Introdução ao Cálculo de Probabilidades

Prof. Caio Azevedo

Introdução

- Vimos aqui alguns conceitos básicos e questões de interesse, inclusive sobre incerteza e aleatoriedade.
- A probabilidade é uma quantidade (modelo/construto) que pode ser utilizada para se medir a incerteza sobre certos eventos ou características de interesse.
- Tais eventos, em geral, estão associados a experimentos aleatórios.
- Um **experimento aleatório** (link) é um experimento para o qual não se tem certeza sobre seus resultados, a priori.

Introdução

- A probabilidade é útil, também, quando existem incertezas associadas à certos processos e/ou fenômenos de interesse.
- Por exemplo, a obtenção de informações (evidências) através de planejamentos experimentais e/ou amostrais, geralmente, está vinculada à incerteza.
- Mesmo dentro da estrutura "Kolmogoroviana", existem várias formas de se propor modelos probabilísticos.
- Neste curso, "experimento aleatório" (E) pode representar qualquer situação de interesse prático, onde existe algum tipo de incerteza associada.

Preliminares

- Distribuição de Frequências
  - Apresenta as frequências de cada valor ou de cada conjunto de valores relativos a um experimento aleatório.
  - As frequências podem ser absolutas (contagem) ou relativas (percentagem).
  - Uma das formas de construir modelos probabilísticos é estudar o comportamento das frequências relativas.

Exemplo

- Deseja-se estudar as probabilidades de ocorrência das faces de um dado.
  - Experimento aleatório: lançar o dado um certo número n de vezes e contabilizar, o número (n_i) de vezes que a face $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ocorre.
  - Frequência relativa: $f_i = \dfrac{n_i}{n}$ é a distribuição empírica das probabilidades.
  - Ao repetir esse experimento, diversas vezes, muito possivelmente, as distribuição de frequência terá resultados diferentes.
  - No entanto, espera-se que esses resultados, apesar de distintos, sejam semelhantes.

(Cont.) Exemplo

- Se não soubermos nada a respeito do dado, a observação das frequências relativas, pode nos dar indicações das probabilidades de ocorrência.
- No entanto, considere as seguintes suposições:
  - Só podem ocorrer 6 faces (1,2,3,4,5,6).
  - O dado é perfeitamente equilibrado.
  - Então, cada face deve ocorrer o mesmo número de vezes, ou seja $f_i \approx \frac{1}{6}$.

(Cont.) Exemplo

- Se as suposições forem válidas, espera-se que as probabilidades se distribuam (distribuição de probabilidades) da seguinte forma:

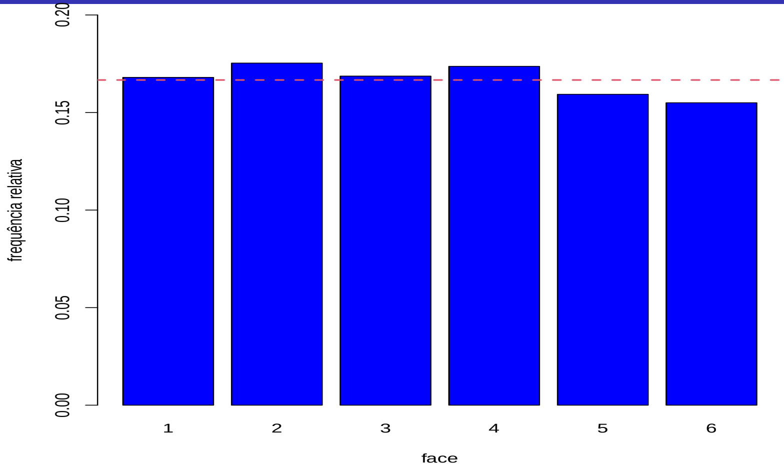
Face	1	2	3	4	5	6	Total
Probabilidade (esperada)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

- Espaço amostral (Ω): conjunto de todos os resultados possíveis relativos à um experimento aleatório.
- Se lançássemos o dado somente uma vez, teríamos: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- No caso se n lançamentos, temos que $\Omega = A^n$, em que $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

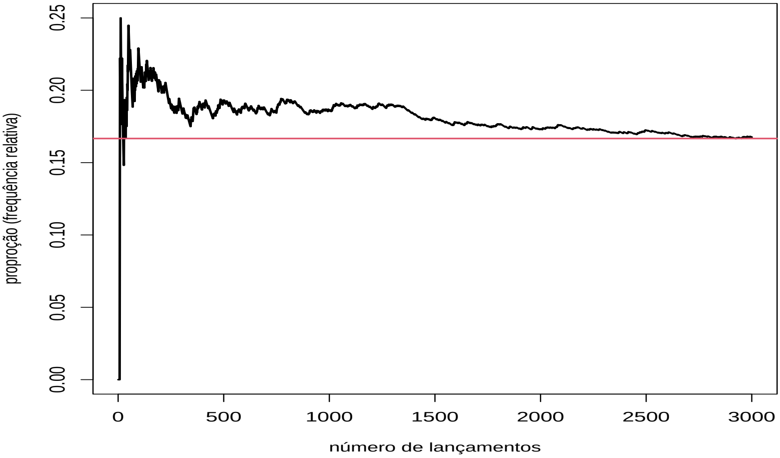
(Cont.) Exemplo

- Em relação ao Exemplo em questão, simulamos n=3.000 lançamentos (usando o programa R, arquivo "aula_Intro_Calc_Prob_Prob_I_1S_2024'.r').
- No slide seguinte temos as distribuições de frequências das faces observadas.
- No slide posterior à esse, temos a frequência relativa associada à face 5, em função do número de lançamentos.
- Percebemos uma "convergência" para o valor $1/6$, de todas as frequências relativas, como esperado.

Distribuição de Frequências das faces observadas



Frequência relativa da face 5 ao longo dos lançamentos



Breve revisão (ingênua) de Teoria dos Conjuntos

- Definição: Entendemos um conjunto como sendo uma coleção bem definida de objetos distintos. Por bem definido queremos dizer que dado um objeto, somos capazes de concluir se este objeto está ou não a um dado conjunto.
- Conjuntos serão denotados por letras maiúsculas $(A, B, C, \ldots)$.
- Objetos (elementos, pontos etc) dos conjuntos, serão denotados por letras minúsculas $(a, b, c \ldots)$.

Breve revisão (ingênua) de Teoria dos Conjuntos

- (Alguns) Conjuntos "especiais":
  - Números naturais: $\mathcal{N}$.
  - Números inteiros: $\mathcal{Z}$.
  - Números reais: $\mathcal{R}$.
  - Números complexos: $\mathcal{C}$.
  - Espaço amostral: Ω.
  - Conjunto vazio: $\emptyset \equiv \{\}$.

Breve revisão (ingênua) de Teoria dos Conjuntos

- Existem várias formas de descrever um conjunto (ou seja, indicar quem são seus elementos):
  - A: é o conjunto de todos os alunos da Unicamp, regularmente matriculados, em 05 de Março de 2024.
  - $B = \{t \in \mathcal{R} : t > 0\}$.
  - $\Omega = \{i \in \mathcal{N} : 1 \leq i \leq 6\}$.
  - $C = \{i \in \mathcal{R} : 1 \leq i \leq 6\}$.
- No que os conjuntos Ω e C são diferentes ($\Omega \neq C$).
- Dizemos que para um dado conjunto A, se a é um objeto desse conjunto, dizemos que a pertence à A, ($a \in A$), caso contrário, a não pertence à A ($a \notin A$).

Breve revisão (ingênua) de Teoria dos Conjuntos

- Dizemos que B é um subconjunto de A ou B está contido em A, se todo elemento de B é também um elemento de A, isto é,

$$\forall b \in B \to b \in A$$

  e denotaremos $B \subset A$.

- Conjuntos são determinados pelos seus elementos, ou seja, se A e B são dois conjuntos tais que

$$(a \in A \leftrightarrow a \in B) \leftrightarrow (A = B)$$

- Ou seja, $A = B \leftrightarrow A \subset B$ e $B \subset A$.

Breve revisão (ingênua) de Teoria dos Conjuntos

- O símbolo $\subset$ é utilizado para indicar que um conjunto A está contido em um conjunto B, mas A não pode ser igual a B.
- Já o símbolo $\subseteq$ é utilizado para indicar que um conjunto A está contido em um conjunto B, incluindo a possibilidade de A ser igual a B.

Breve revisão (ingênua) de Teoria dos Conjuntos

- Neste curso os conjuntos considerados serão sempre subconjuntos de um conjunto fixo, digamos (Ω) (via de regra será o espaço amostral).
- Tal conjunto também é chamado de conjunto universo.
- De uma forma geral, os conjuntos terão seus elementos especificados através de alguma propriedade.
- Ou seja, o conjunto A é formado por todos os elementos de Ω que satisfazem a propriedade P ou seja:

$$\{\omega \in \Omega : \omega \text{ satisfaz } P\} = \{\omega \in \Omega : P(\omega)\}$$

Breve revisão (ingênua) de Teoria dos Conjuntos

- O número de elementos de um conjunto A é chamado cardinalidade de A e denotado por $\#A$.
- Note que $0 \leq \#A \leq \infty$.
- Ou seja, um conjunto pode, em termos de sua cardinalidade, ser finito $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, infinito enumerável $B = \mathcal{Z}$ ou infinito não-enumerável $C = \mathcal{R}$.
- Conjunto infinito:
  - Enumerável: é possível estabelecer uma correspondência um a um com o conjunto $\mathcal{N}$.
  - Não-enumerável: não é possível estabelecer uma correspondência um a um com o conjunto $\mathcal{N}$.

Breve revisão (ingênua) de Teoria dos Conjuntos

- Os três operadores básicos são o complementar, a união e a intersecção. Sejam A e B subconjuntos de Ω ($A, B \subset \Omega$).
  - O complemento de A (com relação a Ω) é o conjunto $A^c = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A]$.
  - A união de A e B é dada por $A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ ou } \omega \in B]$ ("ou": pertence a pelo menos um).
  - A intersecção de A e B é dada por $A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ e } \omega \in B]$ (pertence simultaneamente).
- Dizemos que A e B são disjuntos se $A \cap B = \emptyset$, isto é, A e B não têm elementos comuns.

Breve revisão (ingênua) de Teoria dos Conjuntos

- Sejam A, B e C subconjuntos de Ω. As seguintes propriedades podem ser verificadas (exercício):
  - P1. Lei comutativa: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$.
  - P2. Lei associativa:

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C) \\ (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C)\end{aligned}$$

  - P3. Lei distributiva:

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cap C &= (A \cap C) \cup (B \cap C) \\ (A \cap B) \cup C &= (A \cup C) \cap (B \cup C)\end{aligned}$$

  - P4. Lei de De Morgan: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c; (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Breve revisão (ingênua) de Teoria dos Conjuntos

- Sejam $A_k \subset \Omega, k = 1, 2, ..., n$ uma sequência finita de conjuntos, então:
  - $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n$.
  - $\bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_n$.
  - $\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)^c = \bigcap_{k=1}^{n} A_k^c$, $\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)^c = \bigcup_{k=1}^{n} A_k^c$.
- Sejam $A_k \subset \Omega, k = 1, 2, ...,$ uma sequência infinita de conjuntos, então:
  - $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$.
  - $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cap A_2 \cap \ldots$.
  - $\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)^c = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k^c$, $\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right)^c = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^c$.

Breve revisão (ingênua) de Teoria dos Conjuntos

- Outras propriedades e resultados podem ser encontrados nas listas de exercícios e na literatura.
- Em Probabilidade II os conceitos de limite de sequências de conjuntos serão vistos (com mais detalhes). São conceitos de fundamental importância para o aprofundamento no mundo da Probabilidade.
- Dois limites de grande importância (pesquisar a respeito):

$$\bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n} A_k \text{ (limite inferior)}$$

$$\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k \text{ (limite superior)}$$

Introdução à (medida de) Probabilidade

- Vamos considerar, inicialmente, alguns experimentos aleatórios (E), que geram espaços amostrais finitos ou infinitos enumeráveis
  - Espaço Amostral (Ω): (relembrando) todos os resultados possíveis relativos a um experimento (aleatório):
    - Finito: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$
    - Infinito enumerável: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ...\}$
  - Em geral, é de interesse atribuir probabilidades para cada evento pontual (atômico, $\omega_i, i = 1, 2, ...$).
  - Probabilidade (notação): $P(\omega_i), i = 1, 2, ...(n), ...$, para cada "ponto amostral" ω_i.

Exemplo

- E: Lança-se uma moeda duas vezes.
  - Notação: C = cara, X = coroa.
  - Espaço amostral: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$

$$\omega_1 = (C, C); \omega_2 = (C, X); \omega_3 = (X, C); \omega_4 = (X, X)$$

  - Considerando que a moeda é honesta: $P(\omega_i) = \dfrac{1}{4}$, $\forall\ i = 1, 2, 3, 4.$
  - Seja o evento $A = \{\omega_1, \omega_4\}$: obter duas faces iguais

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\{\omega_1\} \cup \{\omega_4\}) = P(\{\omega_1, \omega_4\}) = P(\omega_1) + P(\omega_4) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

  - Note que a aditividade acima é intuitiva mas, em princípio, não sabemos se é válida.

Cont.

- Como pode-se observar, através das probabilidades pontuais, é possível calcular a probabilidade de ocorrência de eventos (como o evento A exemplificado) que incluem a ocorrência de vários pontos amostrais (desde que a aditividade seja válida).
- Retomando o exemplo do dado:
  - $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ em que $\omega_i =$ face i, $\forall\ i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$
  - $P(\omega_i) = \dfrac{1}{6}$.
  - Seja o evento $A = \{\text{a face é um número par}\} = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\} = \{2, 4, 6\}$ $P(A) = P(\{2\}, \{4\}, \{6\}) = P(2) + P(4) + P(6) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

Mais exemplos

- Exemplo: uma lâmpada é retirada, aleatoriamente, de um lote e é medido seu tempo de vida antes de queimar (E).
  - $\Omega = \{t : \ t \geq 0\}$, ou seja, o espaço amostral são todos os números reais não-negativos.
  - $A = \{t : \ 0 \leq t \leq 20\}$, o tempo de vida é menor ou igual a 20 horas.
  - A é um evento (conjunto) que é subconjunto de Ω.
  - Esse tipo de espaço amostral é chamado de "espaço amostral contínuo" (conjunto infinito não enumerável)
- Os espaços amostrais apresentados nos exemplos anteriores são chamados de "espaço amostral discreto" (conjunto finito ou infinito enumerável).

Estrutura Matemática

- Dado um experimento aleatório (E), tem-se (precisa ser definido) o respectivo espaço amostral (Ω).
- Para que o experimento aleatório seja devidamente analisado (modelagem probabilística), uma estrutura matematicamente rigorosa precisa ser devidamente estabelecida.
- Note que, em princípio, há o interesse em se poder calcular a probabilidade (P) de ocorrência de quaisquer eventos (subconjuntos) de Ω.
- Na Probabilidade, para se analisar, adequadamente, um experimento aleatório, uma estrutura útil é a chamada de espaço de probabilidade.

Estrutura Matemática

- Espaço de probabilidade - $(\Omega, \mathcal{F}, P)$:
  - Ω é o espaço amostral.
  - $\mathcal{F}$ é a $\sigma-$álgebra (conjunto de todos os subconjuntos de Ω), a qual é uma classe de conjuntos.
  - Classe de conjuntos: é um conjunto cujos elementos também são conjuntos.
  - P é uma probabilidade (ou medida de probabilidade) em $\mathcal{F}$.
  - $P : \mathcal{F} \to [0, 1]\,(\forall B \in \mathcal{F}, B \to P(B))$.
- Obs: O conjunto $\emptyset = \Omega^c$, essencialmente está associado à eventos impossíveis.

Estrutura Matemática

- Uma classe de conjuntos $\mathcal{F}$ de um conjunto (espaço amostral) Ω é chamada de álgebra (de subconjuntos de Ω), se
  - $\Omega \in \mathcal{F}$.
  - Se $A \in \mathcal{F}$, então $A^c \in \mathcal{F}$.
  - Se $A, B \in \mathcal{F}$, então $A \cup B \in \mathcal{F}$.
- Seja $\mathcal{F}$ uma álgebra de subconjuntos Ω (espaço amostral). Então (exercício):
  - $\emptyset \in \mathcal{F}$.
  - Se $A_1, A_2.., A_n \in \mathcal{F}$, então $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{F}$.
  - Se $A_1, A_2.., A_n \in \mathcal{F}$, então $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{F}$.

Estrutura Matemática

- Uma classe de conjuntos $\mathcal{F}$ de um conjunto (espaço amostral) Ω é chamada de $\sigma-$álgebra (de subconjuntos de Ω), se
  - $\Omega \in \mathcal{F}$.
  - Se $A \in \mathcal{F}$, então $A^c \in \mathcal{F}$.
  - Se $A_n \in \mathcal{F}; n \in \mathcal{N}$, então $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.
- A definição acima garante que todos os eventos de possível interesse pertençam à $\mathcal{F}$ e, consequentemente, seja possível calcular as probabilidades de todos esses eventos.
- Uma σ-álgebra é uma álgebra fechada em relação à uniões infinitas contáveis. É também fechada com relação a interseções contáveis.

Estrutura Matemática

- Observações sobre $\mathcal{F}$ ($\sigma-$álgebra).
- Caso $\#\Omega$ seja finita ou infinita enumerável, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, ou seja, o conjunto das partes de Ω (conjunto formado por todos os subconjuntos de Ω).
  - Seja $\Omega = \{1, 5\}$, então $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{5\}, \Omega\}$.
  - Seja $\Omega = \mathcal{N}$, então $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, ..., \{0, 1\}, ..., \Omega\}$.
- Em princípio (a menos que se peça para descrever os elementos), basta dizer que $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ (não é necessário descrever todos os intervalos).

Estrutura Matemática

- Caso a $\#\Omega$ seja infinita não-enumerável, $\mathcal{F}$, será a menor $\sigma-$álgebra que contém todos os subconjuntos de Ω $(\mathcal{F} \subset \mathcal{F}^*)$, $\forall \mathcal{F} \neq \mathcal{F}^*$, $\mathcal{F}^*$ sendo uma σ-álgebra.
  - Seja $\Omega = [1, 5]$, então
$$\mathcal{F} = \emptyset \cup \{(a, b), (a, b], [a, b), [a, b] : 1 \leq a < b \leq 5\}.$$
  - Seja $\Omega = [0, \infty)$, então
$$\mathcal{F} = \emptyset \cup \{(a, b), (a, b], [a, b), [a, b] : 0 \leq a < b < \infty\} \cup \Omega.$$

Estrutura Matemática

- A forma mais apropriada de representar $\mathcal{F}$ quando $\#\Omega$ for infinita não enumerável é dizer que $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$, que representa a $\sigma-$álgebra de Borel, a qual corresponde a $\sigma-$álgebra gerada por qualquer uma (ou alguma) das seguintes classes de intervalo:

$$(-\infty, a), (-\infty, a], (a, b), (a, b], [a, b), [a, b], (a, \infty), [a, \infty).$$

- A menos que seja pedido para se descrever os elementos de $\mathcal{F}$, neste caso, basta usar $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$.

Probabilidade "Kolmogoroviana"

- Dado um experimento aleatório, seja Ω o espaço amostral associado e $\mathcal{F}$ uma σ-álgebra de eventos em Ω. Considere uma medida de probabilidade $P : \mathcal{F} \rightarrow [0,1]$.
- Os axiomas (A) de Kolmogorov (associados à essa probabilidade (P)) são dados por:
  1. $0 \leq P(A) \leq 1$, $\forall$ evento A em Ω.
  2. $P(\Omega) = 1$.
  3. Se $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$ e $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall\ i \neq j$, então

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Probabilidade "Kolmogoroviana"

- Vamos nos referir aos axiomas como Ai, i=1,2,3.
- Com base nesses axiomas, conseguimos deduzir diversas propriedades de interesse. Vamos nos referir às propriedades que aqui serão demonstradas como Pi, i=1,2,3,4,5 (slide a seguir).
- Posteriormente, precisaremos construir (medidas de) probabilidade que obedeçam aos três axiomas.

Propriedades (P) da Probabilidade "Kolmogoroviana"

1. $P(\emptyset) = 0$ (probabilidade de não ocorrer o espaço amostral é 0).

2. Se $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{F}$ e $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall\ i \neq j$, então

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

   (aditividade finita).

3. $P(A) = 1 - P(A^c)$ (probabilidade do complementar).

4. Se $A, B \in \mathcal{F}$, $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$ (monotonicidade).

5. Se $A, B \in \mathcal{F}$, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (probabilidade da união).

(Cont.) Demonstrações

- (P1): Temos que:

$$\emptyset = \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, A_n = \emptyset.$$

Por (A3), temos que

$$P(\emptyset) = P(\emptyset) + P(\emptyset) + \ldots. \tag{1}$$

Por (A1), temos que $P(\emptyset) \geq 0$ e, unido a Equação (1), vem que:

$$P(\emptyset) = 0.$$

■

(Cont.) Demonstrações

- Obs, o “ ■ ” (justificado à direita) indica que a demonstração fora finalizada.
- Equivalentemente, podemos usar, para o mesmo fim:
  - C.Q.D.: Como queríamos demonstrar.
  - Q.E.D.: Quod erat demonstrandum (“o que havia de ser demonstrado” em latim).

(Cont.) Demonstrações

- (P2): Temos que:

$$\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \bigcup \left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k\right) = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right), \tag{2}$$

em que $A_k = \emptyset, \forall k \geq n+1$.

Notando que $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$ e utilizando (A3) e (P1) na Equação (2), vem que:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_k).$$

■

(Cont.) Demonstrações

- (P3): Note que:

$$\Omega = A \cup A^c. \tag{3}$$

Assim, usando (A2) e (P2), na Equação (3) vem que:

$$\begin{aligned} P(\Omega) &= P(A) + P(A^c) \rightarrow 1 = P(A) + P(A^c) \\ &\rightarrow P(A) = 1 - P(A^c). \end{aligned}$$

(Cont.) Demonstrações

- (P4): Como $A \subset B$ (lembrando que $B - A = B \cap A^c$), temos que

$$B = A \cup (B - A) = A \cup (B \cap A^c). \quad (4)$$

Por outro lado, dado que $A \cap (B \cap A^c) = \emptyset$ e utilizando (P2) na Equação (4), temos que

$$P(B) = P(A) + P(B \cap A^c). \quad (5)$$

Finalmente, utilizando (A1) ($P(B \cap A^c) \geq 0$) na Equação (5), temos que

$$P(B) \geq P(A).$$

■

(Cont.) Demonstrações

- (P5): Temos que (exercício):

$$
\begin{aligned}
A &= (A \cap B) \cup (A \cap B^c). && (6)\\
A \cup B &= B \cup (A \cap B^c). && (7)
\end{aligned}
$$

Como $(A \cap B) \cap (A \cap B^c) = \emptyset$ e $B \cap (A \cap B^c) = \emptyset$ e usando (P2) nas Equações (6) e (7) leva à:

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap B^c) \\
&\rightarrow P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B). && (8)\\
P(A \cup B) &= P(B) + P(A \cap B^c). && (9)
\end{aligned}
$$

(Cont.) Demonstrações

- Finalmente, da Equação (8) na Equação (9), vem que

$$P(A \cup B) \quad = \quad P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

$\blacksquare$

Experimentos aleatórios equiprobabilísticos

- É um experimento que gera um espaço amostral cujos pontos (elementos) tem a mesma probabilidade de ocorrência.
- Essencialmente, corresponde à situações em que a $\#\Omega$ é finita. Nesse caso:
  - $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$.
  - $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, ..., \Omega\}$.
  - $P(\omega_i) = \frac{1}{n}, \forall\ i = 1, 2, ..., n$.
- Então se $A = \{\omega_{A_1}, ..., \omega_{A_m}\}$ é um evento em Ω, com $m \leq n$ pontos amostrais ($A_i \in \{1, ..., n\}, i \in \{1, ..., m\}$), pelo exposto acima e por (P2), temos que
$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Exemplo

- Suponha que os alunos de um determinado Instituto de Matemática, Estatística e Computação podem ser classificados como:

	Masculino (Ma)	Feminino (Fe)	Total
Mat. Pura (M)	70	40	110
Mat. Aplicada (A)	15	15	30
Estatística (E)	10	20	30
Computação (C)	20	10	30
Total	115	85	200

Exemplo

- Considere a escolha de um aluno ao acaso e defina os seguintes eventos:
    - M: estudante da Matemática Pura
    - A: estudante da Matemática Aplicada
    - E: estudante da Estatística
    - C: estudante da Computação
    - Ma: sexo Masculino
    - Fe: sexo Feminino
- Note que $\Omega = \{1, 2, ..., 200\}$, em que i denota o i-ésimo aluno e $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Alternativamente (dependendo dos objetivos), $\Omega : \{(i, j) : i \in \{M, A, E, C\}, j \in \{Ma, Fe\}\}$.

(Cont.) Exemplo

- Vamos assumir que cada aluno tem a mesma probabilidade de ser selecionado, assim:
  - $P(M) = \frac{110}{200} = 0,550$
  - $P(A) = \frac{30}{200} = 0,150$
  - $P(E) = \frac{30}{200} = 0,150$
  - $P(C) = \frac{30}{200} = 0,150$
  - $P(Ma) = \frac{115}{200} = 0,575$
  - $P(Fe) = \frac{85}{200} = 0,425$

(Cont.) Exemplo

- Ainda neste último exemplo, vamos definir como evento (I), escolher ao acaso um aluno e ele ser estudante de estatística e do sexo masculino, simultaneamente.
- Ou seja, $I = E \cap Ma$, o evento I é uma interseção dos eventos E e Ma.
- Assin $P(E \cap Ma) = \frac{10}{200} = 0,05$.

(Cont.) Exemplo

- Definamos agora como evento (U), escolher ao acaso um aluno e ele ser estudante de estatística ou do sexo masculino.
- Ou seja, $I = E \cup Ma$, o evento U é uma união dos eventos E e Ma.
- Portanto:

$$\begin{aligned}
P(E \cup Ma) &= P(E) + P(Ma) - P(E \cap Ma) \\
P(E) &= \frac{10+20}{200} = \frac{30}{200} = 0,150 \\
P(Ma) &= \frac{70+15+10+20}{200} = \frac{115}{200} = 0,575 \\
P(E \cap MA) &= \frac{10}{200} = 0,050
\end{aligned}$$

- Então: $P(E \cup Ma) = \dfrac{30+115-10}{200} = \dfrac{155}{200} = 0,775$

(Cont.) Exemplo

- No caso de eventos mutuamente excludentes ou disjuntos, a interseção é o conjunto vazio ($\emptyset$).
- $P(M \cap C) = P(\emptyset) = 0$
- Assim:

$$P(M \cup C) = P(M) + P(C) - P(M \cap C) = P(M) + P(C) = \frac{140}{200} = 0,700$$

(Cont.) Exemplo

- Vamos considerar agora apenas o curso em que o aluno está matriculado.
- Os eventos M e $\{A \cup E \cup C\}$ são chamados eventos complementares, ou seja:
  - $\{M \cap \{A \cup E \cup C\}\} = \emptyset$.
  - $\{M \cup \{A \cup E \cup C\}\} = \Omega$.

Exemplo

- Exemplo: uma moeda honesta é lançada uma única vez, assim:
  - $\Omega = \{C, X\}$.
  - $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{C\}, \{X\}, \Omega\}$.
  - $P(C) = P(X) = \dfrac{1}{2}$.
- Se $A = \{C\}$, então $P(A) = \dfrac{1}{2}$.

Voltando ao Exemplo de dois lançamentos de uma moeda honesta

- Exemplo: uma moeda honesta é lançada duas vezes, assim
  - $\Omega = \{(C, C), (X, C), (C, X), (X, X)\}$.
  - $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{(C, C)\}, \{(X, C)\}, \{(C, X)\}, \{(X, X)\}, \{(C, C), (X, C)\}, ..., \Omega\}$.
  - $P(C, C) = P(X, C) = P(C, X) = P(X, X) = \dfrac{1}{4}$.
- Se $A = \{(X, X), (C, C)\}$, então

$$P(A) = P((X, X) \cup (C, C)) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Mais exemplos

- Exemplo: uma lâmpada é retirada de um lote e é medido seu tempo de vida antes de queimar.
  - $\Omega = \{t : \ t \geq 0\}$, ou seja, o espaço amostral são todos os números reais positivos
  - $A = \{t : \ 0 \leq t \leq 20\}$, o tempo de vida é menor ou igual a 20 horas A é um evento (conjunto) que pode ser considerado como subconjunto de Ω
  - $\mathcal{F} = \{\emptyset, B, \Omega\}, \ B = \{(a,b), (a,b], [a,b), [a,b] : \forall a \leq b, a, b > 0\}$.