

# Planejamento e Análise Estatística de Experimentos Fatoriais em blocos completos

Prof. Caio Azevedo

# Contexto

- Já vimos como analisar um experimento em blocos na presença de um único fator de interesse.
- Podemos ter experimentos fatoriais (dois ou mais fatores) em blocos.
- A idéia é essencialmente a mesma. Contudo, os tratamentos serão definidos pelas combinações dos níveis dos fatores de interesse (como no caso do PCA).
- Ou seja, dentro de cada bloco, as unidades experimentais serão alocadas segundo um PCA à cada tratamento.

## Exemplo 7

- Um engenheiro tem o interesse em estudar a habilidade (de controladores de vôo) de detectar alvos em uma tela de radar.
- Dois fatores de interesse: quantidade de ruído na tela (QR) e tipo de filtro colocado sobre o visor (TF).
- QR: três níveis (baixo, médio, alto).
- TF: tipo 1 e tipo 2.
- O experimento consistiu em em introduzir um sinal na tela do radar e aumentar a intensidade desse sinal, até que o operador pudesse captar algo.
- Variável resposta: nível de intensidade de detecção (quanto menor melhor?).

## Exemplo 7: operadores de radar

- Tem-se um total de  $3 \times 2 = 6$  tratamentos.
- Quatro operadores foram selecionados.
- Cada um deles foi submetido a cada um dos tratamentos. A ordem dos tratamentos, para cada operador, foi selecionada de modo aleatório.
- Espera-se, nesse caso, que as respostas observadas apresentem um independência intra-operadores (observações realizadas no mesmo operador).

## Exemplo 7: operadores de radar (con t.)

- Considerar os operadores como blocos: forma de modelar a dependência (não é a mais apropriada).
- Modelagem da dependência: Modelos mistos (serão vistos mais adiante).

# Resultados do experimento

Tipos de filtro	Operadores (blocos)							
	1		2		3		4	
	1	2	1	2	1	2	1	2
Baixo	90	86	96	84	100	92	92	81
Médio	102	87	106	90	105	97	96	80
Alto	114	93	112	91	108	95	98	83

## Modelo (casela de referência) - Caso geral

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \tau_k + \xi_{ijk},$$

(Fator A),  $i = 1, 2, \dots, a$ ; (Fator B),  $j = 1, 2, \dots, b$ ; (Bloco),  $k = 1, 2, \dots, B$

- Erros  $\xi_{ij} \stackrel{i.i.d}{\sim} N(0, \sigma^2)$ ,  $\mu, \alpha_i, \beta_j, (\alpha\beta)_{ij}, \tau_k$ , não aleatórios.
- Restrições :  $\alpha_1 = \beta_1 = \tau_1 = (\alpha\beta)_{1j} = (\alpha\beta)_{i1} = 0, \forall i, j$ .
- Note que o número de blocos fornece o número de unidades experimentais por tratamento. Nesse caso  $n = a \times b \times B$ .
- Estamos considerando um experimento balanceado (blocos completos balanceados), embora, na prática, possamos ter desbalanceamentos (blocos completos desbalanceados).

# Somas de quadrados

- Decomposição da soma de quadrados total: Veja Capítulo 5 do livro do Montgomery.



## Modelo (casela de referência)

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \tau_k + \xi_{ijk},$$

(tipo de filtro),  $i = 1, 2, ;$  (ruído),  $j = 1, 2, 3, ;$  (Bloco),  $k = 1, 2, 3, 4$

- Erros  $\xi_{ij} \stackrel{i.i.d}{\sim} N(0, \sigma^2)$ ,  $\mu, \alpha_i, \beta_j, (\alpha\beta)_{ij}, \tau_k$ , não aleatórios.
- Restrições :  $\alpha_1 = \beta_1 = \tau_1 = (\alpha\beta)_{1j} = (\alpha\beta)_{i1} = 0, \forall i, j.$
- Note que o número de blocos fornece o número de unidades experimentais por tratamento. Nesse caso  $n = 3 \times 2 \times 4 = 24.$
- Estamos considerando um experimento balanceado (blocos completos balanceados), embora, na prática, possamos ter desbalanceamentos (blocos completos desbalanceados).

# Tabela de análise de variância

- Temos que:

FV	SQ	GL	QM	Estatística F	pvalor
Fator A	$SQF_A$	a-1	$QMF_A = \frac{SQF_A}{(a-1)}$	$F_A = \frac{QMF_A}{QMR}$	$\min(F(f_A H_0), S(f_A H_0))$
Fator B	$SQF_B$	b-1	$QMF_B = \frac{SQF_B}{(b-1)}$	$F_B = \frac{QMF_B}{QMR}$	$\min(F(f_B H_0), S(f_B H_0))$
Interação	$SQInt$	(a-1)(b-1)	$QMFInt = \frac{SQFInt}{(a-1)(b-1)}$	$FInt = \frac{QMFInt}{QMR}$	$\min(F(f_{AB} H_0), S(f_{AB} H_0))$
Bloco	$SQB$	B-1	$QMB = \frac{SQB}{(b-1)}$	$F_B = \frac{QMB}{QMR}$	$\min(F(f_B H_0), S(f_B H_0))$
Resíduo	$SQR$	(ab-1)(B-1)	$QMR = \frac{SQR}{[(ab-1)(B-1)]}$		
Total	$SQT$	abB-1			

FV: fonte de variação, SQ: soma de quadrados, Gl: graus de liberdade, QM: quadrado médio.  $F(x|H_0), S(x|H_0)$  fda e fds no ponto  $x$  sob  $H_0$ , respectivamente. Em geral, não se avalia a magnitude de  $F_B$  pois espera-se, de fato, ter-se efeito de bloco.

# Voltando ao exmplo: Análise descritiva

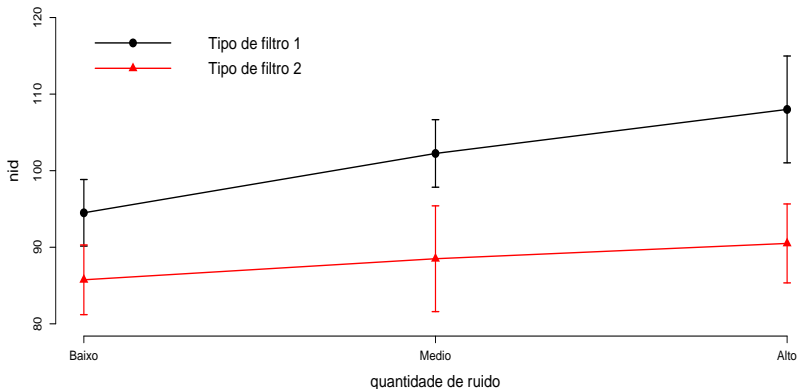
Não há sentido em construir box-plots ou histogramas.

Tipo de filtro	Ruído	Medida descritiva					
		Média	DP	Var.	CV%	Mínimo	Máximo
1	Baixo	94,50	4,43	19,67	4,69	90,00	100,00
	Medio	102,25	4,50	20,25	4,40	96,00	106,00
	Alto	108,00	7,12	50,67	6,59	98,00	114,00
2	Baixo	85,75	4,65	21,58	5,42	81,00	92,00
	Medio	88,50	7,05	49,67	7,96	80,00	97,00
	Alto	90,50	5,26	27,67	5,81	83,00	95,00

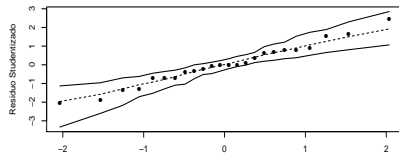
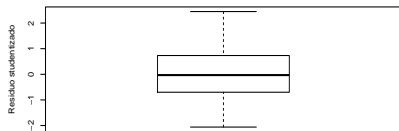
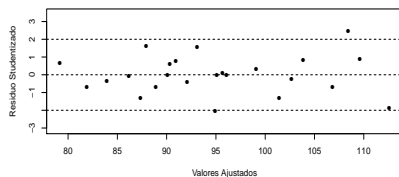
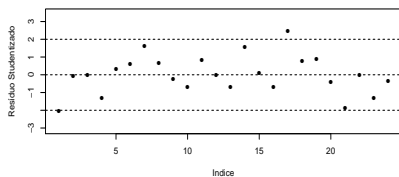
# Análise descritiva (cont.)

Bloco	Medida descritiva					
	Média	DP	Var.	CV%	Mínimo	Máximo
1	95,33	10,80	116,67	11,33	86,00	114,00
2	96,50	10,58	111,90	10,96	84,00	112,00
3	99,50	6,09	37,10	6,12	92,00	108,00
4	88,33	7,97	63,47	9,02	80,00	98,00

# Gráfico de perfis (médios)



# Análise de resíduos



# Comentários

- Parece que as suposições do modelo não são válidas para o conjunto de dados em questão (embora o ajuste tenha melhorado em relação à situação anterior).
- Ausência de homocedasticidade, dependência e normalidade.
- Uma alternativa: modelos de regressão com distribuição positiva e assimétrica para a variável resposta, que permita variâncias diferentes entre os grupos e com diferentes coeficientes de variação, que levem em consideração a dependência intra blocos.

## Comentários (cont.)

- Distribuições positivas: família gama (mãe não a tradicional), família normal inversa, família Weibull, família lognormal, família Birbaun-Saunders, normal assimétrica (apesar de ter suporte na reta).
- Alternativas mais adequada: Modelos mistos com as características mencionadas anteriormente.
- O modelo de regressão normal linear, aparentemente, não é adequado para analisar os dados em questão, apesar do ajuste ter melhorado em relação à situação anterior (considerando apenas dois fatores).
- Contudo, seguiremos com ele por questões pedagógicas.



# Tabela ANOVA

FV	SQ	GL	QM	Estatística F	pvalor
Tipo de Filtro	1	1066,67	1066,67	96,19	<0,0001
Ruído	2	335,58	167,79	15,13	0,0003
Interação	2	77,08	38,54	3,48	0,0575
Bloco	3	402,17	134,06	12,09	0,0003
Resíduo	15	166,33	11,09		
Total	23	2047,833			

Efeito de bloco (esperado). Interação significativa (marginalmente) e não essencial (perfis não se cruzam).

# Estimativas dos parâmetros do modelo

Parâmetro	Estimativa	EP	IC(95%)	Estat. t	pvalor
$\mu$	94,92	2,04	[90,92 ; 98,91]	46,55	<0,0001
$\alpha_2$	-8,75	2,35	[-13,37 ; -4,13 ]	-3,72	0,0021
$\beta_2$	7,75	2,35	[3,13 ; 12,37 ]	3,29	<0,0049
$\beta_3$	13,50	2,35	[8,88 ; 18,12 ]	5,73	<0,0001
$\tau_2$	1,17	1,92	[-2,60 ; 4,93 ]	0,61	<0,5530
$\tau_3$	4,17	1,92	[0,40 ; 7,93 ]	2,17	0,0467
$\tau_4$	-7,00	1,92	[-10,77 ; -3,23 ]	-3,64	0,0024
$(\alpha\beta)_{22}$	-5,00	3,33	[-11,53 ; 1,53]	-1,50	0,1540
$(\alpha\beta)_{23}$	-8,75	3,33	[-15,28 ; -2,22 ]	-2,63	0,0190

## Comentários

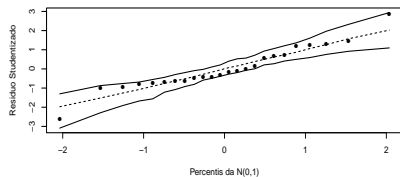
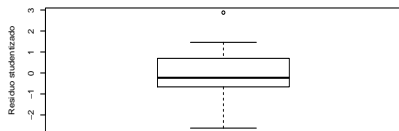
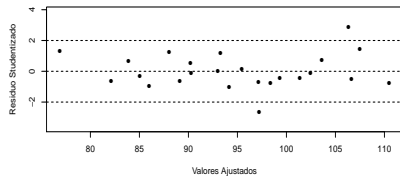
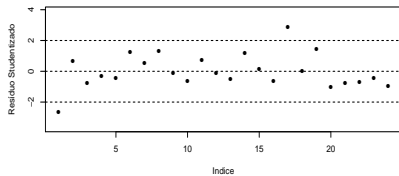
- Em princípio, se as médias dos tipos de filtro 1 e 2, para ruído baixo, forem diferentes entre si, de fato, a interação não seria significativa.
- Defina a média associada ao  $i$ -ésimo tipo de filtro e a  $j$ -ésima intensidade do ruído:  $\mu_{ij} = \frac{1}{5} \sum_{k=1}^5 \mu_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \bar{\tau}$ ,  
 $\tau = \frac{1}{5} \sum_{k=1}^5 \tau_j$ .
- A hipótese acima traduzir-se-ia em  $H_0 : \mu_{11} - \mu_{12} = 0 \leftrightarrow \alpha_2 = 0$ .  
 Pelos resultados anteriores, devemos rejeitá-la (estatística  $t = -3,72$ ,  $p\text{-valor} = 0,0021$ ).
- Além disso, a possível interação seria do tipo não essencial e foi marginalmente significativa.
- Ajustaremos um modelo sem interação.

## Modelo sem interação entre os fatores (casela de referência)

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \tau_k + \xi_{ijk},$$

(tipo de filtro),  $i = 1, 2, ;$  (ruído),  $j = 1, 2, 3, ;$  (Bloco),  $k = 1, 2, 3, 4$

- Erros  $\xi_{ij} \stackrel{i.i.d}{\sim} N(0, \sigma^2)$ ,  $\mu, \alpha_i, \beta_j, \tau_k$ , não aleatórios.
- Restrições :  $\alpha_1 = \beta_1 = \tau_1 = 0$ .
- Note que o número de blocos fornece o número de unidades experimentais por tratamento. Nesse caso  $n = 3 \times 2 \times 4 = 24$ .
- Estamos considerando um experimento balanceado (blocos completos balanceados), embora, na prática, possamos ter desbalanceamentos (blocos completos desbalanceados).



# Comentários

- Parece que as suposições do modelo não são válidas para o conjunto de dados em questão (embora o ajuste tenha melhorado em relação à situação anterior).
- Ausência de homocedasticidade, dependência e normalidade.
- Uma alternativa: modelos de regressão com distribuição positiva e assimétrica para a variável resposta, que permita variâncias diferentes entre os grupos e com diferentes coeficientes de variação, que levem em consideração a dependência intra blocos.

# Comentários

- Distribuições positivas: família gama (mãe não a tradicional), família normal inversa, família Weibull, família lognormal, família Birbaun-Saunders, normal assimétrica (apesar de ter suporte na reta).
- Alternativas mais adequada: Modelos mistos com as características mencionadas anteriormente.
- O modelo de regressão normal linear, aparentemente, não é adequado para analisar os dados em questão, apesar do ajuste ter melhorado em relação à situação anterior (considerando apenas dois fatores).
- Contudo, seguiremos com ele por questões pedagógicas.

# Tabela ANOVA

FV	SQ	GL	QM	Estatística F	pvalor
Tipo de filtro	1	1066,67	1066,67	74,50	<0,0001
Ruído	2	335,58	167,79	11,72	0,0006
Blococ	3	402,17	134,06	9,36	0,0007
Residuo	17	243,42	14,32		
Total	23	2047,83			

Efeito de bloco significativo (esperado). Efeitos de fatores principais (significativos). Investigar possíveis igualdades entre as médias. A possível igualdade seria entre as médias ao longo dos níveis dos ruídos, fixado qual quer um dos tipos de filtro.



# Estimativas dos parâmetros do modelo

Parâmetro	Estimativa	EP	IC(95%)	Estat. t	pvalor
$\mu$	97,21	2,04	[ 93,20 ; 101,21 ]	47,57	< 0,0001
$\alpha_2$	-13,33	1,54	[ -16,36 ; -10,31 ]	-8,63	< 0,0001
$\beta_2$	5,25	1,89	[ 1,54 ; 8,96 ]	2,77	0,0130
$\beta_3$	9,12	1,89	[ 5,42 ; 12,83 ]	4,82	0,0002
$\tau_2$	1,17	2,18	[ -3,12 ; 5,45 ]	0,53	0,6002
$\tau_3$	4,17	2,18	[ -0,12 ; 8,45 ]	1,91	0,0735
$\tau_4$	-7,00	2,18	[ -11,28 ; -2,72 ]	-3,20	0,0052

# Comparações de interesse

- Fixado o tipo de filtro 1:
  - (1)  $H_0 : \mu_{11} - \mu_{12} = 0$  vs  $H_1 : \mu_{11} - \mu_{12} \neq 0$
  - (2)  $H_0 : \mu_{11} - \mu_{13} = 0$  vs  $H_1 : \mu_{11} - \mu_{13} \neq 0$
  - (3)  $H_0 : \mu_{12} - \mu_{13} = 0$  vs  $H_1 : \mu_{12} - \mu_{13} \neq 0$
- Em termos dos parâmetros  $\beta$ , temos:
  - (1)  $H_0 : \beta_2 = 0$  vs  $H_1 : \beta_2 \neq 0$
  - (2)  $H_0 : \beta_3 = 0$  vs  $H_1 : \beta_3 \neq 0$
  - (3)  $H_0 : \beta_2 - \beta_3 = 0$  vs  $H_1 : \beta_2 - \beta_3 \neq 0$

## Comparações de interesse (cont.)

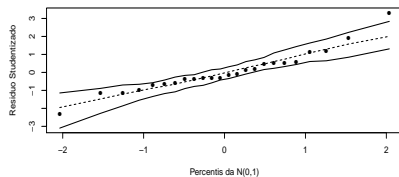
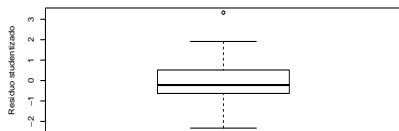
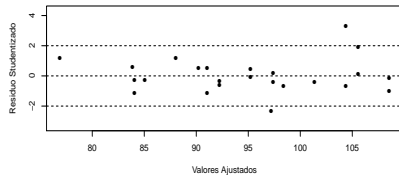
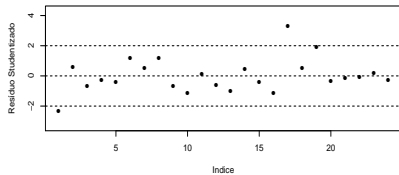
- Comparações de interesse em termos dos parâmetros  $\beta$ :
  - (1) Pela Tabela com as estimativas dos parâmetros, rejeitamos  $H_0$ , 2,77 (pvalor=0,0130 ).
  - (2) Pela Tabela com as estimativas dos parâmetros, rejeitamos  $H_0$ , 4,82 (pvalor= $<0,0002$ ).
  - (3) Pelo teste  $C\beta$ , não rejeitamos  $H_0$ , 4,19 (0,0563)
- Ajustar um modelo, no qual, independentemente do tipo de filtro, os NID's médios para os tuídos médio e alto, sejam iguais.

# Modelo (casela de referência)

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \tau_k + \xi_{ijk},$$

(tipo de filtro),  $i = 1, 2, \dots$ ; (ruído),  $j = 1, 2, \dots$ ; (Bloco),  $k = 1, 2, 3, 4$

- Erros  $\xi_{ij} \stackrel{i.i.d}{\sim} N(0, \sigma^2)$ ,  $\mu, \alpha_i, \beta_j, (\alpha\beta)_{ij}, \tau_k$ , não aleatórios.
- Restrições :  $\alpha_1 = \beta_1 = \tau_1 = 0$ .
- Neste caso temos uma estrutura desbalanceada (blocos completos desbalanceados).



# Comentários

- Parece que as suposições do modelo não são válidas para o conjunto de dados em questão (embora o ajuste tenha melhorado em relação à situação anterior).
- Ausência de homocedasticidade, dependência e normalidade.
- Uma alternativa: modelos de regressão com distribuição positiva e assimétrica para a variável resposta, que permita variâncias diferentes entre os grupos e com diferentes coeficientes de variação, que levem em consideração a dependência intra blocos.

# Comentários

- Distribuições positivas: família gama (mãe não a tradicional), família normal inversa, família Weibull, família lognormal, família Birbaun-Saunders, normal assimétrica (apesar de ter suporte na reta).
- Alternativas mais adequada: Modelos mistos com as características mencionadas anteriormente.
- O modelo de regressão normal linear, aparentemente, não é adequado para analisar os dados em questão, apesar do ajuste ter melhorado em relação à situação anterior (considerando apenas dois fatores).
- Contudo, seguiremos com ele por questões pedagógicas.

# Tabela ANOVA

FV	SQ	GL	QM	Estatística F	pvalor
Tipo de filtro	1	1066,67	1066,67	63,27	<0,0001
Ruído	1	275,52	275,52	16,34	0,0008
Bloco	3	402,17	134,06	7,95	0,0014
Residuo	18	303,48	16,86		
Total	23	2047,83			

Efeito de bloco significativo (esperado). Efeitos de fatores principais (significativos). Resta-nos fornecer estimativas para médias.



# Estimativas dos parâmetros do modelo

Parâmetro	Estimativa	EP	IC(95%)	Estat. t	pvalor
$\mu$	97,21	2,22	[ 92,86 ; 101,55 ]	43,84	<0,0001
$\alpha_2$	-13,33	1,68	-16,62 ; -10,05 ]	-7,95	<0,0001
$\beta_2$	7,19	1,78	[ 3,70 ; 10,67 ]	4,04	0,0008
$\tau_2$	1,17	2,37	[ -3,48 ; 5,81 ]	0,49	0,6286
$\tau_3$	4,17	2,37	[ -0,48 ; 8,81 ]	1,76	0,0958
$\tau_4$	-7,00	2,37	[ -11,65 ; -2,35 ]	-2,95	0,0085

# Estimativas finais das médias

Tipo de filtro	Ruído	Estimativa	EP	IC(95%)
1	Baixo	96,79	1,68	[93,51 ;100,08]
	Médio/Alto	103,98	1,33	[101,38 ; 106,58]
2	Baixo	83,46	1,68	[80,17 ; 86,74]
	Médio/Alto	90,65	1,33	[88,05 ; 93,24]

# Gráfico de perfis médios ajustados (médias dos métodos de quantificação)

