2p} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 Y_{Gn_G1} & Y_{Gn_G2} & \dots & Y_{Gn_Gp}
 \end{bmatrix}$$

- Queremos testar

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_G$ vs $H_1 : \text{pelo menos uma diferença.}$

- Uma abordagem: análise de variância multivariada (MANOVA).
- Comparar médias através do estudo da decomposição da matriz de variâncias-covariâncias total.
- Como resumir a informação das matrizes de covariâncias de interesse? Variâncias generalizadas.

Modelo linear normal multivariado

$$\mathbf{Y}_{(n \times p)} = \mathbf{X}_{(n \times q)} \mathbf{B}_{(q \times p)} + \boldsymbol{\xi}_{(n \times p)}$$

- $\mathbf{Y}_{(n \times p)}$: matriz de dados
- $\mathbf{X}_{(n \times q)}$: matriz de planejamento, conhecida e não-aleatória.
- $\mathbf{B}_{(q \times p)}$: parâmetros de interesse, desconhecido e não aleatório.
- $\boldsymbol{\xi}_{(n \times p)}$: matriz de resíduos, $\xi_{ij} \sim N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$.

$$\mathbf{X}_{(n \times q)} = \begin{bmatrix}
 X_{111} & X_{112} & \dots & X_{11G} \\
 X_{121} & X_{122} & \dots & X_{12G} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 X_{1n_11} & X_{1n_12} & \dots & X_{1n_1G} \\
 \hline
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \hline
 X_{G11} & X_{G12} & \dots & X_{G1G} \\
 X_{G21} & X_{G22} & \dots & X_{G2G} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 X_{Gn_G1} & X_{Gn_G2} & \dots & X_{Gn_GG}
 \end{bmatrix}; \mathbf{B}_{(q \times p)} = \begin{bmatrix}
 \mu_{11} & \mu_{12} & \dots & \mu_{1p} \\
 \mu_{21} & \mu_{22} & \dots & \mu_{2p} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \mu_{G1} & \mu_{G2} & \dots & \mu_{Gp}
 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\xi}_{(n \times p)} = \begin{bmatrix} \xi_{111} & \xi_{112} & \dots & \xi_{11p} \\ \xi_{121} & \xi_{122} & \dots & \xi_{12p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{1n_11} & \xi_{1n_12} & \dots & \xi_{1n_1p} \\ \hline \xi_{211} & \xi_{212} & \dots & \xi_{21p} \\ \xi_{221} & \xi_{222} & \dots & \xi_{22p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{2n_21} & \xi_{2n_22} & \dots & \xi_{2n_2p} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \xi_{G11} & \xi_{G12} & \dots & \xi_{G1p} \\ \xi_{G21} & \xi_{G22} & \dots & \xi_{G2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{Gn_G1} & \xi_{Gn_G2} & \dots & \xi_{Gn_Gp} \end{bmatrix}$$

Nosso exemplo:

- $G = 3$, $p = 4$ e $n_i = 50, i = 1, 2, 3$ (3 grupos, 4 variáveis e 50 indivíduos por grupo).
- Modelar as médias.
- $\mathbf{Y}_{(150 \times 4)}$.

Nosso exemplo: Parametrização de médias

- $\mathbf{X} = \mathbf{I}_{(3 \times 3)} \otimes \mathbf{1}_{(50 \times 1)}$ (\otimes denota o produto de Kronecker à

esquerda). $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{(50 \times 1)} & \mathbf{0}_{(50 \times 1)} & \mathbf{0}_{(50 \times 1)} \\ \mathbf{0}_{(50 \times 1)} & \mathbf{1}_{(50 \times 1)} & \mathbf{0}_{(50 \times 1)} \\ \mathbf{0}_{(50 \times 1)} & \mathbf{0}_{(50 \times 1)} & \mathbf{1}_{(50 \times 1)} \end{bmatrix}$

- $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} & \mu_{14} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} & \mu_{24} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} & \mu_{34} \end{bmatrix}$

- μ_{ik} : média da variável k do grupo i .

Nosso exemplo: Parametrização casela de referência

$$\blacksquare \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{(50 \times 1)} & \mathbf{0}_{(50 \times 1)} & \mathbf{0}_{(50 \times 1)} \\ \mathbf{1}_{(50 \times 1)} & \mathbf{1}_{(50 \times 1)} & \mathbf{0}_{(50 \times 1)} \\ \mathbf{1}_{(50 \times 1)} & \mathbf{0}_{(50 \times 1)} & \mathbf{1}_{(50 \times 1)} \end{bmatrix}$$

$$\blacksquare \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} & \mu_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \end{bmatrix}$$

- μ_{1k} : média da variável k do grupo 1 (grupo de referência - setosa).

Decomposição da matriz de covariâncias total

- Pode-se demonstrar que:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^G \sum_{j=1}^{n_i} (\mathbf{Y}_{ij} - \bar{\mathbf{Y}}) (\mathbf{Y}_{ij} - \bar{\mathbf{Y}})'}_{\text{Matriz de SQ Total}} = \underbrace{\sum_{i=1}^G n_i (\bar{\mathbf{Y}}_i - \bar{\mathbf{Y}}) (\bar{\mathbf{Y}}_i - \bar{\mathbf{Y}})'}_{\text{Matriz de SQ do Modelo}} + \underbrace{\sum_{i=1}^G \sum_{j=1}^{n_i} (\mathbf{Y}_{ij} - \bar{\mathbf{Y}}_i) (\mathbf{Y}_{ij} - \bar{\mathbf{Y}}_i)'}_{\text{Matriz de SQ do Resíduo}}$$
$$\mathbf{T} = \mathbf{M} + \mathbf{E}$$

Variância generalizada

- Seja $\Sigma_{(p \times p)}$ uma matriz de covariâncias.
- Variância generalizada $|\Sigma|$ (resume a informação contida em Σ).
- Suponha $p = 2$.
- Assim $|\Sigma| = \sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{11}^2 = \sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_1^2 \sigma_2^2 \rho^2 = \sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \rho^2)$.
- Estamos supondo que $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \dots = \Sigma_G = \Sigma$ (teste de Box para igualdade de matrizes de covariâncias).

As quatro estatísticas “tradicionais”

- Sejam $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_s$ os autovalores diferentes de zero da matriz $\mathbf{E}^{-1}\mathbf{M}$, em que $s = \min(p, G - 1)$.
- Lambda de Wilks :
$$\prod_{i=1}^s \frac{1}{1 + \lambda_i} = \frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{E} + \mathbf{M}|}.$$
- Traço de Pillai:
$$\sum_{i=1}^s \frac{\lambda_i}{1 + \lambda_i} = \text{tr}[\mathbf{M}(\mathbf{M} + \mathbf{E})^{-1}].$$
- Traço de Lawley-Hotelling:
$$\sum_{i=1}^s \lambda_i^{-1} = \text{tr}[\mathbf{M}\mathbf{E}^{-1}]$$
- Máxima raiz de Roy:
$$\frac{\lambda_1}{1 + \lambda_1}$$

Cont.

- Quanto menor o valor das estatística de Wilks e maior os valores das estatísticas de Pillai, Lawley-Hotelling e de Roy, mais evidências tem-se contra H_0 .
- Existem aproximações pela distribuição F, para cada uma destas estatísticas.

Aplicação

- Dados da iris: as quatro variáveis apresentadas e os três grupos.
- O teste de Box indica a rejeição da igualdade entre as matrizes de covariâncias (estatística = 140,94 ; pvalor < 0,0001).
- Utilização do pacote *manova* implementado na linguagem R.

Estadísticas

Estadística	Valor	Aproxim. pela dist. F.	p-valor
Wilks	0,02	119,15	$< 0,0001$
Pillai	1,19	53,46	$< 0,0001$
Hotelling-Lawley	32,47	580,53	$< 0,0001$
Roy	32,19	1167,00	$< 0,0001$

A igualdade simultânea dos vetores de médias é rejeitada, para cada uma das estatísticas. Como realizar outras comparações de interesse?

Anovas univariadas

CS

FV	g.l.	SQ	QM	Estat. F	p-valor
Espécie	2	63,21	31,61	119,26	< 0,0001
Resíduos	147	38,96	0,27		

LS

FV	g.l.	SQ	QM	Estat. F	p-valor
Espécie	2	11,34	5,67	49,16	< 0,0001
Resíduos	147	16,96	0,12		

Anovas univariadas

CP

FV	g.l.	SQ	QM	Estat. F	p-valor
Espécie	2	437,10	218,55	1180,16	< 0,0001
Resíduos	147	27,22	0,19		

LP

FV	g.l.	SQ	QM	Estat. F	p-valor
Espécie	2	80,41	40,21	960,01	< 0,0001
Resíduos	147	6,16	0,04		

Forma vetorial

- Considere novamente o modelo: $\mathbf{Y}_{(n \times p)} = \mathbf{X}_{(n \times q)}\mathbf{B}_{(q \times p)} + \boldsymbol{\xi}_{(n \times p)}$.
Assim, note que:

$$\mathbf{Y}'_{(p \times n)} = \mathbf{B}'_{(p \times q)}\mathbf{X}'_{(q \times n)} + \boldsymbol{\xi}'_{(p \times n)}$$

$$\text{vec}(\mathbf{Y}') = (\mathbf{X}_{(n \times q)} \otimes \mathbf{I}_p) \text{vec}(\mathbf{B}') + \text{vec}(\boldsymbol{\xi}')$$

$$\mathbf{Y}^*_{(np \times 1)} = \mathbf{X}^*_{(np \times pq)}\boldsymbol{\beta}_{(pq \times 1)} + \boldsymbol{\xi}^*_{(np \times 1)}$$

pois $\text{vec}(\mathbf{ABC}) = (\mathbf{C}' \otimes \mathbf{A})\text{vec}(\mathbf{B})$.

- Note, assim, que as observações dos indivíduos foram concatenadas (uma abaixo da outra), nos vetores \mathbf{Y}^* e $\boldsymbol{\xi}^*$.

Cont.

- Portanto, temos que $\mathbf{Y}^* \sim N_{pn}(\mathbf{X}^*\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Sigma}^*)$, em que

$$\boldsymbol{\Sigma}^* = \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma}_{(p \times p)}$$

- O estimador de mínimos quadrados generalizados de $\boldsymbol{\beta}$ é obtido minimizando-se

$$(\mathbf{Y}^* - \mathbf{X}^*\boldsymbol{\beta})' \boldsymbol{\Sigma}^{*-1} (\mathbf{Y}^* - \mathbf{X}^*\boldsymbol{\beta}).$$

- O que implica que $\hat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\mathbf{X}^{*'} \boldsymbol{\Sigma}^{*-1} \mathbf{X}^* \right)^{-1} \mathbf{X}^{*'} \boldsymbol{\Sigma}^{*-1} \mathbf{Y}^*$

Cont.

- Note que

$$\begin{aligned}\widehat{\beta} &= \left[(\mathbf{X} \otimes \mathbf{I})' (\mathbf{I} \otimes \boldsymbol{\Sigma})^{-1} (\mathbf{X} \otimes \mathbf{I}) \right]^{-1} (\mathbf{X} \otimes \mathbf{I})' (\mathbf{I} \otimes \boldsymbol{\Sigma})^{-1} \mathbf{Y}^* \\ &= \left[(\mathbf{X}'\mathbf{X} \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) \right]^{-1} [\mathbf{X}' \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-1}] \mathbf{Y}^* \\ &= \left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \otimes \mathbf{I} \right] \mathbf{Y}^* \\ &= \mathbf{A} \mathbf{Y}^*\end{aligned}\tag{1}$$

- Por outro lado, temos que

$$\mathcal{E}(\widehat{\beta}) = \left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \otimes \mathbf{I} \right] [\mathbf{X} \otimes \mathbf{I}] \beta = \beta.$$

- Além disso,

$$\text{Cov}(\widehat{\beta}) = \left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \otimes \mathbf{I} \right] [\mathbf{I} \otimes \boldsymbol{\Sigma}] \left[\mathbf{X} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \otimes \mathbf{I} \right] = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \otimes \boldsymbol{\Sigma}$$

Cont.

- Logo, $\hat{\beta} \sim N_{pq}(\beta, \Sigma_\beta)$, em que $\Sigma_\beta = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \otimes \Sigma$.
- Portanto, se Σ for conhecido (e conseqüentemente, Σ_β), então

$$(\hat{\beta} - \beta)' (\Sigma_\beta)^{-1} (\hat{\beta} - \beta) \sim \chi^2_{(qp)}$$

- De modo semelhante ao caso univariado, a grande maioria das hipóteses de interesse, podem ser escritas na forma

$$H_0 : \mathbf{C}_{(r \times q)} \mathbf{B}_{(q \times p)} \mathbf{U}_{(p \times s)} = \mathbf{M}_{(r \times s)} \text{ vs } H_1 : \mathbf{CBU} \neq \mathbf{M}$$

em que $r \leq q$ e $s \leq p$.

Cont.

- Note agora que $H_0 : \mathbf{U}'\mathbf{B}'\mathbf{C}' = \mathbf{M}'$ e, assim, temos que:

$$\text{vec}(\mathbf{U}'\mathbf{B}'\mathbf{C}') - \underbrace{\text{vec}(\mathbf{M}')}_{\mathbf{M}^*} = \underbrace{(\mathbf{C} \otimes \mathbf{U}')}_{\mathbf{C}^*} \boldsymbol{\beta} - \mathbf{M}^* = \mathbf{C}^* \boldsymbol{\beta} - \mathbf{M}^*.$$

- Logo, $\widehat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{C}^* \widehat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{M}^* \sim N_{rs} \left(\mathbf{C}^* \boldsymbol{\beta} - \mathbf{M}^*, \mathbf{C}^* \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\beta}} \mathbf{C}^{*'} \right)$.
- Se $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\beta}}$ for conhecido, e fazendo $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{C}^* \boldsymbol{\beta} - \mathbf{M}^*$, temos que, sob H_0

$$\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta} \right)' \left(\mathbf{C}^* \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\beta}} \mathbf{C}^{*'} \right)^{-1} \left(\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta} \right) \sim \chi_{(rs)}^2$$

Cont.

- Considere, então, que $\widehat{\Sigma}$ é um estimador consistente de Σ , logo $\widehat{\Sigma}_\beta = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \otimes \widehat{\Sigma}$ o será para Σ_β .
- Assim, por Slutsky,

$$Q = (\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})' (\mathbf{C}^* \widehat{\Sigma}_\beta \mathbf{C}^{*'})^{-1} (\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})' \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} \chi^2_{(rs, \delta)}$$

em que

$$\delta = (\mathbf{C}^* \boldsymbol{\beta} - \mathbf{M}^*)' (\mathbf{C}^* \Sigma_\beta \mathbf{C}^{*'})^{-1} (\mathbf{C}^* \boldsymbol{\beta} - \mathbf{M}^*).$$

Mas, sob H_0 tem-se que $\delta = 0$.

Cont.

- Nível descritivo: $P(Q > q_{calc} | H_0)$, em que $Q \approx \chi^2_{(rs)}$, para n suficientemente grande e q_{calc} é o valor calculado da estatística Q .
- Função poder: $P(Q > q_c | H_1, \alpha)$, em que $Q \approx \chi^2_{(rs)}$ para n suficientemente grande e q_c é o valor crítico para um dado α (nível de significância).
- Assim, o poder estimado do teste é dado por: $P(\tilde{Q} > q_c | H_1, \alpha)$, em que $\tilde{Q} \approx \chi^2_{(rs, \tilde{\delta})}$ para n suficientemente grande e q_c é o valor crítico para um dado α (nível de significância) e $\tilde{\delta} = (\mathbf{C}^* \tilde{\beta} - \mathbf{M}^*)' (\mathbf{C}^* \tilde{\Sigma}_\beta \mathbf{C}^{*'})^{-1} (\mathbf{C}^* \tilde{\beta} - \mathbf{M}^*)$ e “ $\tilde{\sim}$ ” representa a respectiva estimativa.

Cont.

- Voltando ao exemplo da íris, se quisermos testar se as médias entre os grupos, em relação à variável CS (que é a variável 1), são simultaneamente iguais, teríamos (parametrização de médias):

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{CBU} = \begin{bmatrix} \mu_{11} - \mu_{21} \\ \mu_{11} - \mu_{31} \end{bmatrix}$$

Cont.

- Voltando ao exemplo da íris, se quisermos testar se as médias entre os grupos, em relação à variável CS (que é a variável 1), são simultaneamente iguais, teríamos (parametrização casela de referências):

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{CBU} = \begin{bmatrix} \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \end{bmatrix}$$

Comparações múltiplas

- Comparações de interesse (para $k = 1, 2, 3, 4$)

$$H_0 : \mu_{1k} = \mu_{2k} \text{ vs } H_1 : \mu_{1k} \neq \mu_{2k}$$

$$H_0 : \mu_{1k} = \mu_{3k} \text{ vs } H_1 : \mu_{1k} \neq \mu_{3k}$$

$$H_0 : \mu_{2k} = \mu_{3k} \text{ vs } H_1 : \mu_{2k} \neq \mu_{3k}$$

Resultados

- Estatística do teste e p-valor entre parênteses.
- Variável CS:
 - Setosa x Versicolor: 81,59 ($< 0,0001$).
 - Setosa x Virginica: 236,10 ($< 0,0001$).
 - Versicolor x Virgínica: 40,10 ($< 0,0001$).
- Variável LS:
 - Setosa x Versicolor: 93,81 ($< 0,0001$).
 - Setosa x Virginica: 44,60 ($< 0,0001$).
 - Versicolor x Virgínica: 9,02 (0,0027).

Resultados

- Estatística do teste e p-valor entre parênteses.
- Variável CP:
 - Setosa x Versicolor: 1056,87 ($< 0,0001$).
 - Setosa x Virginica: 2258,26 ($< 0,0001$).
 - Versicolor x Virgínica: 225,35 ($< 0,0001$).
- Variável LP:
 - Setosa x Versicolor: 696,25 ($< 0,0001$).
 - Setosa x Virginica: 1891,28 ($< 0,0001$).
 - Versicolor x Virgínica: 292,49 ($< 0,0001$).

Análise de resíduos

- Resíduo ordinário: $\mathbf{R}^* = \mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}$.
- Resíduo padronizado: $\mathbf{R} = \mathbf{R}^* \mathbf{D}^{-1}$, em que $\mathbf{D} = \text{sqrt}(\text{diag}(\hat{\boldsymbol{\Sigma}}))$.
(distribuição de referência: $N(0,1)$)
- Resíduo studentizado (RS): $\mathbf{R}_s = \mathbf{R} ./ \sqrt{(\mathbf{1}_{(n \times p)} - \mathbf{h}_{(n \times p)})}$, em que
./ denota a divisão elemento por elemento, \mathbf{h} é uma matriz em que
cada coluna corresponde à diagonal principal da matriz
 $\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$. (distribuição de referência: $N(0,1)$)

Análise de resíduos

- Resíduo studentizado (multivariado) (RSM) :

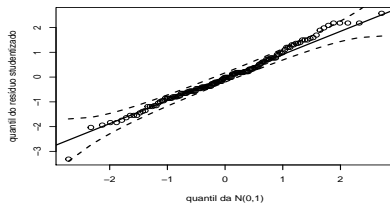
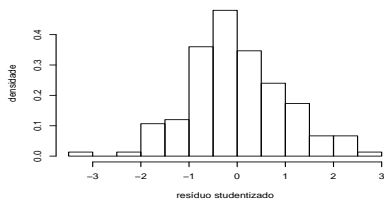
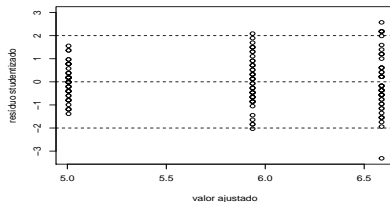
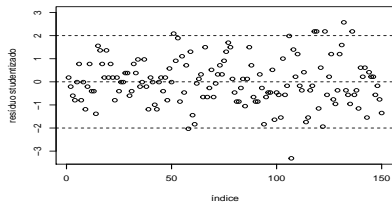
$$\mathbf{R}_s^{(m)} = \mathbf{R}^* (\text{chol}(\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}))^{-1}. \text{ (distribuição de referência: } N(0,1))$$

- Resíduo baseado na distância de Mahalanobis (via RSM):

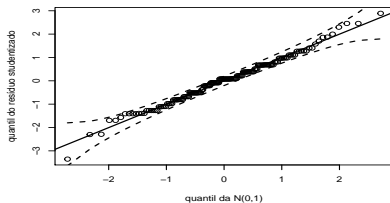
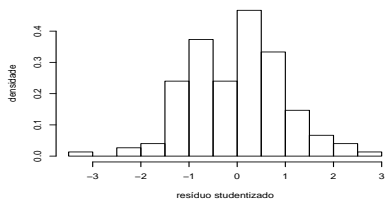
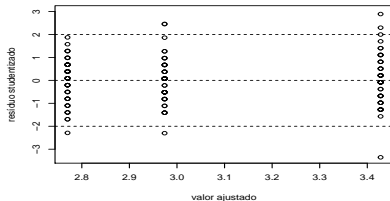
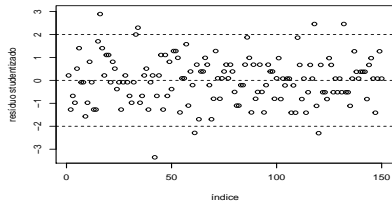
$$(\mathbf{R}_i^*)' (\mathbf{A}_i \widehat{\boldsymbol{\Sigma}} \mathbf{A}_i)^{-1} \mathbf{R}_i^*, \text{ em que } \mathbf{R}_i = \mathbf{Y}_i - \mathbf{X}_i \widehat{\mathbf{B}}, \text{ em que } \mathbf{A}_i \text{ é a } i\text{-ésima linha da matriz } \mathbf{A} = \mathbf{I}_n - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'. \text{ (distribuição de referência: } \chi_p^2)$$

- $\widehat{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{n-q} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\widehat{\mathbf{B}})' (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\widehat{\mathbf{B}})$, em que $\widehat{\mathbf{B}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{Y}$.

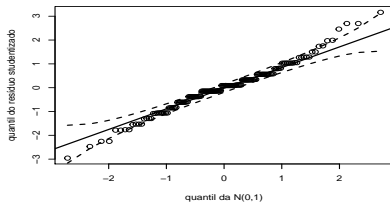
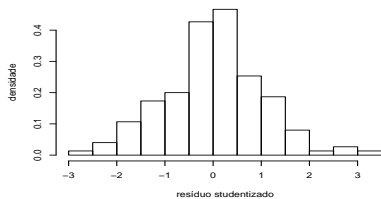
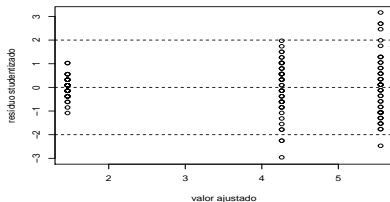
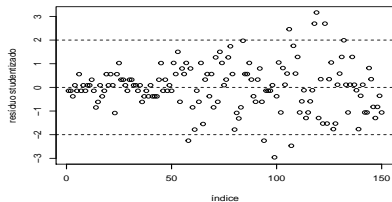
Análise de resíduos (RS) - comprimento da sépala



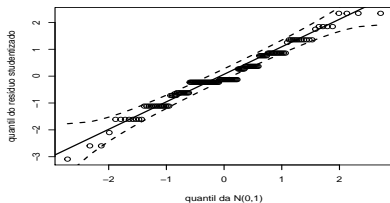
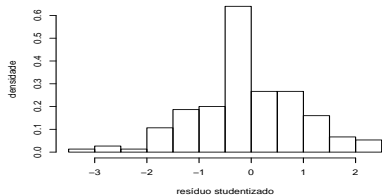
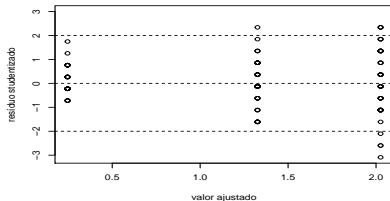
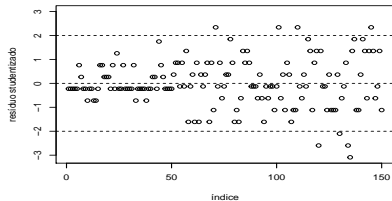
Análise de resíduos (RS) - largura da sépala



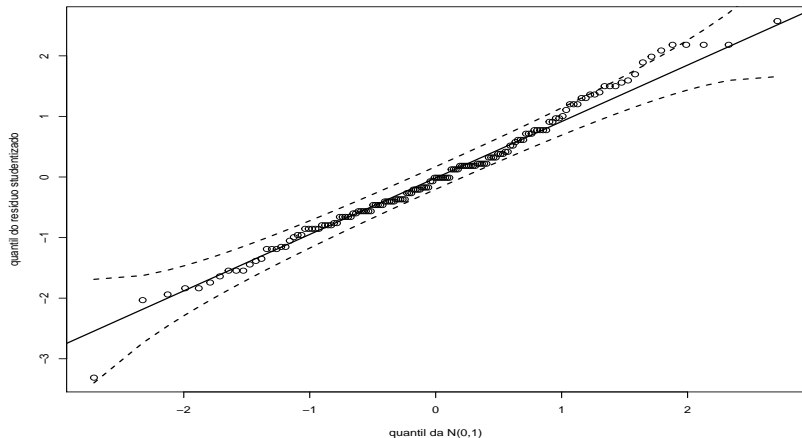
Análise de resíduos (RS) - comprimento da pétala



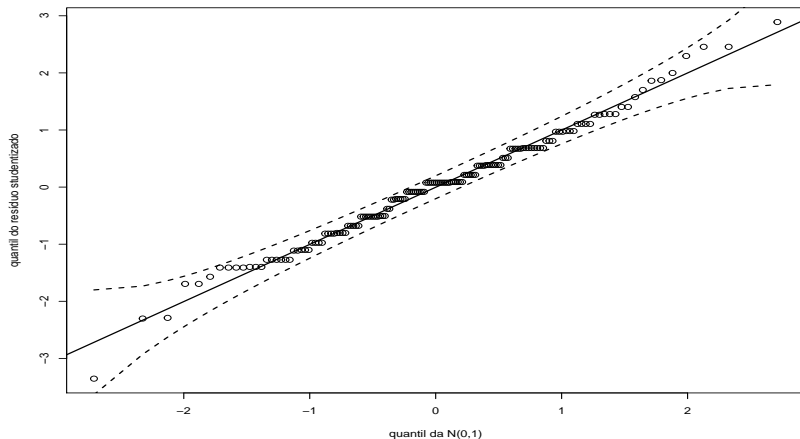
Análise de resíduos (RS) - largura da pétala



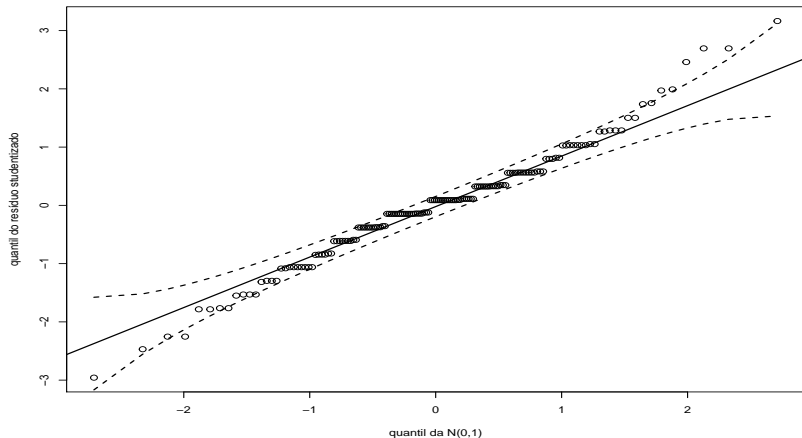
Envelopes (RS) - comprimento da sépala



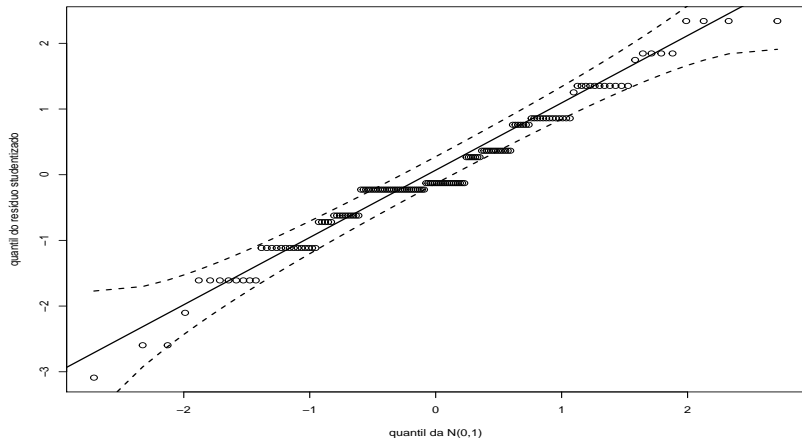
Envelopes (RS) - largura da sépala



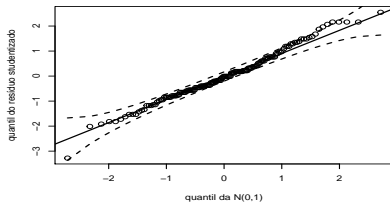
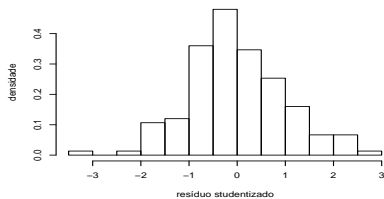
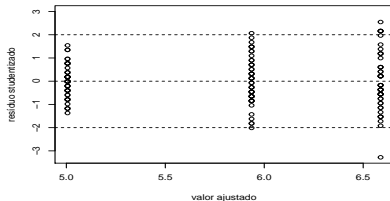
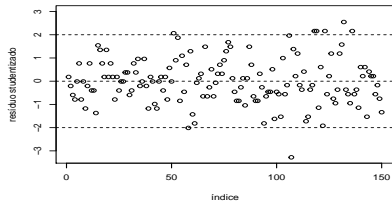
Envelopes (RS) - comprimento da pétala



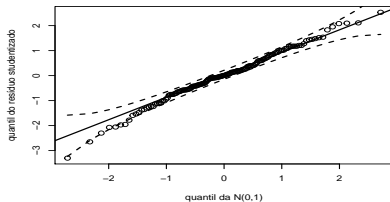
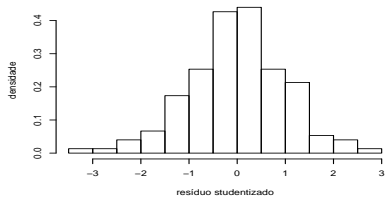
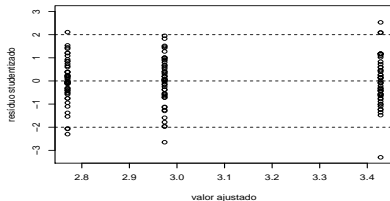
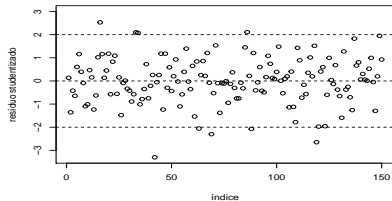
Envelopes (RS) - largura da pétala



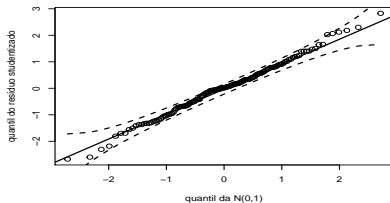
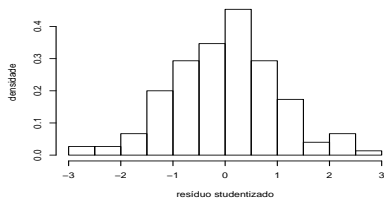
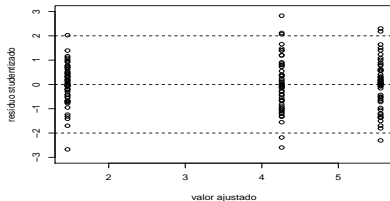
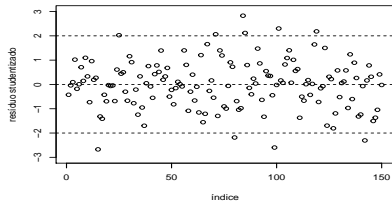
Análise de resíduos (RSM) - comprimento da sépala



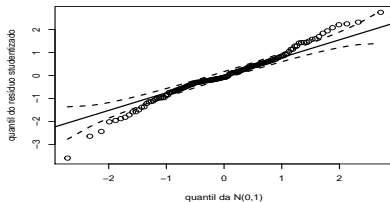
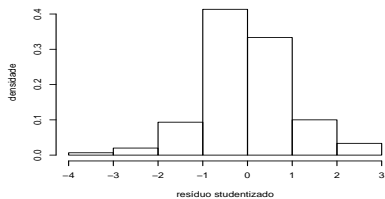
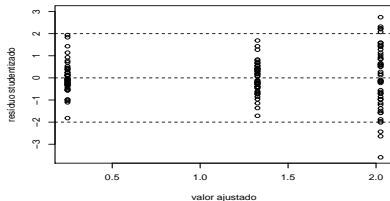
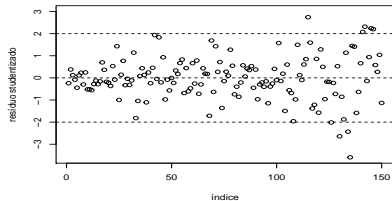
Análise de resíduos (RSM) - largura da súpala



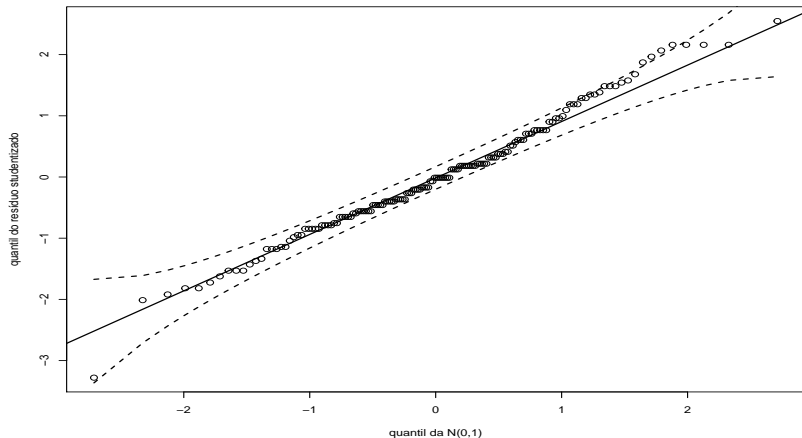
Análise de resíduos (RSM) - comprimento da pétala



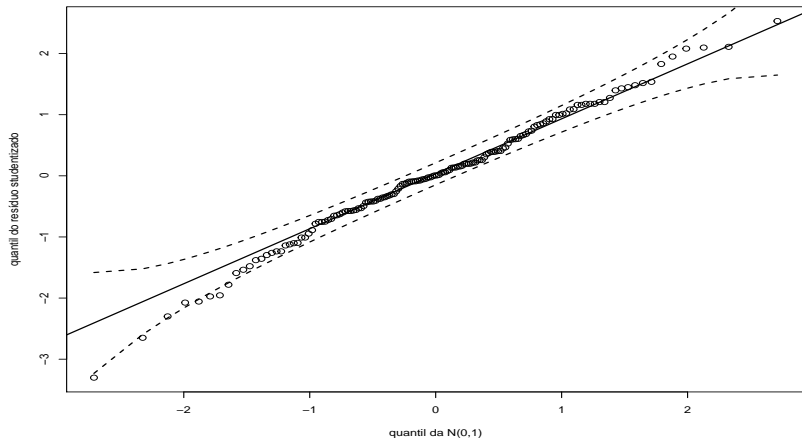
Análise de resíduos (RSM) - largura da pétala



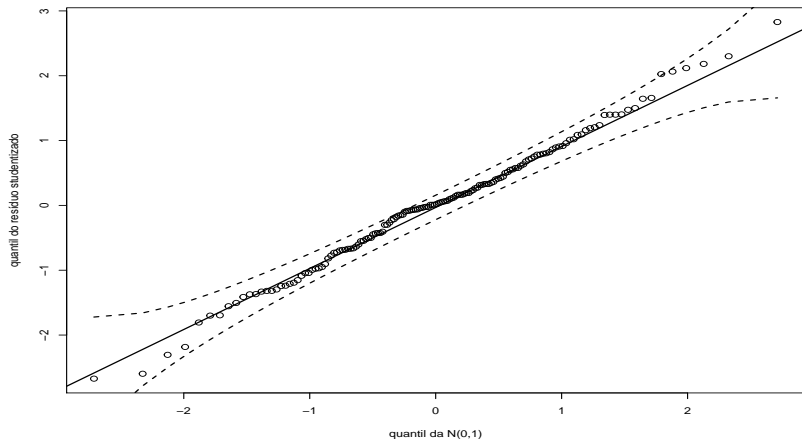
Envelopes (RSM) - comprimento da sépala



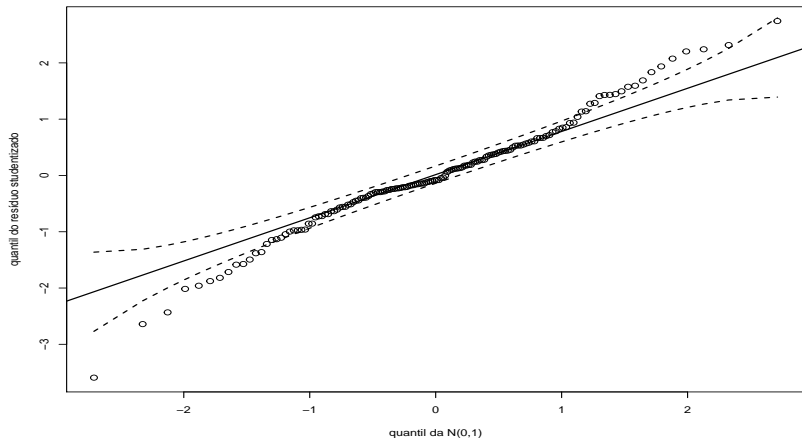
Envelopes (RSM) - largura da sépala



Envelopes (RSM) - comprimento da pétala



Envelopes (RSM) - largura da pétala



Envelopes (RSM) - distância de Mahalanobis

