Planejamento e Análise Estatística de Experimentos fatoriais fracionários

Prof. Caio Azevedo

Contexto

- Nos experimentos fatoriais, o número de tratamentos aumenta rapidamente quando temos muitos fatores em estudo.
- Por exemplo: $2^6 = 64$ tratamentos, a divisão dos graus de liberdade é dada por:
  - 6 graus de liberdade para os efeitos principais
  - 15 grauas de liberdade para as interações de 1^a ordem (interações com dois fatores)
  - 42 graus de liberdade para interações de 2^a ordem ou de ordem superior

Características

- Em se ajustando um modelo completo (com todos os fatores principais e interações) teríamos 0 graus de liberdade para os resíduos.
- Em outras palavras, ainda que tivéssemos uma observação por tratamento (combinação dos níveis dos fatores), seria impossível considerar todas as características.

Características

- Em muitos casos, nem sequer é possível ter observações para todos os tratamentos.
- Os experimentos envolvendo vários fatores para os quais não é possível ter observações para todos os tratamento são chamados de experimentos fatoriais fracionários.
- Tem-se observações para apenas uma "fração" dos tratamentos.

Comentários

- Se o pesquisador pode assumir que as interações de maior ordem (2a ordem ou acima) podem ser desprezíveis. Então, informações sobre os efeitos principais e interações de ordem menor podem ser obtidas utilizando apenas uma fração do experimento fatorial completo.
- Estes delineamentos estão entre os mais usados em projetos de desenvolvimento de produtos e processos e, também, na melhoria de processos.

Principais usos

- Experimentos pilotos (screening experiments): são experimentos, nos quais, usamos muitos fatores, com o propósito de identificar aqueles com efeito significativo. Geralmente são realizados numa etapa anterior ao experimento definitivo. Os fatores identificados com efeito significativo, são estudados num experimento mais completo.

Idéias básicas

1. Quando existem muitas variáveis, o processo ou o sistema é conduzido por alguns poucos efeitos principais e interações de menor ordem;
2. A partir dos experimentos fatoriais fracionários podemos projetar experimentos mais completos (maiores) dentro de um subconjunto de fatores significantes;
3. Pode-se combinar dois ou mais experimentos fracionários, sequencialmente e, assim, estimar os efeitos e interações de interesse.

Questões principais

1. Em quais "efeitos" o pesquisador têm interesse : fatores principais somente? algumas interaçãoes (de que ordem)?
2. Dado os objetivos do pesquisador, para quais tratamentos devemos ter observações, para se poder estudar a significância dos efeitos acima?

Planejamento de meia-fração (fração 1/2)

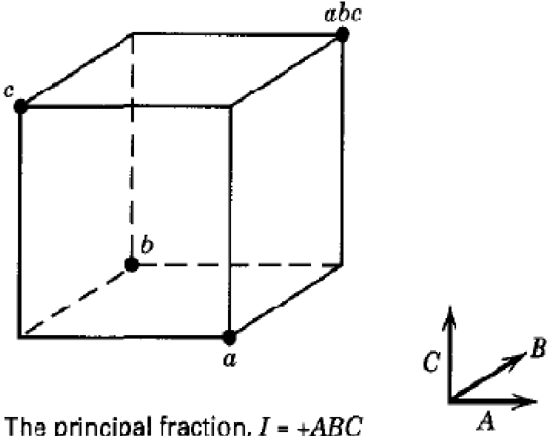
- Suponha uma situação com 3 fatores com 2 níveis cada.
- Temos um total de $2^3 = 8$ tratamento mas, só é possível conseguir 4 observações.
- Tal situação sugere um planejamento de meia-fração, pois ele conteria $24/2 = 2^{3-1} = 4$ tratamentos (teríamos observações (somente uma) para 4 tratamentos.
- Quais tratamento selecionar?

Planejamento de meia-fração (fração 1/2) cont.

- Suponha que os tratamentos a$(+--)$,b$(-+-)$,c$(--+)$ e abc$(+++)$ foram escolhidos.
- Assim, temos a seguinte tabela relacionada à estimativas dos efeitos:

Tratamento	Coeficientes							
	I	A	B	AB	C	AC	BC	ABC
a	+	+	-	-	-	-	+	+
b	+	-	+	-	-	+	-	+
c	+	-	-	+	+	-	-	+
abc	+	+	+	+	+	+	+	+

Representação gráfica do experimento do exemplo



(a) The principal fraction, $I = +ABC$

Planejamento de meia-fração (fração 1/2) cont.

- Observe que o nosso fatorial fracionário 2^{3-1}, é formado pelos tratamentos com sinal + para a coluna ABC.
- Então ABC é chamado de GERADOR da fração.
- Observe que, para a fração escolhida, temos:

  $I = ABC$

  denominada de RELAÇÃO DE DEFINIÇÃO (DEFINIDORA).
- Em geral, a relação de definição, sempre será o conjunto de todas as colunas que são iguais a coluna identidade I. No exemplo, temos uma só coluna.

Planejamento de meia-fração (fração 1/2) cont.

- De modo semelhante ao que foi feito no exemplo 2^3, as estimativas dos efeitos dos fatores principais

$$
\begin{aligned}
l_A &= \frac{1}{2}(a - b - c + abc) \\
l_B &= \frac{1}{2}(-a + b - c + abc) \\
l_C &= \frac{1}{2}(-a - b + c + abc)
\end{aligned}
$$

Planejamento de meia-fração (fração 1/2) cont.

- Para as interações de primeira ordem

$$
\begin{aligned}
l_{AB} &= \frac{1}{2}(a - b - c + abc) \\
l_{AC} &= \frac{1}{2}(-a + b - c + abc) \\
l_{AB} &= \frac{1}{2}(-a - b + c + abc)
\end{aligned}
$$

Planejamento de meia-fração (fração 1/2) cont.

- Podemos notar que

  $l_A = l_{BC}; l_B = l_{AC}; l_C = l_{AB}$

- Dessa forma, é impossível diferenciar A de BC, B de AC e C de AB.
- Na realidade, estamos estimando: $A + BC$, $B + AC$, $C + AB$ (os quais, em princípio, não tem significado prático).
- Dois ou mais efeitos com esta propriedade são chamados de ASSOCIADOS (ALIASES). Portanto, A e BC são associados, e assim por diante. Notação:

  $l_A \to A + BC; l_B \to B + AC; l_C \to C + AB.$

Planejamento de meia-fração (fração 1/2) cont.

- A estrutura dos associados pode ser encontrada usando a relação de definição I=ABC. Multiplicando qualquer coluna pela relação de definição, obtemos os associados para aquele efeito. No exemplo, o associado do efeito A é:

  $A.I = A.ABC = A^2BC = IBC = BC$

- De forma similar, encontramos:

  $B.I = B.ABC = AB^2C = AIC = AC$

  $C.I = C.ABC = ABC^2 = ABCI = AB$

Planejamento de meia-fração (fração 1/2) cont.

- Esta fração, com I=+ABC, é denominada de fração principal.
- A fração 1/2 complementar, é formada pelos tratamentos (1), ab, ac e bc. A relação de definição para esta fração é: $I = -ABC$
- As combinações lineares, para esta fração, são $l'_A \rightarrow A - BC; l'_B \rightarrow B - AC; l'_C \rightarrow C - AB$.
- Assim, quando nós estimamos A,B e C, com esta fração, nós realmente estamos estimando: $A - BC; B - AC; C - AB$

Planejamento de meia-fração (fração 1/2) cont.

- Em termos práticos, não faz diferença em termos de qual “fração” é usada.
- Ambas frações pertencem à mesma família, ou seja, cada uma forma um experimento 2^2 completo.
- Se, após executarmos uma fração do experimento, executarmos a outra fração do experimento, teremos os 8 tratamentos. Agora, podemos estimar todos os efeitos. Isto é feito através da adição e subtração das combinações lineares dos efeitos das frações individuais. Ou seja:

Delineamento -ABC

Tratamento	Coeficientes							
	I	**A**	**B**	**AB**	**C**	**AC**	**BC**	**ABC**
ab	+	+	+	-	+	-	-	-
ac	+	+	+	-	+	+	-	-
bc	+	-	+	+	-	-	+	-
(1)	+	-	-	-	+	+	+	-

Planejamento de meia-fração (fração 1/2) cont.

i	$\frac{1}{2}(l_i + l_{i'})$	$\frac{1}{2}(l_i - l_{i'})$
A	A	BC
B	B	AC
C	C	AB

Planejamento de meia-fração (fração 1/2) cont.

- Contudo, nem sempre é possível executar mais de uma fração.
- Nesse caso (somente uma fração), temos de escolher, previamente, os fatores "mais importantes" a serem considerados no modelo.
- Faz sentido um modelo somente com fatores principais. Contudo não faz sentido um modelo somente com interações.
- Além disso, o modelo deve permitir a existência de um número razoável de g.l. para o resíduo.
- Note que, neste caso, um modelo somente com os fatores principais, permitiria somente 1 gl para o resíduo (pouco). Alternativa: usar medidas para avaliar a significância dos efeitos.

A resolução (construção) de um delineamento

- Resolução III. Os efeitos principais não estão associados com qualquer outro efeito principal, mas efeitos principais estão associados com interações de dois fatores e interações com dois fatores podem estar associadas entre elas.
- Resolução IV. Os efeitos principais não estão associados com qualquer outro efeito principal ou com qualquer interação de dois fatores, mas interações com dois fatores estão associadas entre elas.

A resolução (construção) de um delineamento

- Resolução V. Os efeitos principais ou interações com dois fatores não estão associados com qualquer outro efeito principal ou interação com dois fatores, mas interações com dois fatores estão associadas com interações de três fatores.

Exemplo de construção: k = 3, meia-fração

- Planejamentos de meia fração de experimentos 2^k podem ser construídos delieando o planejamento básico (completo) de ordem 2^{k-1}.
- Então, adiciona-se o k-ésimo fator pela multiplicação ABC...(K-1).

Unid. Experim.	**Planej. Básico** 2^2		$2^{3-1}, I = ABC$			$2^{3-1}, I = -ABC$		
	A	B	A	B	C = AB	A	B	C -AB
1	-	-	-	-	+	-	-	-
2	+	-	+	-	-	+	-	+
3	-	+	-	+	-	-	+	+
4	+	+	+	+	+	+	+	-

Exemplo 14: Produção de um produto químico (cont.)

- Vamos considerar um planejamento fatorial fracionário de meia fração, ou seja, com $2^4/2 = 2^{4-1} = 8$ observações.

Unid. Experim.	**Planej. Básico 2^3**				**Tratam.**	**Taxa de filt. gal/h**
	A	B	C	D = ABC		
1	-	-	-	-	(1)	45
2	+	-	-	+	ad	100
3	-	+	-	+	bd	45
4	+	+	-	-	ab	65
5	-	-	+	+	cd	75
6	+	-	+	-	ac	60
7	-	+	+	-	bc	80
8	+	+	+	+	abcd	96

Exemplo 14: Produção de um produto químico (cont.)

- A relação definidora é dada por $I = ABCD$.
- Usando a relação definidora, concluímos que

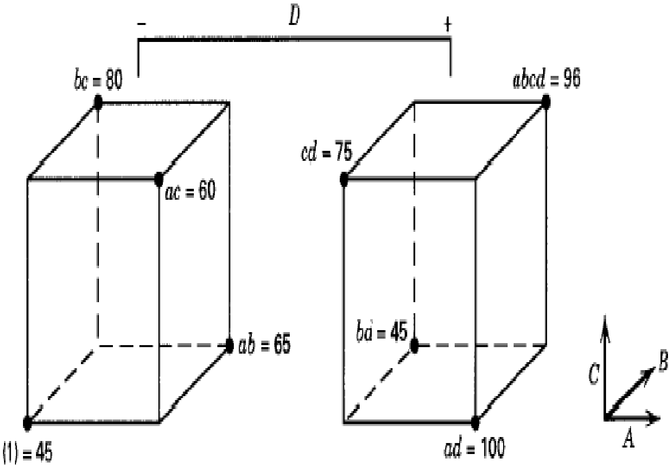
  $A = BCD; B = ACD; C = ABD; D = ABC$

  $AB = CD; AC = BD; BC = AD$
- Dessa forma, num possível modelo, só podemos incluir (até) alguma interação de primeira ordem
- Neste caso, como já foi feito um experimento com 16 observações, vamos selecionar somente aquelas correspondestes aos tratamentos definidos no experimentos fatorial fracionário.

Desenho (meia-fração) do exemplo anterior

Experimento	Fator				"Label"	Taxa de filtração (gal/h)
	A	B	C	D		
1	-	-	-	-	(1)	45
4	+	+	-	-	ab	65
6	+	-	+	-	ac	60
7	-	+	+	-	bc	80
10	+	-	-	+	ad	100
13	-	-	+	+	cd	75
16	+	+	+	+	abcd	96

Representação gráfica do experimento do exemplo



Estimativas dos efeitos

- Basta calcular as combinações lineareas definidas pela tabela anterior. por exemplo:

  $l_A = \frac{1}{4}(-45 + 100 - 45 + 65075 + 60 - 80 + 96) = 19,00$

- Resultados:

Estimativa	**Associado**
$l_A = 19,00$	$l_A \to A + BCD$
$l_B = 1,50$	$l_B \to B + ACD$
$l_C = 14,00$	$l_C \to C + ABD$
$l_D = 16,50$	$l_D \to D + ABC$
$l_{AB} = -1,00$	$l_{AB} \to AB + CD$
$l_{AC} = -18,50$	$l_{AC} \to AC + BD$
$l_{AD} = 19,00$	$l_{AD} \to AD + BC$

Comentários

- Os efeitos dos fatores principais A,C,D e as interações de segunda ordem AC e AD parecem ser significativas.
- O efeito do fator principal B e a interação de de segunda ordem AB parecem não aparentam ser significativas.
- Tais resultados nos levam a concluir que (entre os associados) a significância é devida aos fatores principais A,C,D (simplicidade, hierarquia) e às interação de segunda ordem AC e AD.
- Possível próximo passo: realizar um experimento complementar, que contemple apenas os fatores A,C,D, com mais de uma observação por tratamento (para se analisar os dados via modelos/ANOVA).

Comentários

- Pesquisar mais sobre experimentos fatoriais fracionários (restante do Capítulo 8 do livro do Montgomery).
- Aplicação de experimentos fatoriais fracionários em comparação de métodos de estimação via simulação:

  Azevedo, C. L. N. ; Andrade, D. F. (2010) An estimation method for latent traits and population parameters in Nominal Response Model, *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, 24, 415-433.