Variáveis aleatórias contínuas (parte 1)

Notas de Aula da Professora Verónica González-López, digitadas por Beatriz Cuyabano, Pós-Graduação IMECC/UNICAMP, com modificações do Prof. Caio Azevedo

Introdução

- Variáveis aleatórias contínuas: vamos considerar agora, quantidades (variáveis) associadas à espaços amostrais contínuos (aqui).
- Neste caso, torna-se inviável usar tabelas e/ou frequências relativas para representar as probabilidades de interesse.
- Isto ocorre, em parte, porque só há interesse em eventos em forma de intervalo ao invés de eventuais pontuais. Por exemplo:
  - tempo de duração de uma chamada telefônica.
  - tempo de vida de uma lâmpada.
  - altura das pessoas.

Introdução

- Em casos assim, as variáveis aleatórias de interesse, em geral, são variáveis aleatórias contínuas (vac ou v.a.c.).
- A definição mais "simples" de uma vac é dizer que é uma va cujo suporte (imagem) é um conjunto infinito não enumerável.
- Uma forma mais "rigorosa", é dizer que além do quesito anterior, à uma dada vac é possível associar o que se chama de densidade, ou função densidade de probabilidade.
- Alguns conceitos vistos anteriormente, são gerais (valem tanto para variáveis aleatórias discretas quanto contínuas) mas, alguns deles valem apenas para uma delas ou, ao menos, tem algumas diferenças.

Variáveis Aleatórias Contínuas

- Definição: a função de densidade de probabilidade de uma v.a. X é uma função f_X tal que:
  - $f_X(x) \geq 0 \quad \forall \ x \in \mathcal{R}$.
  - $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$ (f é integrável).
- Toda v.a. X para a qual seja possível associar uma f.d.p. será chamada de v.a. contínua.
- Note que o suporte de uma vac é um conjunto infinito não enumerável.

Variáveis Aleatórias Contínuas

- A probabilidade de que uma v.a. X contínua pertença a um intervalo da reta (a,b], (a,b), [a,b], [a,b), $-\infty \leq a < b \leq \infty$ é dada por:

$$P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b)$$

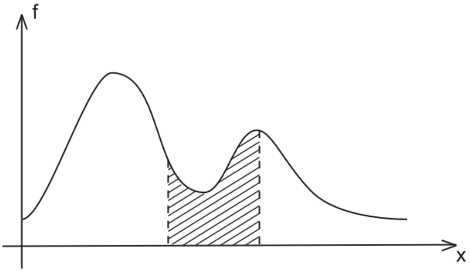
$$= \int_a^b f(x)dx.$$

- Logo (no caso contínuo)

$$P(X = a) = \int_a^a f_X(x)dx = 0 \neq f_x(a).$$

Variáveis Aleatórias Contínuas

- Graficamente, as probabilidades anteriores podem ser representadas por:



Variáveis Aleatórias Contínuas

- Notação: se X for uma v.a. contínua com função de densidade de probabilidade (ou simplesmente densidade) f, no lugar de f denotaremos f_X
- A probabilidade de que uma v.a. X contínua pertença ao intervalo da reta $(-\infty, x]$ (ou $(-\infty, x)$), nada mais é que a fda calculada no ponto x, ou seja:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = P(X \leq x) = P(X < x).$$

Variáveis Aleatórias Contínuas

- Consequentemente, temos que a fds é dada por:

$$S_X(x) = \int_x^{\infty} f(u)du = P(X > x) = P(X \geq x).$$

- Note, além disso, que:

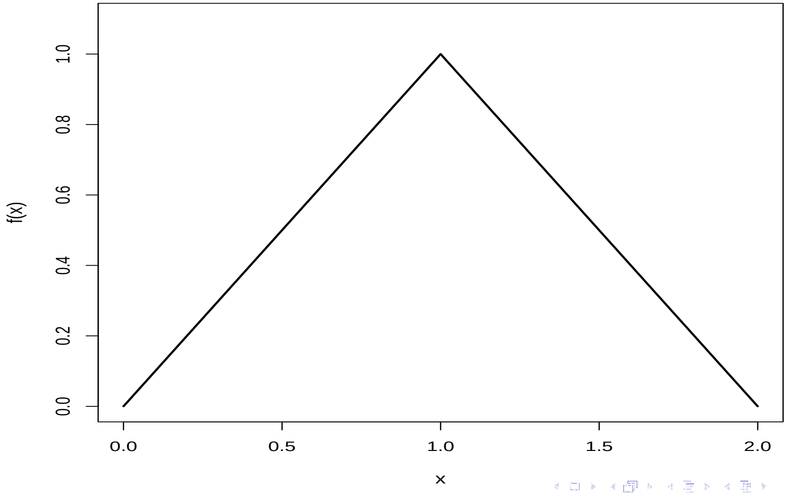
$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{d}{dx} F_X(x) = F_x'(x), \\ f_X(x) &= -\frac{d}{dx} S_X(x) = -S_x'(x). \end{aligned}$$

Variáveis Aleatórias Contínuas

- Exemplo: X v.a. contínua com f.d.p.:

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \\
&= f_X(x) = x\mathbb{1}_{[0,1)}(x) + (2 - x)\mathbb{1}_{[1,2]}(x).
\end{aligned}
$$

Gráfico da fdp anterior



Variáveis Aleatórias Contínuas

- Note que:
  - $f(x) \geq 0, \ x \in \mathcal{R}$. Com efeito,
    1. Se $x \in [0,1) \rightarrow f_X(x) \in [0,1) \geq 0$
    2. Se $x \in [1,2] \rightarrow f_X(x) \in [0,1] \geq 0$
    3. Caso contrário, $f_x(x) = 0$.
  - Além disso

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x)dx &= \int_0^1 xdx + \int_1^2 (2-x)dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 + \left.\left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\right|_1^2 = \\ &= \frac{1}{2} + 2 - \frac{3}{2} = 1. \end{aligned}$$

- Logo $f_X(.)$ é uma legítima fdp.

Variáveis Aleatórias Contínuas

- Definição: seja X uma v.a. contínua com densidade f_X, dizemos que X possui esperança finita se:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) dx < \infty.$$

- Nesse caso, definimos:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx.$$

Variáveis Aleatórias Contínuas

- Definição: seja X uma v.a. contínua com densidade f_X.
  - Se $E(|X|^k) < \infty$, $k \in \mathcal{R}$, definimos por **momento centrado na origem** de ordem k da v.a. o valor $E(X^k)$, ou seja

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_X(x)dx.$$

  - Se $E(|X-\mu|^k) < \infty$, $k \in \mathcal{R}$, definimos por **momento centrado na média** de ordem k da v.a. o valor $E(X^k)$, ou seja

$$E\left[(X-\mu)^k\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^k f_X(x)dx.$$

Variáveis Aleatórias Contínuas

- A condição de existência dos momentos, ou seja:

$$\begin{cases} \mathcal{E}(X^k) \ \exists \text{ se } \mathcal{E}(|X|^k) < \infty, \\ \mathcal{E}[(X-\mu)^k] \ \exists \text{ se } \mathcal{E}(|X-\mu|^k) < \infty, \end{cases}$$

  vale tanto para variáveis discretas como contínuas.

- Lembrando: seja X v.a. com valor esperado μ e $E(X^2) < \infty$, então:

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= \mathcal{V}(X) = \mathcal{E}\left[(X-\mu)^2\right] = E(X^2) - \mu^2, \\ \sigma_X &= \mathcal{DP}(X) = \sqrt{Var(X)}. \end{aligned}$$

Variáveis Aleatórias Contínuas

- Voltando ao Exemplo:

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \\
&= f_X(x) = x\mathbb{1}_{[0,1)}(x) + (2 - x)\mathbb{1}_{[1,2]}(x).
\end{aligned}
$$

Variáveis Aleatórias Contínuas

- Assim,

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 x(2-x)dx \\
&= \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 + \left.\left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\right|_1^2 = \frac{1}{3} + 3 - \frac{7}{3} = 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx = \int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 x^2(2-x)dx \\
&= \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 + \left.\left(\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\right|_1^2 = \frac{1}{4} + \frac{14}{3} - \frac{15}{4} = \frac{14}{12} = \frac{7}{6}
\end{aligned}$$

Variáveis Aleatórias Contínuas

- Logo

$$\mathcal{V}(X) = \mathcal{E}(X^2) - \mathcal{E}^2(X) = \frac{7-6}{6} = \frac{1}{6}$$

- Dica: em casos assim, é mais fácil achar a fórmula geral para $\mathcal{E}(X^k)$, $k \geq 1$. Com efeito

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(X^k) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_x(x)dx = \int_0^1 x^{k+1}dx + \int_1^2 x^k(2-x)dx \\
&= \left.\frac{x^{k+2}}{k+2}\right|_0^1 + \left.\left(\frac{2x^{k+1}}{k+1} - \frac{x^{k+2}}{k+2}\right)\right|_1^2 \\
&= \frac{2(2^{k+1}-1)}{(k+1)(k+2)}.
\end{aligned}$$

Variáveis Aleatórias Contínuas

- Para a $F_x(.)$, vamos nos concentrar em $x \in [0, 2]$. Com efeito, se $x \in [0, 1)$, temos que:

$$F_X(x) = \int_0^x f_X(u)du = \int_0^x udu = \left.\frac{u^2}{2}\right|_0^x = \frac{x^2}{2}.$$

Variáveis Aleatórias Contínuas

- Se $x \in [1, 2]$, temos que:

$$
\begin{aligned}
F_X(x) &= \int_0^x f_X(u)du = \int_0^1 udu + \int_1^x (2-u)du \\
&= \left.\frac{u^2}{2}\right|_0^1 + \left.\left(2u - \frac{u^2}{2}\right)\right|_1^x = \frac{1}{2} + 2(x-1) - \frac{x^2-1}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left[x(4-x) - 2\right].
\end{aligned}
$$

Variáveis Aleatórias Contínuas

- Logo:

$$F_X(x) = \frac{x^2}{2}\mathbb{1}_{[0,1)}(x) + \frac{1}{2}\left[x(4-x)-2\right]\mathbb{1}_{[1,2]}(x) + \mathbb{1}_{(2,\infty)}(x).$$

- Consequentemente, temos que:

$$S_X(x) = I_{(-\infty,0)}(x) + \left(\frac{2-x}{2}\right)\mathbb{1}_{[0,1)}(x) + \frac{1}{2}\left[4-x(4-x)\right]\mathbb{1}_{[1,2]}(x).$$

- Note que:

$$P(X<1) = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left[1\times(4-1)-2\right] = \frac{1}{2} = P(X\leq 1).$$

Quantis

- Seja X uma vac com fda $F_X(.)$ (estritamente crescente), o q-ésimo quantil de X, denotado por x_q é dado por:

$$F(x_q) = q \rightarrow x_q = F^{-1}(q).$$

- Por exemplo, a $Md(X)$ é dada por:

$$x_{1/2} = F^{-1}(1/2).$$

- No exemplo anterior, temos que:

$$F_X(x_{1/2}) = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{x_{1/2}^2}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow x_{1/2} = 1.$$

Moda de uma vac

- A moda de uma vac X (Mo(X)) é o valor que maximiza sua densidade $f_X(.)$.
- Se for possível, podemos maximizar a f_X conforme visto nos cursos de Cálculo, ou seja, derivar a função, encontrar a(s) raiz(es) e verificar qual(is) delas é (são) ponto de máximo.
- Pode haver uma ou mais modas ou mesmo, ela pode não existir.
- No caso da densidade em questão, graficamente determinamos, graficamente, que $Mo(X) = 1$