Variáveis aleatórias: Introdução e variáveis aleatórias discretas (parte 2)

Notas de Aula da Professora Verónica González-López, digitadas por Beatriz Cuyabano, Pós-Graduação IMECC/UNICAMP, com modificações do Prof. Caio Azevedo

Momentos

- Os momentos são quantidades que auxiliam a caracterizar o comportamento de variáveis aleatórias e de suas respectivas distribuições de probabilidade.
- Seja X uma va qualquer. Há, de uma forma geral, dois tipos de momentos:
  - Momentos centrados a origem: $\mathcal{E}\left(X^r\right), r \in \mathcal{R}$.
  - Momentos centrados no valor esperado: $\mathcal{E}\left[(X - \mathcal{E}(X))^r\right], r \in \mathcal{R}$.

Momentos

- Assim, $\mathcal{E}\left(X^r\right)$ e $\mathcal{E}\left[(X - \mathcal{E}(X))^r\right]$ são, respectivamente, os r-ésimos momentos centrados na origem e no valor esperado.
- Vamos nos concentrar, inicialmente, em vad's.
- Adicionalmente ao conceito de momentos, veremos outros dois, que são as medidas de posição e de dispersão.
- Essencialmente, as medidas de posição indicam em torno de qual(is) valor(es), a distribuição da va se concentra.
- Essencialmente, as medidas de dispersão indicam o grau de dispersão dos valores da va em torno de alguma(s) medidas de posição.

Valor esperado para Variáveis Aleatórias Discretas

- Seja X uma vad com suporte em A, então

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}\left(X^r\right) &= \sum_{i\geq 1} x_i^r p_i = \sum_{x\in A} x^r f_X(x) = \sum_{x\in A} x^r P(X=x) \\
\mathcal{E}\left[(X-\mathcal{E}(X))^r\right] &= \sum_{i\geq 1} (x_i-\mu)^r p_i = \sum_{x\in A} (x-\mu)^r f_X(x) \\
&= \sum_{x\in A} (x-\mu)^r P(X=x)
\end{aligned}
$$

- Em que $\mu = \mathcal{E}(X)$. Para que $\mathcal{E}\left(X^r\right)$ e $\mathcal{E}\left[(X-\mathcal{E}(X))^r\right]$ $\exists$, as somas (ou as séries) devem convergir. Neste caso, notações usuais para indicar existência são

Valor esperado para Variáveis Aleatórias Discretas

- A média, valor esperado ou esperança de uma variável aleatória discreta X, é dado por:

$$\mu_X = \mathcal{E}\left(X\right) = \sum_{i \geq 1} x_i p_i = \sum_{x \in A} x f_X(x) = \sum_{x \in A} x P(X = x).$$

- Note que μ_X é uma espécie de média ponderada dos valores do suporte de X.
- Seja $Y = g(X)$ uma vad com fdp $f_Y(.)$ com suporte em B, então (por definição):

$$\mathcal{E}(Y) = \sum_{y \in B} y f_Y(y) = \sum_{x \in A} g(x) f_X(x).$$

- A média também é uma medida de posição.

Valor esperado para Variáveis Aleatórias Discretas

- Principais propriedades. Sejam X uma va qualquer, $a, a_1, a_2 \in \mathcal{R}$, constantes e $g_i(.), i = 1, 2$ funções convenientes, e suponha que $|\mathcal{E}(X)| < \infty, |\mathcal{E}(g_i(X))| < \infty, i = 1, 2$. Então:
  - $\mathcal{E}(a) = a$.
  - $\mathcal{E}(X + a) = a + \mathcal{E}(X)$.
  - $\mathcal{E}(aX) = a\mathcal{E}(X)$.
  - $\mathcal{E}(aX + a_1) = a\mathcal{E}(X) + a_1$.
  - $\mathcal{E}(a_1 g_1(X) + a_2 g_2(X)) = a_1\mathcal{E}(g_1(X)) + a_2\mathcal{E}(g_2(X))$.
- Demonstrações: exercício.
- Obs: a média não precisa pertencer ao suporte de X.

Medidas de Posição para Variáveis Aleatórias Discretas

- A mediana (Md) é o valor (médio) que satisfaz :

$$P\left(X \geq Md\right) \geq \frac{1}{2} \text{ e } P\left(X \leq Md\right) \geq \frac{1}{2}.$$

- A mediana é o valor que divide a distribuição em duas partes, as quais contêm (aproximadamente) 50% dos valores do suporte de X.
- Suponha que $Md_X = Md(X)$ seja a mediana de X e $Y = aX + b$, em que a, b são constantes reais. Então

$$Md_Y = aMd_X + b.$$

- Obs: a mediana não precisa pertencer ao suporte de X.

Medidas de Posição para Variáveis Aleatórias Discretas

- A moda (Mo) é o valor da variável X que tem maior probabilidade de ocorrência:

$$P\,(X = Mo) = max\{p_1, p_2, ...\}.$$

- Suponha que $Mo_X = Mo(X)$ seja a moda de X e $Y = aX + b$, em que a, b são constantes reais. Então

$$Mo_Y = aMo_X + b.$$

- Obs: pode haver mais de uma moda.

Medidas de Posição para Variáveis Aleatórias Discretas

- Exemplo:

X	-5	10	15	20
p_i	0,3	0,2	0,4	0,1

- $\mu_X = (-5) \times 0,3 + 10 \times 0,2 + 15 \times 0,4 + 20 \times 0,1 = 8,5.$
- $Mo(X) = 15.$
- $P(X \leq 10) = P(X \geq 15) = 0,5$, então a mediana $Md(X) = \dfrac{10+15}{2} = 12,5.$
- Obs: note que nem a média (8,5) nem a mediana (12,5) são valores assumidos pela variável X.

Graficamente

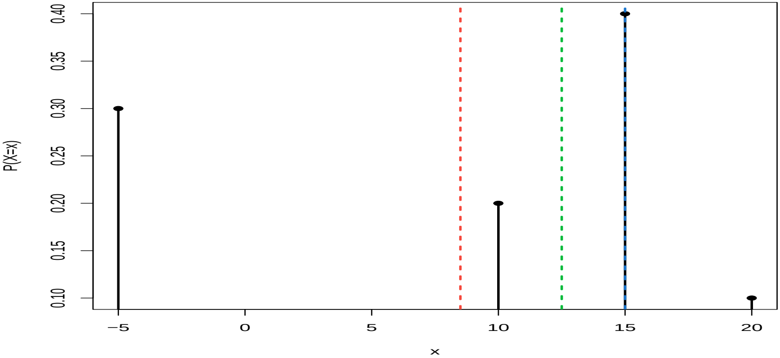

Figura: Preto: probabilidades, vermelho: média, verde: mediana, vermelho: moda.

Medidas de Posição para Variáveis Aleatórias Discretas

- Exemplo:

X	2	5	8	15	20
p_i	0,1	0,3	0,2	0,2	0,2

  - $\mu_X = 10,3$.
  - $Mo(X) = 5$.
  - $Md(X) = 8$.

Graficamente

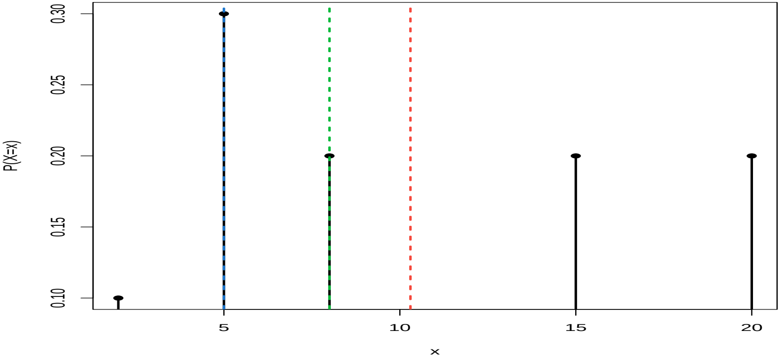

Figura: Preto: probabilidades, vermelho: média, verde: mediana, vermelho: moda.

Medidas de Posição para Variáveis Aleatórias Discretas

- Exemplo: Seja $Y = 5X - 10$ (slide anterior)

Y	0	15	30	65	90
p_i	0,1	0,3	0,2	0,2	0,2

  - $\mu_Y = 41,5$.
  - $Mo(Y) = 15$.
  - $Md(Y) = 30$.
  - Note que, como $Y = 5X - 10$:

    $\mu_Y = 5\mu_X - 10$.

    $Mo(Y) = 5Mo(X) - 10$.

    $Md(Y) = 5Md(X) - 10$.

Graficamente

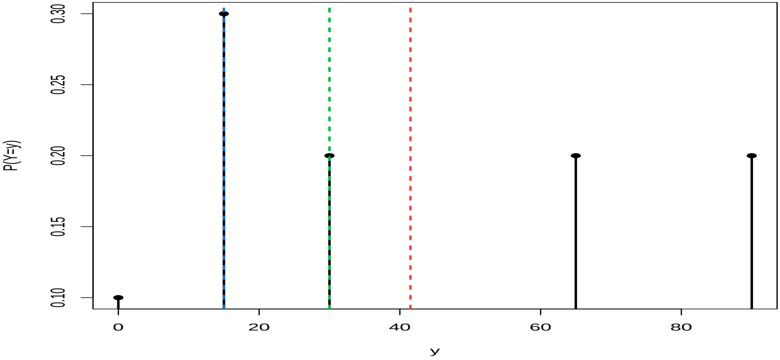

Figura: Preto: probabilidades, vermelho: média, verde: mediana, vermelho: moda.

Medidas de Dispersão para Variáveis Aleatórias Discretas

- Muitas medidas de dispersão estão associadas à momentos centrados na média (esperança).
- A variância, de uma variável aleatória discreta X, com média $\mu_X, (|\mu_X| < \infty)$, é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(X) = \sigma_X^2 &= \mathcal{E}\left[(X - \mu_X)^2\right] = \sum_{i \geq 1} (x_i - \mu_X)^2 \, p_i \\ &= \sum_{x \in A} (x - \mu_X)^2 \, f_X(x) = \sum_{x \in A} (x - \mu_X)^2 \, P(X = x). \end{aligned} \tag{1}$$

- Note que σ_X^2 é uma espécie de média ponderada dos desvios quadráticos dos valores do suporte de X, em relação à sua respectiva média.

Medidas de Dispersão para Variáveis Aleatórias Discretas

- Proposição: A variância de uma variáveis aleatória qualquer (com média finita), pode ser calculada como

$$\mathcal{V}(X) = \mathcal{E}(X^2) - \mathcal{E}^2(X) = \mathcal{E}(X^2) - \mu_X^2.$$

- Prova: Da Equação (1), temos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(X) &= \mathcal{E}(X^2 - 2X\mu_X + \mu_X^2) = \mathcal{E}(X^2) - 2\mu_X\mathcal{E}(X) + \mu_X^2 \\ &= \mathcal{E}(X^2) - 2\mu_X^2 + \mu_x^2 = \mathcal{E}(X^2) - \mu_X^2. \end{aligned}$$

■

Valor esperado para Variáveis Aleatórias Discretas

- Principais propriedades. Sejam X uma va qualquer e $a, b \in \mathcal{R}$ constantes, e suponha que $|\mathcal{E}(X)| < \infty, \mathcal{V}(X) < \infty, i = 1, 2$. Então:
  - $\mathcal{V}(X) \geq 0$.
  - $\mathcal{V}(bX + a) = b^2\mathcal{V}(X)$.
- Demonstrações: exercício.
- Uma vez que a unidade de medida da variância é o quadrado da unidade medida da va X, uma forma de medir a variabilidade de uma va na mesma escala dos dados é o uso do desvio padrão:

$$\mathcal{DP}(X) = +\sqrt{\mathcal{V}(X)}$$

Valor esperado para Variáveis Aleatórias Discretas

- Quanto maior/menor for a variância (desvio-padrão), maior/menor será a (o grau de) heterogeneidade da respectiva va.
- Mesmo com essa "melhora" o desvio-padrão pode não medir adequadamente a heterogeneidade de uma conjunto de dados.
- Uma alternativa, desde que $\mu_x \neq 0$ é obter o coeficiente de variação, dado por:

$$\mathcal{CV}(X) = \frac{\mathcal{DP}(X)}{\mathcal{E}(X)}$$

- Usualmente se considera $|\mathcal{CV}(X)| \times 100$.

Medidas de Dispersão para Variáveis Aleatórias Discretas

- Exemplo:

X	2	5	8	15	20
p_i	0,1	0,3	0,2	0,2	0,2

- $\mu_X = 2 \times 0,1 + 5 \times 0,3 + 8 \times 0,2 + 15 \times 0,2 + 20 \times 0,2 = 10,3$
- $\sigma_X^2 = 145,70 - 10,3^2 = 39,61,$

$$\mathcal{E}(X^2) = 2^2 \times 0,1 + 5^2 \times 0,3 + 8^2 \times 0,2 + 15^2 \times 0,2 + 20^2 \times 0,2 = 145,70$$

- $\sigma_X = 6,30 = \sqrt{39,61}.$
- $\mathcal{CV}(X) \times 100 = \dfrac{6,30}{10,3} \times 100 = 61,17.$

Medidas de Dispersão para Variáveis Aleatórias Discretas

- Exemplo:

X	1	2	3
p_i	$1/3$	$1/3$	$1/3$

Y	101	102	103
p_i	$1/3$	$1/3$	$1/3$

  - $\mu_X = 2$.
  - $\mu_Y = 102$.
  - $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = 0,67$.
  - $\sigma_X = \sigma_Y = 0,82$.
  - $\mathcal{CV}(X) \times 100 = 40,82$, $\mathcal{CV}(Y) \times 100 = 0,80$.

Outras medidas que dependem de momentos

- Seja X uma va (qualquer) de sorte que $|\mathcal{E}\left[(X-\mu_x)^3\right]| < \infty, \sigma^2 < \infty$, o coeficiente de assimetria é dado por:

$$\gamma_X = \mathcal{CA}(X) = \frac{\mathcal{E}\left[(X-\mu_x)^3\right]}{(\sigma^2)^{3/2}}.$$

- Seja X uma va (qualquer) de sorte que $|\mathcal{E}\left[(X-\mu_x)^4\right]| < \infty, \sigma^2 < \infty$, o coeficiente de curtose é dado por:

$$\alpha_X = \mathcal{CC}(X) = \frac{\mathcal{E}\left[(X-\mu_x)^4\right]}{(\sigma^2)^2}.$$

Outras medidas que dependem de momentos

- Quanto mais negativo/próximo de zero/positivo for γ_X mais concentrada à esquerda/ao redor da média/À direita, é a distribuição de probabilidade de X
- Quanto menor do que três/próximo de três/maior do que três for α_X menor/mais próximo da distribuição Normal/maior serão as probabilidades de ocorrência dos valores próximos aos limites (inferior e superior) do suporte de X.
- Veremos, posteriormente, a distribuição Normal.
- Não nos estenderemos mais sobre essas duas medidas. Maiores detalhes, ver as referências.