# Variáveis aleatórias: Introdução e variáveis aleatórias discretas (parte 3)

Notas de Aula da Professora Verónica González-López, digitadas por Beatriz Cuyabano, Pós-Graduação IMECC/UNICAMP, com modificações do Prof. Caio Azevedo

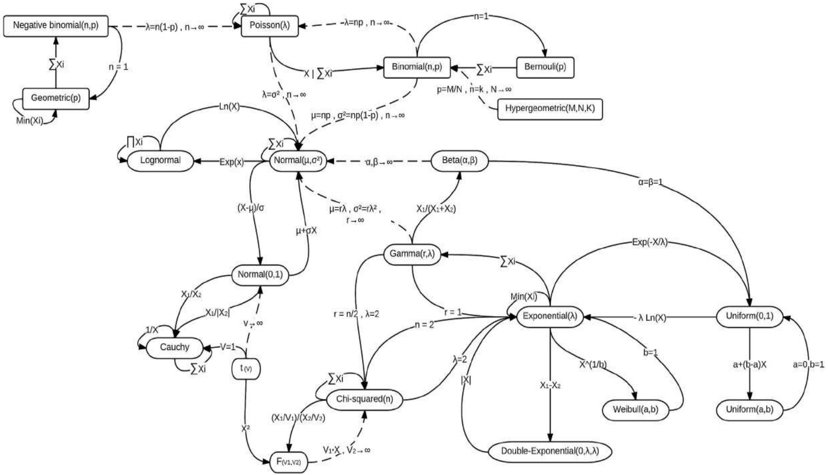
# Modelos probabilísticos discretos especiais

- Os exemplos visto aqui e aqui, essencialmente, eram "toy examples" ("exemplos de brinquedo") úteis para introduzir os conceitos necessários.
- Veremos agora modelos discretos especiais, no sentido de que eles foram motivados por problemas reais na Estatística, Probabilidade e, principalmente, em outras áreas.
- Apresentaremos os modelos mais básicos (conhecidos) e indicaremos onde encontrar outros modelos.

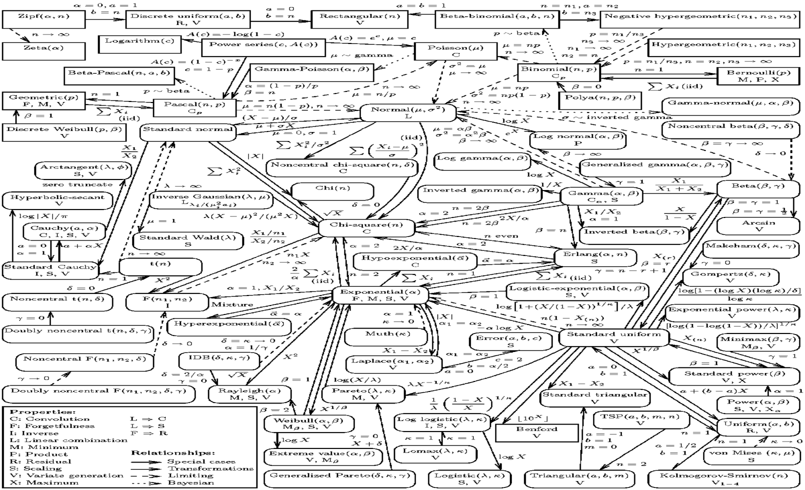
# Modelos probabilísticos discretos especiais

- É virtualmente impossível dar indicações de todos os modelos existentes também, porque regularmente, novos modelos são disponibilizados na literatura.
- Apresentaremos a concepção dos modelos (como surgiram) e suas principais características (em relação ao que apresentamos anteriormente).
- Adiante (no curso) apresentaremos outras características e propriedades.

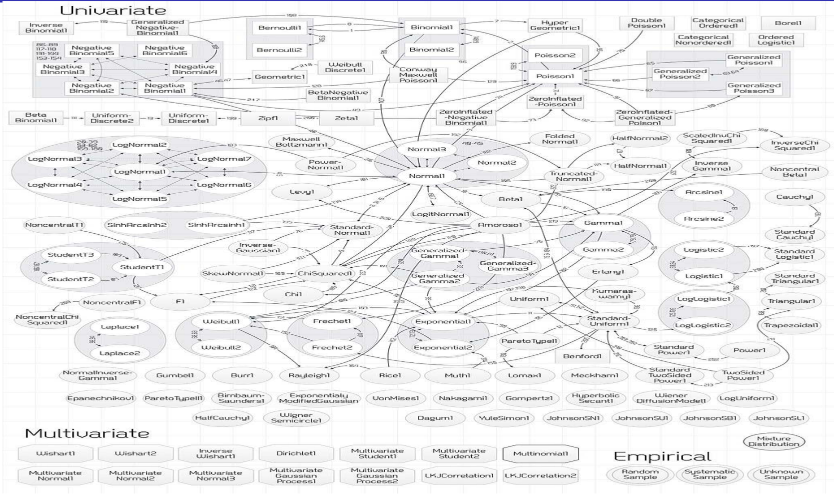
# Exemplo de Modelos probabilísticos (e inter-relações)



# Exemplo de Modelos probabilísticos (e inter-relações)



# Exemplo de Modelos probabilísticos (e inter-relações)



# Modelos probabilísticos discretos especiais

- Apresentaremos um conceito importante, relativo à independência de variáveis aleatórias.
- No momento, por simplicidade, concentrar-nos-emos em vad's.
- Sejam $X_1, X_2, ..., X_n$ vad's com suportes (imagens) respectivamente em $A_i \subset \mathcal{R}, i = 1, 2, ..., n$.
- Dizemos que elas são mutuamente independentes se, e somente se

$$
\begin{aligned}
& P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_n = x_n) \\
= \quad & P((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \cap .... \cap (X_n = x_x)) \\
= \quad & \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i), \forall x_i \in A_i.
\end{aligned}
$$

# Modelo Uniforme

- Exemplo: Uma rifa tem 100 bilhetes numerados de 1 a 100. Tenho 5 bilhetes consecutivos numerados de 21 a 25, e um amigo tem outros 5 bilhetes, com os números 1, 11, 29, 68 e 93. Quem tem maior probabilidade de ser sorteado?
  - Espalhar os números é a melhor forma de ganhar o sorteio?
  - Assumindo honestidade da rifa, cada número tem a mesma probabilidade de ser sorteado, ou seja: $\frac{1}{100}$.
  - Como eu e meu amigo temos 5 bilhetes, temos a mesma probabilidade de ganhar a rifa: $\frac{5}{100} = \frac{1}{20}$
  - Assim, a probabilidade de ganhar depende somente da quantidade de bilhetes que se tem na mão, independente da numeração.

# Modelo Uniforme

- Seja $X$ é uma variável aleatória cujos possíveis valores são representados por $A = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$.
- Dizemos $X$ segue o modelo uniforme discreto se é atribuído a mesma probabilidade $\left(\frac{1}{k}\right)$ a cada um desses possíveis valores.
- Notação $X \sim \text{uniforme}\{x_1, x_2, ..., x_k\}$ ou $X \sim \text{U}\{x_1, x_2, ..., x_k\}$.
- A fdp de $X$ é dada por:

$$f_X(x) = P(X = x) = \frac{1}{k} \mathbb{1}_{\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}}(x).$$

# Modelo Uniforme

- Para o cálculo da fda de $X$, note que:

$$F_X(x) = \sum_{y \leq x} f_X(y) = \sum_{y=x_1}^{x_k} \frac{1}{k} = \frac{1}{k} \sum_{y=x_1}^{x} 1 = \frac{n(x)}{k},$$

em que $n(x)$ é o número de elementos menores ou iguais à $x$ (com probabilidade positiva). Logo

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \frac{n(x)}{k} \mathbb{1}_{[x_1, x_k)}(x) + \mathbb{1}_{[x_k, \infty)}(x).$$

# Modelo Uniforme

- Por outro lado, a fds de $X$ é dada por:

$$S_X(x) = P(X > x) = \mathbb{1}_{(-\infty, x_1)}(x) + \left(1 - \frac{n(x)}{k}\right) \mathbb{1}_{[x_1, x_k]}(x).$$

- Exercício: verifique que $f_X$, $F_X$ e $S_X$ são, de fato, legítimas, fdp, fda e fds, respectivamente.
- Para o valor esperado, temos que:

$$\mathcal{E}(X) = \sum_{x=x_1}^{x_k} x f_X(x) = \frac{1}{k} \sum_{x=x_1}^{x_k} x.$$

# Modelo Uniforme

- Para o cálculo da variância, primeiramente, notemos que:

$$\mathcal{E}(X^2) = \sum_{x=x_1}^{x_k} x^2 f_X(x) = \frac{1}{k} \sum_{x=x_1}^{x_k} x^2.$$

- Logo:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(X) &= \mathcal{E}(X^2) - \mathcal{E}^2(X) = \frac{1}{k} \sum_{x=x_1}^{x_k} x^2 - \left( \frac{1}{k} \sum_{x=x_1}^{x_k} x \right)^2 \\ &= \frac{1}{k} \left[ \sum_{x=x_1}^{x_k} x^2 - \frac{1}{k} \left( \sum_{x=x_1}^{x_k} x \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

- Exercício: calcular $E(X)$ e $Var(X)$ se $x_i = i, i = 1, 2, ..., k$.

# Modelo Uniforme

- Exemplo: Seja $X$ o resultado obtido no lançamento de um dado honesto. Temos que:

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p(x)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

  - $E(X) = \frac{1}{6} \times (1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6} = 3,5$
  - $Var(X) = \frac{1}{6}[(1+4+9+16+25+36) - \frac{1}{6} \times (21)^2] = \frac{35}{2} = 17,5$
  - Interpretação apropriada de $E(X)$: a cada 10 lançamentos espera-se que a soma das faces obtidas esteja em torno de 35.

# Modelo Uniforme

- Retomando o exemplo do dado:
  - $F(2) = P(X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = \dfrac{2}{6}$
  - $F(2,5) = P(X \leq 2,5) = P(X = 1) + P(X = 2) = \dfrac{2}{6}$

# Simulação

- Representar de forma controlada (e.g., através de um programa de computador) uma situação real.
- Simular a amostragem de unidades de uma população, cuja característica de interesse possa ser modelada através de alguma distribuição de probabilidade.
- Simular a seleção de números ($\{1, 2, ...., k\}$), o lançamento de uma moeda ou dado etc.

# Simulação

- Em geral, a simulação de variáveis aleatórias (quaisquer) utiliza, pelo menos, um dos seguinte algoritmos:
  - Gerador de números pseudo aleatórios.
  - Gerador de uma variável aleatória uniforme contínua (veremos adiante)
- Um gerador de números pseudo aleatórios é um algoritmo que utilização funções matemática para gerar números aproximadamente independentes entre si veja aqui.

# Simulação

- Não nos estenderemos sobre a geração de números pseudo aleatórios.
- Apresentaremos adiante (no curso) a geração de números uniformes contínuos.
- Via de regra, números uniformes são gerados com base em números pseudo aleatórios.
- Denotaremos por $u$ números uniformes no intervalo (0,1). Essencialmente representa um número real gerado nesse intervalo, em que as probabilidades de ocorrência são as mesmas $\forall u \in (0,1)$.
- Apresentaremos um algoritmo (há várias opções)

# Simulação de uma variável uniforme discreta

- Seja a fda (calculada anteriormente)

| $x$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $\ldots$ | $x_{k-1}$ | $x_k$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $F_X(x)$ | $\frac{1}{k}$ | $\frac{2}{k}$ | $\frac{3}{k}$ | $\ldots$ | $\frac{k-1}{k}$ | $1$ |

- Algoritmo:

1. Simule $u$, $U \sim U(0,1)$.
2. Se $\frac{r}{k} < u < \frac{r+1}{k}$, então $x = x_{r+1}$, $r = 0, 1, 2, .., k-1$.

# Simulação de uma variável uniforme discreta

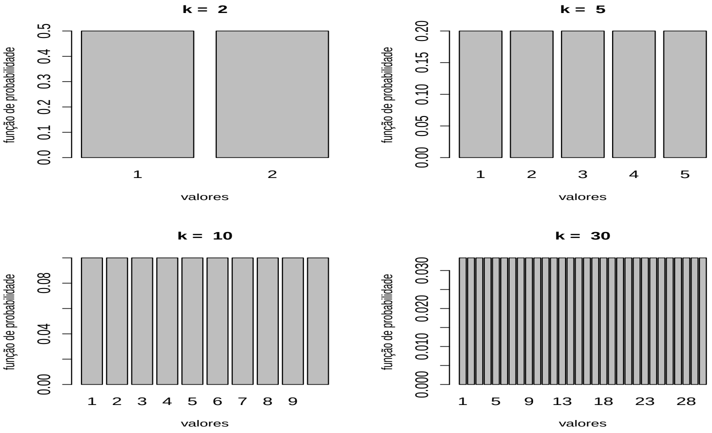
- No programa R (link) (n é o tamanho da amostra a ser simulada, e vamos considerar $x_i = i$, i=1,2,...,k):
- Duas opções:
  - Opção 1:

    ```
    sample(1:k,n)
    ```

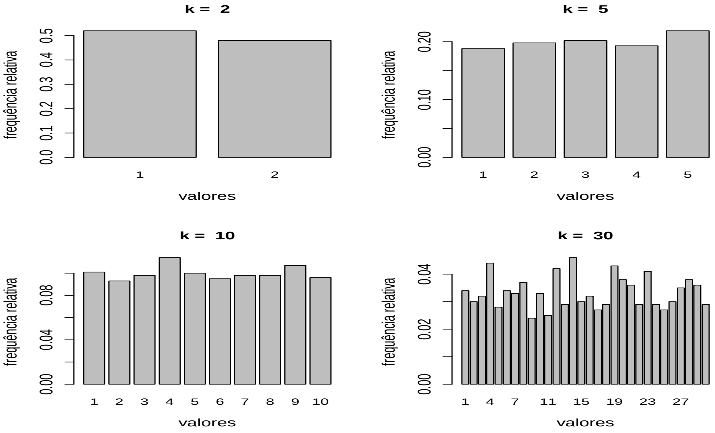
  - Opção 2 (tem que instalar e carregar o pacote "extraDistr"):

    ```
    rdunif(n, 1, k)
    ```

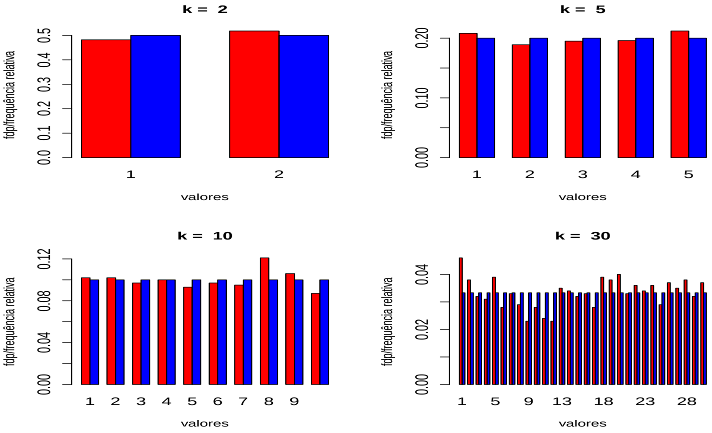
# fdp: uniforme



# valores simulados: uniforme



# fdp (azul) e valores simulados (vermelho): uniforme



# Modelo Bernoulli

- Consideremos um experimento $E$ com espaço amostral $\Omega$ e o evento $A$, $A \subset \Omega$.
- Dizemos que ocorreu "sucesso" se o evento $A$ aconteceu e fracasso, caso contrário.
- Exemplo: Experimento - lançar uma moeda e verificar se observamos cara ou coroa. Suponha que consideramos como sucesso a obtenção de cara.
- Esse tipo de experimento é chamado de ensaio de Bernoulli.

# Modelo Bernoulli

- Ensaios tipo Bernoulli: estamos interessados em modelar as probabilidades de ocorrência somente do um sucesso ou do fracasso.
- Outro exemplo: uma pessoa é escolhida ao acaso entre os moradores de uma certa cidade, e lhe é perguntado se concorda com um projeto. As possíveis respostas são apenas "Sim" ou "Não".
- $\Omega = \{\text{Sim}, \text{Não}\}$. De uma forma geral $\Omega = \{\text{Fracasso}, \text{Sucesso}\}$.
- Defina: $X = \begin{cases} 1, & \text{evento de interesse ocorre (sucesso)} \\ 0, & \text{caso contário (fracasso)} \end{cases}$

# Modelo Bernoulli

- $P(X = 1) = P(\text{sucesso}) = p \Rightarrow P(X = 0) = P(\text{fracasso}) = 1 - p$.
- Homenagem ao matemático Suiço Jacob Bernoulli.
- Notação $X \sim \text{Bernoulli}(p)$, parâmetro $p \in (0, 1)$.
- Temos que a respectiva fdp é dada por:

$$f_X(x) = P(X = x) = p^x q^{1-x} \mathbb{1}_{\{0,1\}}(x),$$

em que $q = 1 - p$.

- Por outro lado, a fda é dada por:

$$F_X(x) = q \mathbb{1}_{[0,1)}(x) + \mathbb{1}_{[1,\infty)}(x).$$

# Modelo Bernoulli

- Além disso, a fds é dada por:

$$S_X(x) = \mathbb{1}_{(-\infty,0)}(x) + p\mathbb{1}_{[0,1]}(x).$$

- Valor esperado:

$$E(X) = \sum_{x=0}^{1} x f_X(x) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p.$$

# Modelo Bernoulli

- Para a variância, temos que:

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{1} x^2 f_X(x) = 0^2 \times (1-p) + 1^2 \times p = p.$$

- Logo

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = p - p^2 = p(1-p).$$

# Modelo Bernoulli

- Exemplo: lançamos um dado e consideramos como sucesso, a obtenção da face 5. Supondo que o dado é honesto:

| $x$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $p(x)$ | $\frac{5}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

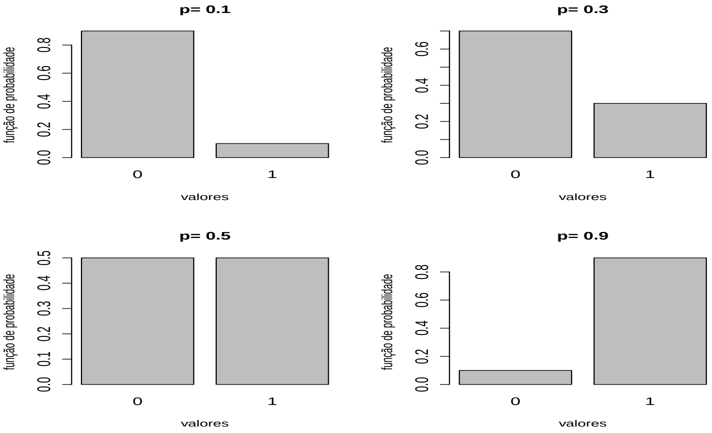
  - $P(X=x) = p^x(1-p)^{1-x} = \left(\frac{1}{6}\right)^x \left(\frac{5}{6}\right)^{1-x}$ em que $x = 0, 1$
  - $E(X) = \frac{1}{6}$.
  - $E(X^2) = \frac{1}{6}$.
  - $Var(X) = \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{6-1}{36} = \frac{5}{36}$.

# Simulação de uma variável Bernoulli

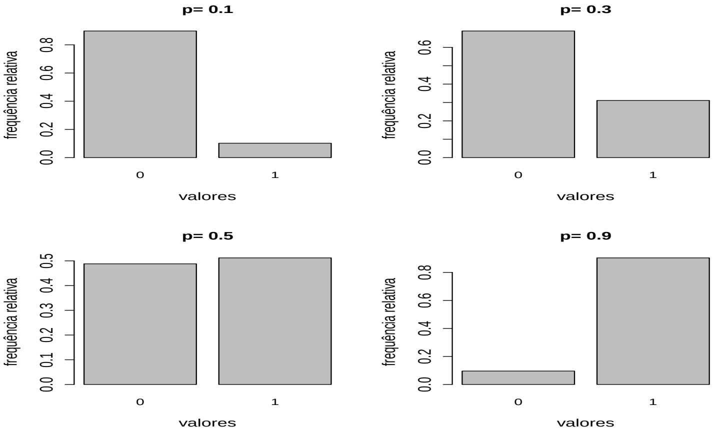
- Algoritmo:
  1. Simule $u$, $U \sim U(0,1)$.
  2. Se $u < p$, então x= 1, caso contrário, x=0.
- No programa R (n é o tamanho da amostra a ser simulada)

```
rbinom(n,1,p)
```

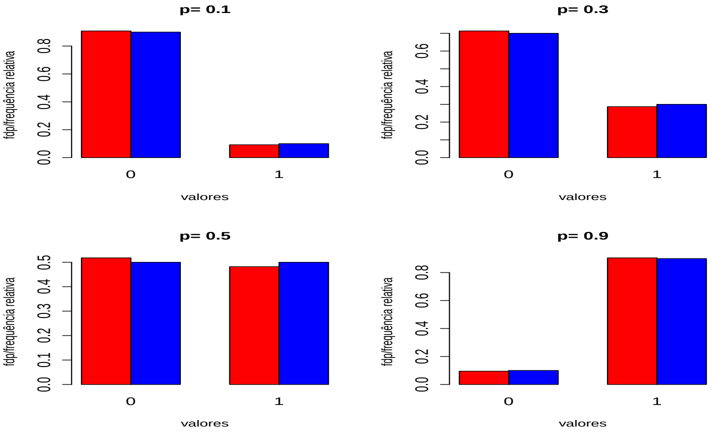
# fdp: Bernoulli



# valores simulados: Bernoulli



# fdp (azul) e valores simulados (vermelho): Bernoulli



# Modelo Binomial

- Consideremos novamente um experimento $E$ com espaço amostral $\Omega$ e o evento $A$.
- Dizemos que ocorreu sucesso se o evento $A$ for observado e fracasso, caso contrário.
- Repetimos o experimento (ensaios de Bernoulli) $n$ vezes, de forma independente.
- $X$=número de sucessos nos $n$ experimentos.
- Exemplo: lançar uma moeda 3 vezes e verificar se se observa cara ou coroa. Consideramos como sucesso, a obtenção de cara.
- Os valores possíveis de $X$ são $\{0, 1, 2, 3\}$.

# Modelo binomial

- A repetição de ensaios independentes de Bernoulli com a mesma probabilidade de sucesso dá origem a variável aleatória binomial.
- Exemplo: Sabe-se que a eficiência de uma vacina é de 80%. Um grupo de 3 indivíduos é sorteado, dentre a população vacinada, e cada um é submetido a testes para averiguar se está imunizado. Nesse caso, consideramos como sucesso, a imunização:
  - Defina $X_i = \begin{cases} 1, & \text{indivíduo i está imunizado} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$
  - Pelo enunciado, sabe-se que $P(X_i = 1) = p = 0,8$.

# Modelo Binomial

- As variáveis aleatórias $X_1$, $X_2$ e $X_3$ são independentes, com a mesma distribuição (mesma probabilidade de sucesso) de Bernoulli.
- Se o interesse está em estudar $X$ o número de indivíduos imunizados no grupo, temos que $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$.
- Note que $X = X_1 + X_2 + X_3$.

# Modelo Binomial

| evento | P(evento) | X |
|---|---|---|
| $X_1 = 0,\ X_2 = 0,\ X_3 = 0$ | $(0,2)^3$ | 0 |
| $X_1 = 1,\ X_2 = 0,\ X_3 = 0$ | $0,8 \times (0,2)^2$ | 1 |
| $X_1 = 0,\ X_2 = 1,\ X_3 = 0$ | $0,8 \times (0,2)^2$ | 1 |
| $X_1 = 0,\ X_2 = 0,\ X_3 = 1$ | $0,8 \times (0,2)^2$ | 1 |
| $X_1 = 1,\ X_2 = 1,\ X_3 = 0$ | $(0,8)^2 \times 0,2$ | 2 |
| $X_1 = 1,\ X_2 = 0,\ X_3 = 1$ | $(0,8)^2 \times 0,2$ | 2 |
| $X_1 = 0,\ X_2 = 1,\ X_3 = 1$ | $(0,8)^2 \times 0,2$ | 2 |
| $X_1 = 1,\ X_2 = 1,\ X_3 = 1$ | $(0,8)^3$ | 3 |

# Modelo Binomial

- Assim, as probabilidades de cada valor possível de $X$ são:

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x)$ | $(0,2)^3$ | $3 \times 0,8 \times (0,2)^2$ | $3 \times (0,8)^2 \times 0,2$ | $(0,8)^3$ |

- Além disso, o comportamento de X é completamente determinado pela função

$$P(X = x) = \binom{3}{x} (0,8)^x (0,2)^{3-x} \mathbb{1}_{\{0,1,2,3\}}(x).$$

# Modelo Binomial

- Modelo Geral: Considere a repetição de $n$ ensaios $X_i$ Bernoulli independentes e todos com a mesma probabilidade de sucesso $p$. A variável aleatória $X = X_1 + \ldots + X_n$ que representa o total de sucessos corresponde ao modelo binomial com parâmetros $n$ e $p$ ($n \in \mathcal{N}^*, p \in (0,1)$).
- Notação: $X \sim \text{bin}(n, p)$ ou $X \sim \text{binomial}(n, p)$.
- A respectiva fdp é dada por:

$$f_X(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \mathbb{1}_{\{0,1,2,\ldots,n\}}(x).$$

- O nome é devido aos coeficientes binomiais $\binom{n}{x}$ que aparecem na fdp.

# Modelo Binomial

- Demonstração: para uma dada configuração de $n$ ensaios, digamos $\{S, S, F, S, ..., F\}$ (em que $S$ : sucesso e $F$ : fracasso) temos que sua probabilidade de ocorrência é $p^x q^{n-x}$, sendo $x$ o número de sucessos e $n-x$ o número de fracassos.
- Contudo, temos um total de $\binom{n}{x}$ configurações possíveis que levam ao mesmo número de sucessos e de fracassos.
- Como somente uma delas pode ocorrer, então

$$P(X = x) = P(C_1 \dot{\cup} C_2 \dot{\cup} ... \dot{\cup} C_{\binom{n}{x}}) = \sum_{i=1}^{\binom{n}{x}} p^x q^{n-x} = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x},$$

em que $C_i$ é a i-ésima configuração.

# Propriedades da Esperança e Variância

- Exercício: provar que $f_X(.)$ é, de fato, uma fdp.
- Obs: pode-se utilizar o fato de que

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i} = (a+b)^n.$$

- Se $n = 1$, então $X \sim \text{bin}(1, p) \equiv \text{Bernoulli}(p)$.
- A fda de X é dada por

$$F_X(x) = \sum_{y \le x} f_X(y) \mathbb{1}_{[0,n)}(x) + \mathbb{1}_{[n,\infty)}(x).$$

# Propriedades da Esperança e Variância

- A fds de X é dada por

$$S_X(x) = \mathbb{1}_{(-\infty,0)}(x) + \sum_{y \leq x} f_X(y)\mathbb{1}_{[0,,n)}(x).$$

- Valor esperado ($y = x - 1$):

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(X) &= \sum_{x=0}^{n} x\binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \sum_{x=1}^{n} x\binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \sum_{x-1=0}^{n} x\binom{n}{x} p^x q^{n-x} \\
&= np \sum_{x-1=0}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p^{x-1} q^{n-x} \\
&= np \sum_{y=0}^{n-1} \binom{n-1}{y} p^y q^{n-1-y} = np(p+q)^{n-1} = np.
\end{aligned}$$

# Propriedades da Esperança e Variância

- Para calcular a variância, precisaremos da $\mathcal{E}(X^2)$. Contudo, é mais fácil calcular $\mathcal{E}(X(X-1))$. De fato $(y = x - 2)$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}(X(X-1)) &= \sum_{x=0}^{n} x(x-1)\binom{n}{x}p^x q^{n-x} \\
&= n(n-1)p^2 \sum_{x=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!} p^{x-2} q^{n-x} \\
&= n(n-1)p^2 \sum_{x-2=0}^{n} \binom{n-2}{x-2} p^{x-2} q^{n-x} \\
&= n(n-1)p^2 \sum_{y=0}^{n-2} \binom{n-2}{y} p^{x} q^{n-2-y} \\
&= n(n-1)p^2,
\end{aligned}
$$

# Propriedades da Esperança e Variância

- (cont.) Portanto:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(X(X-1)) &= n(n-1)p^2 = n^2p^2 - np^2 \\ &\rightarrow \mathcal{E}(X^2) = n^2p^2 - np^2 + \mathcal{E}(X) = n^2p^2 - np^2 + np \\ &\rightarrow \mathcal{E}(X^2) = n^2p^2 + np(1-p).\end{aligned}$$

- Logo

$$\mathcal{V}(X) = \mathcal{E}(X^2) - \mathcal{E}^2(X) = n^2p^2 + np(1-p) - n^2p^2 = np(1-p).$$

# Propriedades da Esperança e Variância

- Lembre que uma binomial$(n, p)$ é uma soma de $n$ vad's com mesma distribuição de Bernoulli's e mutuamente independentes (notação $X_i \stackrel{iid}{\sim}$ Bernoulli$(p)$).
- Devido a cada esperança existir,da propriedade vista aqui, temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(X) &= \mathcal{E}(X_1 + X_2 + ... + X_n) = \mathcal{E}(X_1) + \mathcal{E}(X_2) + ... + \mathcal{E}(X_n) \\
&= p + p + ... + p = np.
\end{aligned}$$

# Modelo Binomial

- Como cada variância existe e as variáveis são independentes (vamos provar essa propriedade, adiante), temos que:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(X) &= \mathcal{V}(X_1 + X_2 + ... + X_n) = \mathcal{V}(X_1) + \mathcal{V}(X_2) + ... + \mathcal{V}(X_n) \\ &= p(1-p) + p(1-p) + ... + p(1-p) = np(1-p).\end{aligned}$$

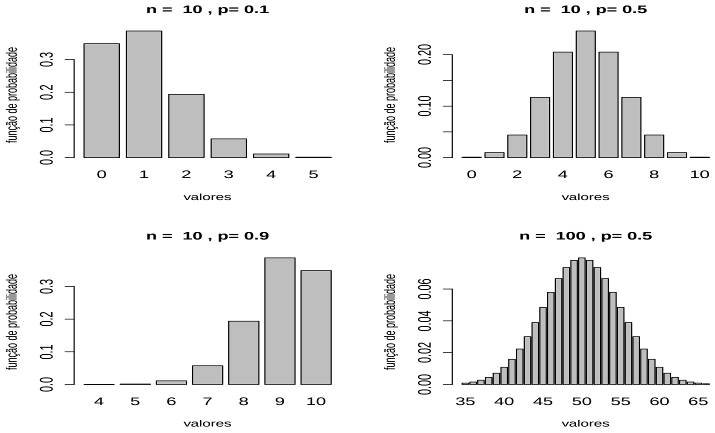
- No exemplo da vacina, temos então $n = 3$ e $p = 0,8$.
  - $X \sim \text{bin}(3; 0,8)$.
  - $E(X) = 3 \times 0,8 = 2,4$.
  - $Var(X) = 3 \times 0,8 \times 0,2 = 0,48$.

# Simulação de uma variável binomial

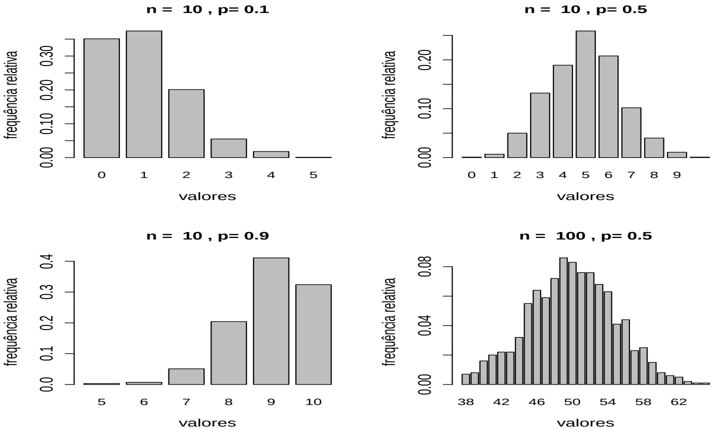
- Algoritmo:
  1. Simule $x_i, i = 1, 2..., m$, de forma iid de $X \sim$ Bernoulii.
  2. Faça $x = x_1 + x_2 + ... + x_m$.
- No programa R (n é o tamanho da amostra a ser simulada, e vamos considerar que $m$ é o número de ensaios de Bernoulli)

```
rbinom(n,m,p)
```

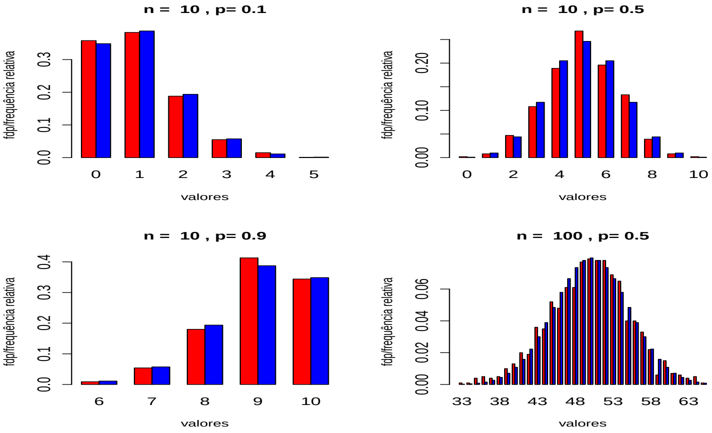
# fdp: binomial



# valores simulados: binomial



# fdp (azul) e valores simulados (vermelho): binomial



# Modelo de Poisson

- É apropriado para contagens sem um limite superior (no caso da binomial, por exemplo, a contagem está limitada por $n$).
- Depreendido a partir do modelo binomial quando :
  - $n \to \infty$ (número de tentativas).
  - $p \to 0$ (probabilidade de sucesso).
  - $np \to \lambda$ (valor esperado).
- Notação $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $\lambda > 0$.
- Tem esse nome devido ao seu desenvolvedor, Siméon Denis Poisson.

# Modelo Poisson

- Demonstração: Temos que se $X \sim \text{bin}(n, p)$, então

$$
\begin{aligned}
P(X = x) &= \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= \frac{n(n-1)...(n-x+1)}{x! n^x} (pn)^x \left(1 - \frac{np}{n}\right)^n \left(1 - \frac{np}{n}\right)^{-x} \\
&= \frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)...\left(1-\frac{x}{n}+\frac{1}{n}\right)}{x!} (pn)^x \left(1 - \frac{np}{n}\right)^n \left(1 - \frac{np}{n}\right)^{-x},
\end{aligned}
$$

## Cont.

- Logo (lembrando que $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a$)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P(X=x) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{x}{n}+\frac{1}{n}\right)}{x!} \\
&\times \lim_{n\to\infty} (pn)^x \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{np}{n}\right)^n}_{e^{-\lambda}} \\
&\times \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{np}{n}\right)^{-x} \\
&= \frac{1}{x!}\lambda^x e^{-\lambda}.
\end{aligned}$$

# Distribuição de Poisson

- Uma variável aleatória $X$ tem distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda > 0$, se sua função de probabilidade é dada por:

$$f_X(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}\mathbb{1}_{\{0,1,2,\ldots\}}(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}\mathbb{1}_{\mathcal{N}}(x).$$

- $\lambda$ é chamado de taxa de ocorrência.
- Notação: $X \sim P(\lambda)$ ou $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

# Distribuição de Poisson

- Prove que $f_X$ é, de fato, uma fdp. Você pode usar o fato de que:

$$e^{\lambda} = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!},$$

que corresponde à expansão em séries de Taylor de $e^{\lambda}$, em torno do zero.

# Fda e fds

- Temos que a fda é dada por:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{y \leq x} \frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!} = \sum_{y=0}^{x} \frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!}.$$

- Logo

$$F_X(x) = \left(\sum_{y=0}^{x} \frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!}\right) \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x).$$

- Analogamente, temos que:

$$S_X(x) = P(X > x) = \mathbb{1}_{(-\infty,0)}(x) + \left(\sum_{y=x+1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!}\right) \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x).$$

# Distribuição de Poisson

- Para o valor esperado, temos que ($y = x - 1$):

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{(x-1)!} = \lambda \sum_{y=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!} = \lambda.$$

- Assim como no caso da distribuição binomial, é mais fácil calcular $\mathcal{E}(X(X-1))$ do que $\mathcal{E}(X^2)$. Com efeito ($y = x - 2$):

$$\begin{aligned} E(X(X-1)) &= \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1) \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1) \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \\ &= \sum_{x=2}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{(x-2)!} = \lambda^2 \sum_{y=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!} = \lambda^2, \end{aligned}$$

# Distribuição de Poisson

- (Cont.)

$$\begin{aligned} E(X(X-1)) &= E(X^2 - X) \rightarrow E(X^2 - X) = \lambda^2 \\ &\rightarrow E(X^2) = E(X) + \lambda^2 \\ &\rightarrow E(X^2) = \lambda + \lambda^2. \end{aligned}$$

- Logo

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

# Distribuição de Poisson

- Exemplo: O Comportamento da emissão de partículas radioativas (de alguma fonte) são, em geral, modeladas através de uma distribuição de Poisson, com o valor do parâmetro dependendo da fonte utilizada. Supondo que o número de partículas $\alpha$ emitidas por minuto é uma variável aleatória seguindo o modelo Poisson com parâmetro $\lambda = 5$, ou seja, a taxa de ocorrência é de 5 emissões a cada minuto, podemos estar interessados em calcular a probabilidade, por exemplo, de haver mais de duas emissões por minuto.

# Distribuição de Poisson

- $X \sim P(5)$.
- $P(X > 2) = \sum_{x=3}^{\infty} \frac{e^{-5} 5^x}{x!} = 1 - \sum_{x=0}^{2} \frac{e^{-5} 5^x}{x!} \approx 0,875$.
- $E(X) = \lambda = 5$.
- $Var(X) = \lambda = 5$.

# Distribuição de Poisson

- Considerando a distribuição $bin(n, p)$, quando o valor de $n$ é grande e $p$ pequeno (mantendo-se o produto $np$ constante), podemos usar a seguinte aproximação para a probabilidade:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \approx \frac{e^{-np}(np)^x}{x!}, \forall\, x = 0, 1, 2, \ldots$$

- Geralmente considera-se o critério $np \leq 7$ para usar essa aproximação.

# Distribuição de Poisson

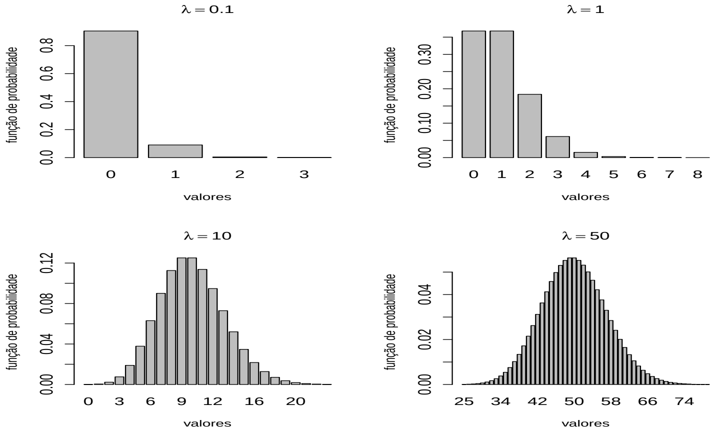
- Exemplo: $X \sim bin(100; 0,065)$, deseja-se obter $P(X = 10)$.
  - $\lambda = np = 100 \times 0,065 = 6,5 \leq 7$.
  - no modelo Binomial: $P(X = 10) = \binom{100}{10}(0,065)^{10}(0,935)^{100-10} = 0,055$.
  - no modelo Poisson: $P(X = 10) = \dfrac{e^{-6,5}(6,5)^{10}}{10!} \approx 0,056$.

# Simulação de uma variável Poisson

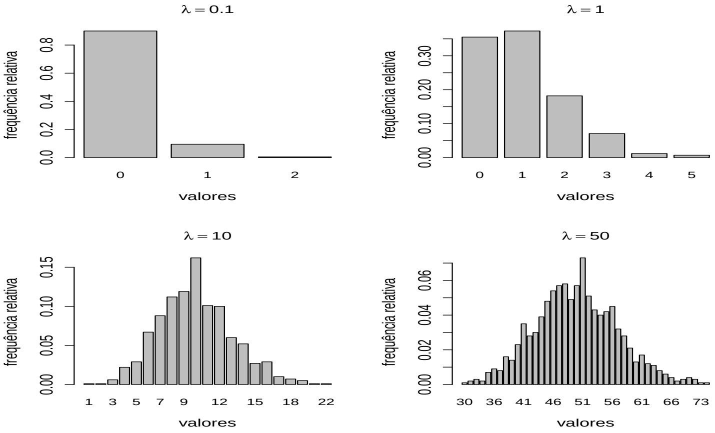
- Algoritmo:
  1. O algoritmo usado pelo programa R encontra-se aqui.
- No programa R (n é o tamanho da amostra a ser simulada)

```
rpois(n,lambda)
```

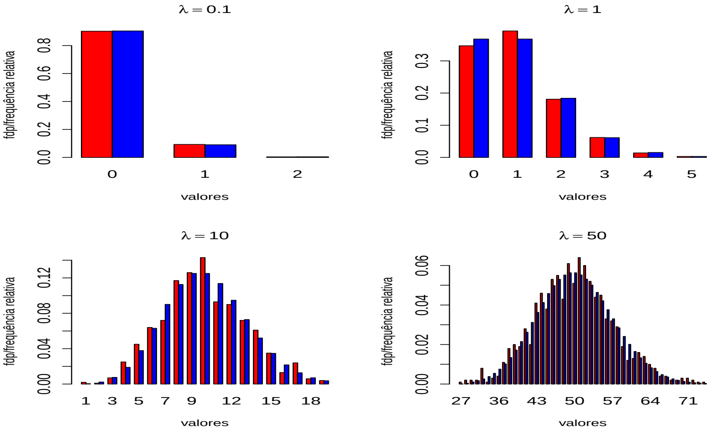
# fdp: Poisson


λ = 0.1
λ = 1
λ = 10
λ = 50
função de probabilidade
valores
0.0 0.2 0.4 0.6 0.8
0 1 2 3
0.00 0.10 0.20 0.30
0 1 2 3 4 5 6 7 8
0.00 0.04 0.08 0.12
0 3 6 9 12 16 20
0.00 0.02 0.04
25 34 42 50 58 66 74

# valores simulados: Poisson



# fdp (azul) e valores simulados (vermelho): Poisson



# Modelo Geométrico

- Consideremos, novamente, um experimento $E$ com espaço de resultados $\Omega$ e o evento $A, A \subset \Omega$.
- Dizemos que ocorreu sucesso se o evento $A$ foi observado e fracasso, caso contrário (como nos modelos Bernoulli e binomial).
- Repetimos o experimento até o primeiro sucesso ser observado.
- Defina $X$: o número de repetições necessárias até se obter o primeiro sucesso.
- Exemplo: lançar uma moeda repetidas vezes até observar-se a primeira cara.

# Modelo Geométrico

- Os valores possíveis de $X$ são $\{1, 2, 3, ...\}$.
- Repetimos ensaios de Bernoulli independentes e com a mesma probabilidade de sucesso ($p$) até obtermos o primeiro sucesso.
- Ou seja, $X$ é o número de ensaios Bernoulli até se obter o primeiro sucesso.

# Modelo Geométrico

- Notação: $X \sim G(p)$, ou $X \sim \text{geométrica}(p)$, $q = 1 - p$.
- Função de probabilidade:

$$f_X(x) = P(X = x) = p(1-p)^x \mathbb{1}_{\{1,2,3,\ldots\}}(x) = p(1-p)^x \mathbb{1}_{\mathcal{N}^*}(x).$$

- Demonstração:

$$\begin{aligned} P(Y=1) &= p \\ P(Y=2) &= (1-p)p \\ P(Y=3) &= (1-p)^2 p \\ &\vdots \\ P(Y=k) &= (1-p)^{k-1} p. \end{aligned}$$

# Modelo Geométrico

- Prove que $f_X(.)$ é, de fato, uma legítima fdp (ver a fórmula da soma dos termos de uma pg finita).
- Em relação à fda, temos que:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) = \sum_{y \leq x} (1-p)^{y-1} p = p \sum_{y=1}^{x} (1-p)^{y-1} p \\ &= p \frac{(q^x - 1)}{q - 1} = 1 - q^x. \end{aligned}$$

# Modelo geométrico

- Logo,

$$F_X(x) \quad = \quad (1 - q^x)\,\mathbb{1}_{[1,\infty]}(x).$$

- Analogamente,

$$S_X(x) \quad = \quad \mathbb{1}_{(-\infty,1)}(x) + q^x \mathbb{1}_{[1,\infty)}(x).$$

# Modelo geométrico

- Para o valor esperado, temos que:

$$\begin{aligned}E(X) &= \sum_{x=1}^{\infty} x(1-p)^{x-1}p = p\sum_{x=1}^{\infty}\frac{dq^x}{dq} = p\frac{d}{dq}\sum_{x=1}^{\infty}q^x \\ &= p\frac{d}{dq}\left(\frac{q}{1-q}\right) = p\frac{1-q+q}{(1-q)^2} = p\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}.\end{aligned}$$

# Modelo geométrico

- Assim como para os modelos binomial e Poisson, é mais fácil calcular $\mathcal{E}(X(X-1)$ do que $\mathcal{E}(X^2)$, com efeito

$$
\begin{aligned}
E(X(X-1)) &= (1-p)\sum_{x=1}^{\infty} x(x-1)(1-p)^{x-2}p \\
&= (1-p)p\sum_{x=1}^{\infty} \frac{d^2q^x}{dq^2} = p(1-p)\frac{d^2}{dq^2}\sum_{x=1}^{\infty} q^x \\
&= p(1-p)\frac{d^2}{dq^2}\left(\frac{q}{1-q}\right) = p(1-p)\frac{d}{dq}\frac{1-q+q}{(1-q)^2} \\
&= p(1-p)\frac{d}{dq}\frac{1}{(1-q)^2} = (1-p)\frac{2}{(1-q)^2}.
\end{aligned}
$$

# Modelo geométrico

- (Cont.) Portanto

$$E(X^2 - X) = (1-p)\frac{2}{p^2} \to E(X^2) = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{2-p}{p^2}.$$

- Logo, temos que

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.$$

# Modelo geométrico

- Em relação à fda, temos que (ver a fórmula da soma dos termos de uma pg finita):

$$
\begin{aligned}
F_X(x) &= P(X \leq x) = \sum_{y \leq x} (1-p)^{y-1} p = p \sum_{y=1}^{x} (1-p)^{y-1} p \\
&= p \frac{(q^x - 1)}{q - 1} = 1 - q^x.
\end{aligned}
$$

# Modelo geométrico

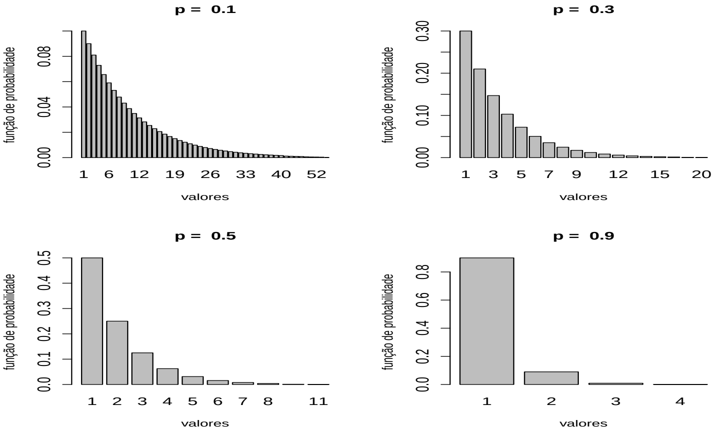
- Uma outra forma de se definir a distribuição é geométrica é através da va, digamos, $Y$ sendo o número de fracassos até se obter o primeiro sucesso.
- Prove que $Y = X - 1$ e obtenha as respetivas fdp, fda, fds, $\mathcal{E}(.)$ e $\mathcal{V}(.)$ de $Y$.

# Simulação de uma variável geométrica

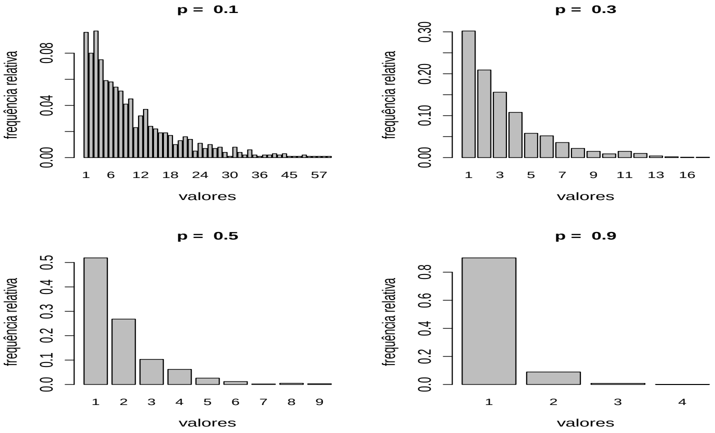
- Algoritmo:
  1. O algoritmo usado pelo programa R encontra-se aqui, pag. 480.
- Um algoritmo "ingênuo" seria:
  1. Simule x, $X \sim$ Bernoulli até que x=1.
- No programa R (n é o tamanho da amostra a ser simulada)

```
rgeom(n,p)
```

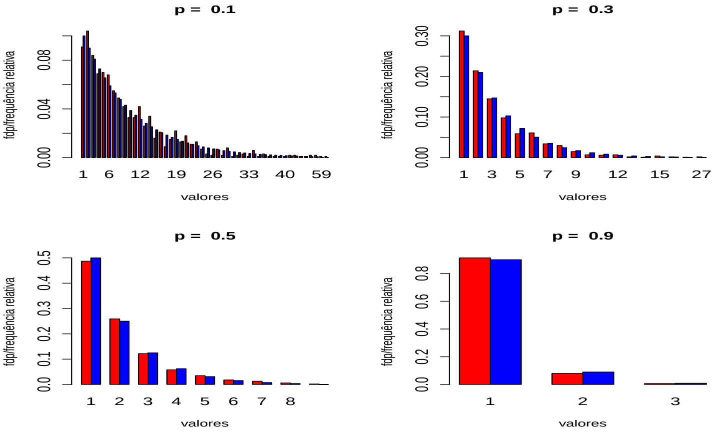
# fdp: geométrica



# valores simulados: geométrica



# fdp (azul) e valores simulados (vermelho): geométrica



# Modelo binomial negativo

- Consideremos novamente um experimento $E$ com espaço de resultados $\Omega$ e o evento $A, A \subset \Omega$.
- Vamos dizer que ocorreu sucesso se o evento $A$ aconteceu e fracasso, caso contrário.
- Repetimos o experimento até que $r$ sucessos tenham ocorrido.
- Defina $X$ o número de repetições até que observemos $r$ sucessos.
- Exemplo: lançar uma moeda repetidas vezes até aparecerem 4 caras.

# modelo binomial negativo

- Os valores possíveis de $X$ são $\{r, r+1, r+2, ...\}$.
- Repetimos ensaios independentes de Bernoulli, com probabilidade ($p$) de sucesso, até obtermos $r$ sucessos.
- Seja $X$ o número de ensaios Bernoulli até obtermos $r$ sucessos.
- Assim $X = X_1 + X_2 + .... + X_r$, em que $X_i \overset{iid}{\sim}$ geométrica($p$).
- Notações: $X \sim$ binomial negativa$(r, p)$, $Y \sim$ BN$(r, p)$.
- Função de probabilidade:

$$f_X(x) = P(X = x) = \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r} \mathbb{1}_{\{r, r+1, r+2, \dots\}}(x).$$

# Modelo binomial negativo

- Para uma dada sequência de "r" sucessos, temos que sua probabilidade de ocorrência é

$$P(X = r) = p^r$$

$$P(X = r + 1) = (1 - p)p^r$$

$$P(X = r + 2) = (1 - p)^2 p^r$$

$$\vdots$$

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-r} p^r$$

# Modelo binomial negativo

- (Cont.)) Contudo, para cada sequência de r sucessos e k repetições (a última repetição tem de ser sempre sucesso), temos um total de

$$\binom{k-1}{r-1},$$

possibilidades.

- Logo

$$P(X=k) = \sum_{i=1}^{\binom{k-1}{r-1}} (1-p)^{k-r} p^r = \binom{k-1}{r-1}(1-p)^{k-r}p^r.$$

- Exercício: prove que, de fato, $f_X(.)$ é uma legítima fdp.

# Modelo binomial negativo

- Pode-se usar o seguinte resultado (expansão em séries de Taylor da função $f(x) = (1-x)^{-r}$, em torno do zero):

$$
\begin{aligned}
(1-x)^{-r} &= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{r+i-1}{i} x^i = \sum_{i+r=r}^{\infty} \binom{r+i-1}{i} x^i \\
&= \sum_{j=r}^{\infty} \binom{j-1}{j-r} x^{j-r} = x^{-r} \sum_{j=r}^{\infty} \binom{j-1}{r-1} x^j .
\end{aligned}
$$

# Modelo binomial negativo

- Notemos que

$$
\begin{aligned}
\binom{x-1}{r-1} &= \frac{(x-1)!}{(r-1)!(x-r)!} = \frac{(x-1)\times(x-2)\times \ldots \times(x-r+1)}{(r-1)!} \\
&= (-1)^{r-1}\frac{(-x+1)\times(-x+2)\times \ldots \times(-x+(r-1))}{(r-1)!} \\
&= (-1)^{r-1}\binom{-x}{r-1},
\end{aligned}
$$

por isso o nome binomial-negativa.

# Modelo binomial negativo

- A fda e a fds são dadas, respectivamente, por:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \left[ \left( \frac{1}{1-p} \right)^r \sum_{y \leq x} \binom{y-1}{r-1} (1-p)^y \right] \mathbb{1}_{[r,\infty)}(x).$$

$$\begin{aligned} S_X(x) &= P(X > x) = \mathbb{1}_{(\infty,r)}(x) \\ &+ \left[ 1 - \left( \frac{1}{1-p} \right)^r \sum_{y > x} \binom{y-1}{r-1} (1-p)^y \right] \mathbb{1}_{[r,\infty)}(x). \end{aligned}$$

# Modelo binomial negativo

- Para o valor esperado, temos que:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}(X) &= \sum_{x=r}^{\infty} \binom{x-1}{r-1} x (1-p)^{x-r} p^r \\
&= -(1-p)^{1-r} p^r \sum_{x=r}^{\infty} \binom{x-1}{r-1} \frac{d}{dp} (1-p)^x \\
&= -(1-p)^{1-r} p^r \frac{d}{dp} \sum_{x=r}^{\infty} \binom{x-1}{r-1} (1-p)^x \\
&= -(1-p)^{1-r} p^r \frac{d}{dp} \left( \frac{1-p}{p} \right)^r \\
&= (1-p)^{1-r} p^r \frac{r(1-p)^r}{p^{r+1}(1-p)} = \frac{r}{p}.
\end{aligned}
$$

# Modelo binomial negativo

- Para a variância, temos que:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}(X(X-1)) &= \sum_{x=r}^{\infty} \binom{x-1}{r-1} x(x-1)(1-p)^{x-r} p^r \\
&= (1-p)^{2-r} p^r \sum_{x=r}^{\infty} \binom{x-1}{r-1} \frac{d^2}{dp^2} (1-p)^x \\
&= (1-p)^{2-r} p^r \frac{d^2}{dp^2} \sum_{x=r}^{\infty} \binom{x-1}{r-1} (1-p)^x \\
&= (1-p)^{2-r} p^r \frac{d^2}{dp^2} \left(\frac{1-p}{p}\right)^r \\
&= -(1-p)^{2-r} p^r \frac{r(1-p)^r p^{-r-2}(2p-r-1)}{(1-p)^2} =
\end{aligned}
$$

# Modelo binomial negativo

- (Cont.) temos que:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(X(X-1)) &= -\frac{r(2p-r-1)}{p^2} \to \mathcal{E}(X^2) = -\frac{r(2p-r-1)}{p^2} + \mathcal{E}(X) \\ &= -\frac{r(2p-r-1)}{p^2} + \frac{r}{p} = \frac{-pr+r^2+r}{p^2}.\end{aligned}$$

- Logo,

$$\mathcal{V}(X) = \frac{-pr+r^2+r}{p^2} - \frac{r^2}{p^2} = \frac{r(1-p)}{p^2}.$$

# Modelo binomial negativo

- Lembre que uma $\text{bn}(r, p)$ é uma soma de $r$ vad's com mesma distribuição geométrica e mutuamente independentes (notação $X_i \overset{iid}{\sim} \text{G}(p)$).
- Devido a cada esperança existir,da propriedade vista aqui, temos que:

$$\mathcal{E}(X) = \mathcal{E}(X_1 + X_2 + .... + X_r) = \mathcal{E}(X_1) + \mathcal{E}(X_2) + ... + \mathcal{E}(X_r) = \frac{r}{p}.$$

# Modelo binomial negativo

- Como cada variância existe e as variáveis são independentes (vamos provar essa propriedade, adiante), temos que:

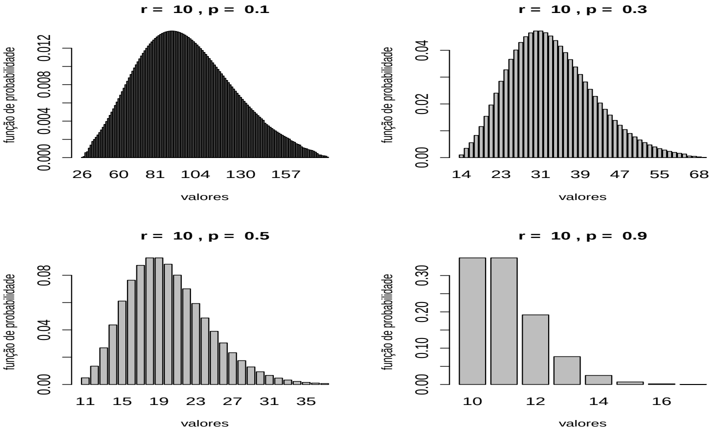
$$
\begin{aligned}
\mathcal{V}(X) &= \mathcal{V}(X_1 + X_2 + ... + X_r) = \mathcal{V}(X_1) + \mathcal{V}(X_2) + ... + \mathcal{V}(X_r) \\
&= \frac{1-p}{p^2} + \frac{1-p}{p^2} + ... + \frac{1-p}{p^2} + = \frac{r(1-p)}{p^2}.
\end{aligned}
$$

# Simulação de uma variável binomial negativa

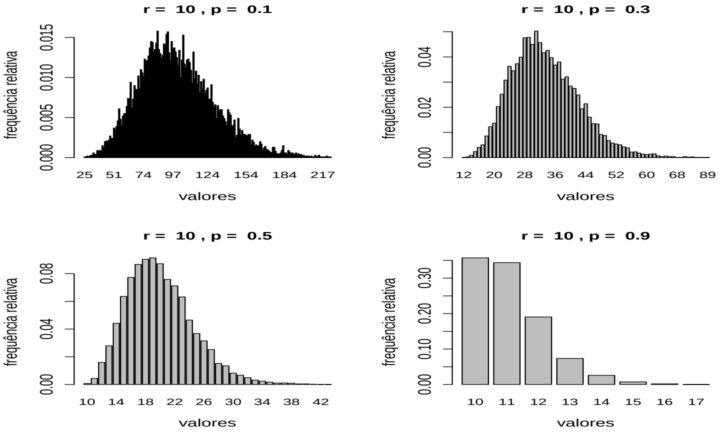
- Algoritmo:
  1. O algoritmo usado pelo programa R encontra-se aqui, pag. 480.
- Um outro algoritmo seria:
  1. Simule $x_1$, $x_r$,...,$x_r$, $X_i \overset{iid}{\sim} \text{G}(p)$ e faça $x = x_1 + x_2 + ... + x_r$.
- No programa R (n é o tamanho da amostra a ser simulada)

```
rnbinom(n,r,p)
```

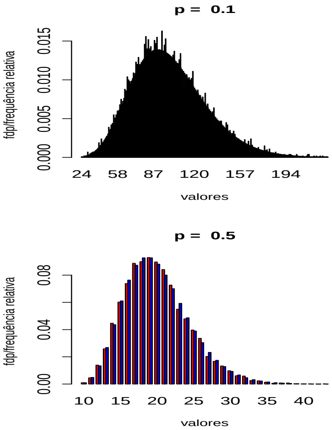
# fdp: binomial negativa



# valores simulados: binomial negativa



# fdp (azul) e valores simulados (vermelho): BN



# Distribuição Hipergeométrica

- Suponha uma população dividida em dois grupos (duas características).
- Extrações casuais sem reposição.
- Detalhes:
  - $N$ objetos.
  - $r$ têm a característica A.
  - $N - r$ têm a característica B.
  - um grupo de $n$ elementos é escolhido ao acaso, dentre os $N$ possíveis, sem reposição.
- Objetivo: calcular a probabilidade de que este grupo de $n$ elementos contenha exatamente $x$ elementos com a característica A.

# Distribuição Hipergeométrica

- Note que $n < r$ ou $n \geq r$ e $n < N - r$ ou $n \geq N - r$.
- Modelo Geral (princípios multiplicativo e aditivo da contagem, num espaço amostral equiprobabilístico):

$$P(X = x) = \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}} \mathbb{1}_{\{max\{0,n-(N-r)\},min\{r,n\}\}}(x).$$

- $X$ registra o número de elementos dentre os $n$ sorteados, que possuem a característica A.
- Notação: $X \sim \text{HG}(N, n, r)$ ou $X \sim \text{hipergeométrica}(N, n, r)$.

# Distribuição Hipergeométrica

- Notação: $X \sim hip(N, n, r)$ ou $H \sim \text{hipergeométrica}(N, n, r)$.
- $X$ tem distribuição Hipergeométrica com parâmetros $N, n, r$, então:
  - $E(X) = \frac{nr}{N}$.
  - $Var(X) = \frac{nr}{N}\left(1 - \frac{r}{N}\right)\frac{(N-n)}{(N-1)}$.
  - Pesquisar sobre como calcular a média e a variância e sobre como provar que $f_X(.)$ é uma legítima fdp.
  - Escrever a fda e a fds de $X$.
- Um resultado importante é:

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k}.$$

# Distribuição Hipergeométrica

- Uma outra identidade útil é dada por:

$$\binom{N}{n} = \frac{N}{n}\binom{N-1}{n-1}.$$

- Além disso, é possível provar que: (em que $Y \sim HG(N-1, n-1, r-1)$):

$$\mathcal{E}(X^k) = \frac{nr}{N}\mathcal{E}((Y+1)^{k-1}).$$

- Obs: sem perda de generalidade, na demonstrações dos resultados, pode-se utilizar o conjunto $A = \{0, 1, 2..., n\}$ como suporte de $X$.

# Distribuição Hipergeométrica

- Aplicação: Controle da Qualidade- Suponha um lote com $N = 100$ elementos a ser analisado. São escolhidas $n = 5$ peças sem reposição. Sabendo que neste lote de 100 elementos, $r = 10$ são defeituosos, a probabilidade de não se obter nenhuma peça defeituosa na amostra retirada é:

$$P(X = 0) = \frac{\binom{10}{0}\binom{100-10}{5-0}}{\binom{100}{5}} = \frac{\binom{90}{5}}{\binom{100}{5}} \approx 0,584.$$

# Distribuição Hipergeométrica

- A probabilidade de se obter pelo menos uma peça defeituosa é:

$$\sum_{i=1}^{5} P(X = i) = 1 - P(X = 0) \approx 0,426.$$

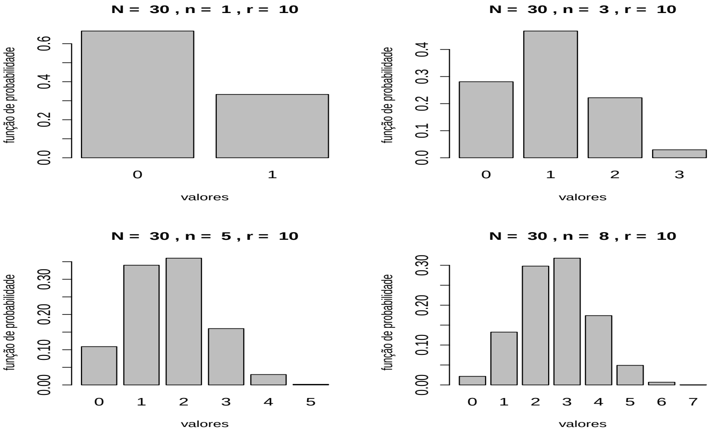
- $E(X) = \frac{nr}{N} = \frac{5 \times 10}{100} = 0,5.$
- $Var(X) = \frac{nr}{N}\left(1 - \frac{r}{N}\right)\frac{(N-n)}{(N-1)} = \frac{5 \times 10}{100}\left(1 - \frac{10}{100}\right)\frac{(100-10)}{(100-1)} \approx$ $0,409.$

# Simulação de uma variável hipergeométrica

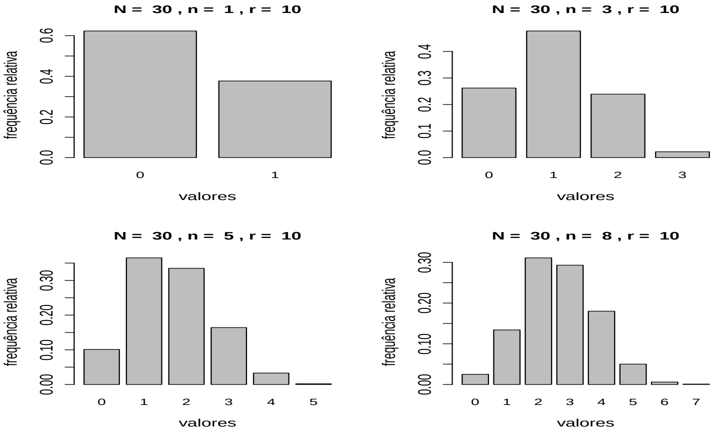
- Algoritmo:
  1. O algoritmo usado pelo programa R encontra-se aqui.
- No programa R (n é o tamanho da amostra a ser simulada)

```
rhyper(n, r, N-r, n)
```

# fdp: Hipergeométrica



# valores simulados: Hipergeométrica



# fdp (azul) e valores simulados (vermelho): Hipergeométrica