

Inferência para a Distribuição Normal Multivariada: parte 1

Prof. Caio Azevedo

Introdução

- Estudaremos como realizar Inferência Estatística (estimação pontual, intervalar e testes de hipótese) para os parâmetros da distribuição **normal multivariada**.
- Veremos abordagens para cada componente univariado do vetor de médias (μ) e matriz de variâncias e covariâncias (Σ), bem como para cada um dos dois componentes.
- Um dos elementos básicos é a **matriz de dados** em que as linhas ($\mathbf{X}_i = (X_{i1}, \dots, X_{ip})'$) são consideradas vetores aleatórios independentes e identicamente distribuídos segundo uma distribuição $N_p(\mu, \Sigma)$.

Matriz de dados (MD)

| Indivíduo | Variável 1 | Variável 2 | ... | Variável p |
|-----------|------------|------------|----------|------------|
| 1 | X_{11} | X_{12} | ... | X_{1p} |
| 2 | X_{21} | X_{22} | ... | X_{2p} |
| \vdots | \vdots | \vdots | \ddots | \vdots |
| n | X_{n1} | X_{n2} | ... | X_{np} |

Temos que (cada linha da MD) $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, \dots, X_{ip})' \stackrel{iid}{\sim} N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$,
 $i = 1, 2, \dots, n$.

Verossimilhança

- Primeiramente note que, para a fdp da $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, temos que

$$\begin{aligned}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) &= \text{tr}[(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})] \\ &= \text{tr}[\boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})'].\end{aligned}$$

- Com a suposição de amostra aleatória (aa) da $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ e o resultado anterior), temos que a verossimilhança pra uma aa de tamanho n é dada por

$$L(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \propto |\boldsymbol{\Sigma}|^{-n/2} \exp \left\{ -0,5 \left[\sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}) \right] \right\} \quad (1)$$

Verossimilhança

- Note que (somando-se e subtraindo-se $\bar{\mathbf{x}}$ em cada “()” na Equação (1)), temos que (exercício)

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu})' = \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})' + n(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})'$$

em que $\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i = \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^n x_{i1}, \dots, \sum_{i=1}^n x_{ip})' = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p)'$
(note que $\bar{x}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ij}$, $j=1,2,\dots,p$)

Estatística suficiente

- Por outro lado, temos que a verossimilhança pode ser reescrita como:

$$L(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \propto |\boldsymbol{\Sigma}|^{-n/2} \exp \left\{ -0,5 \operatorname{tr} \left[\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}) (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})' \right] \right. \\ \left. + 0,5n \times \operatorname{tr} \left[\boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}) (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})' \right] \right\}$$

- Assim, pelo **critério da fatoração** temos que

$\mathbf{T} = \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i, \sum_{i=1}^n (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}}) (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})' \right)$ é uma estatística suficiente para $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ (“abuso de notação”), em que

$$\bar{\mathbf{X}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n X_{i1}, \dots, \sum_{i=1}^n X_{ip} \right)' = (\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_p)' \text{ (note que } \bar{X}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{ij}, j = 1, 2, \dots, p \text{)}.$$

Estimadores de máxima verossimilhança

- Por outro lado, temos que a log-verossimilhança pode ser escrita como (definindo $\mathbf{V} = \Sigma^{-1}$):

$$l(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \text{const} + \frac{n}{2} \ln |\mathbf{V}| - 0,5 \left[\sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu})' \mathbf{V} (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}) \right] \quad (2)$$

$$= \text{const} + \frac{n}{2} \ln |\mathbf{V}| - 0,5 \text{tr} \left[\mathbf{V} \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}) (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu})' \right] \quad (3)$$

- Derivando (2) com relação à $\boldsymbol{\mu}$ e (3) com relação à \mathbf{V} , vem que (lembrando que $\frac{\partial}{\partial \mathbf{V}} \ln |\mathbf{V}| = \boldsymbol{\Sigma}$ e $\frac{\partial}{\partial \mathbf{V}} \text{tr}(\mathbf{V}\mathbf{A}) = \mathbf{A}'$)

Estimadores de máxima verossimilhança

$$S(\boldsymbol{\mu}) = \frac{\partial l(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})}{\partial \boldsymbol{\mu}} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [2\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu})] = n\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu} - n\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\bar{\mathbf{x}}$$

$$S(\mathbf{V}) = \frac{n}{2}(\mathbf{V}^{-1})' - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu})' = \frac{n}{2}(\mathbf{V}^{-1})' - \frac{1}{2}(n-1)\mathbf{S}^2$$

- Assim, igualando cada uma das derivadas acima à $0_{(p \times 1)}$ e $0_{(p \times p)}$, respectivamente, e resolvendo o sistema resultante em relação aos parâmetros, temos:

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \bar{\mathbf{X}}; \hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{X}})(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{X}})'$$

Estimadores de máxima verossimilhança

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}) (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})' = \frac{1}{n} \times$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n (X_{i1} - \bar{X}_1)^2 & \sum_{i=1}^n (X_{i1} - \bar{X}_1)(X_{i2} - \bar{X}_2) & \dots & \sum_{i=1}^n (X_{i1} - \bar{X}_1)(X_{ip} - \bar{X}_p) \\ \sum_{i=1}^n (X_{i1} - \bar{X}_1)(X_{i2} - \bar{X}_2) & \sum_{i=1}^n (X_{i2} - \bar{X}_2)^2 & \dots & \sum_{i=1}^n (X_{i2} - \bar{X}_2)(X_{ip} - \bar{X}_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n (X_{i1} - \bar{X}_1)(X_{ip} - \bar{X}_p) & \sum_{i=1}^n (X_{i2} - \bar{X}_2)(X_{ip} - \bar{X}_p) & \dots & \sum_{i=1}^n (X_{ip} - \bar{X}_p)^2 \end{bmatrix}$$

(Cont.) Distribuições amostrais dos $\hat{\mu}$ e \mathbf{S}^2

- Contudo, em geral, utiliza-se

$\mathbf{S}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}}) (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})' = \frac{n}{n-1} \hat{\Sigma}$ para estimar Σ (por ser não viciado), enquanto que $\mathcal{E}(\hat{\Sigma}) = \frac{(n-1)}{n} \Sigma$. Pode-se provar ainda que $\bar{\mathbf{X}} \perp \mathbf{S}^2$ (Teorema de Basu).

- Temos que $\hat{\mu} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma/n)$ (exercício).

- Assim, $\hat{\mu}_j \sim N(\mu_j, \sigma_j^2/n), j = 1, 2, \dots, p$, em que $\hat{\mu}_j = \bar{X}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{ij}$.

- Temos que $(n-1)\mathbf{S}^2 \sim W_p(n-1, \Sigma)$ ([link](#) com demonstrações e referências a respeito).

- Assim, $\frac{(n-1)S_j^2}{\sigma_j^2} \sim \chi_{(n-1)}^2, j = 1, 2, \dots, p$, em que

$S_j^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_{ij} - \hat{\mu}_j)^2$, é o j -ésimo elemento da diagonal principal de \mathbf{S}^2 .

(Cont.) Distribuições amostrais dos $\hat{\mu}$ e \mathbf{S}^2

- Densidade da distribuição de Wishart ($\Sigma \sim W_p(n, \mathbf{V})$), (pesquisar sobre ela):

$$f(\Sigma) = \frac{|\Sigma|^{\frac{n-p-1}{2}} e^{-\frac{\text{tr}(\mathbf{V}^{-1}\Sigma)}{2}}}{2^{\frac{np}{2}} |\mathbf{V}|^{\frac{n}{2}} \Gamma_p\left(\frac{n}{2}\right)}$$

em que $\Gamma_p(k) = \pi^{p(p-1)/4} \prod_{j=1}^p \Gamma(k + (1-p)/2)$ é a função gama p-variada.

- Seja $\mathbf{X}_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(0, \mathbf{V})$ e defina $\Sigma = \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i \mathbf{X}_i'$, então $\Sigma \sim W_p(n, \mathbf{V})$ (obs: esta matriz \mathbf{V} não é a mesma definida anteriormente).

Inferência para cada componente: intervalos de confiança

- $IC(\theta, \gamma)$ representa um intervalo de confiança com coeficiente de confiança γ para o parâmetro θ .
- (médias) $IC(\mu_j, \gamma) = \left[\bar{X}_j - t_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{S_j^2}{n}}, \bar{X}_j + t_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{S_j^2}{n}} \right]$, em que $P(T \leq t_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \frac{1+\gamma}{2}$, $T \sim t_{(n-1)}$.
- (variâncias) $IC(\sigma_j^2, \gamma) = \left[\frac{(n-1)S_j^2}{q_{\frac{1+\gamma}{2}}}, \frac{(n-1)S_j^2}{q_{\frac{1-\gamma}{2}}} \right]$, em que $P(Q \leq q_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \frac{1+\gamma}{2}$, e $P(Q \leq q_{\frac{1-\gamma}{2}}) = \frac{1-\gamma}{2}$ $Q \sim \chi_{(n-1)}^2$.

Inferência para cada componente: intervalos de confiança

- (correlações, $i \neq j$) $IC(\rho_{ij}, \gamma) = [\tanh(z'_1); \tanh(z'_2)]$, em que

$$z'_1 = z' - \frac{z^{1+\gamma}}{\sqrt{n-3}} \text{ e } z'_2 = z' + \frac{z^{1+\gamma}}{\sqrt{n-3}},$$

$$z' = 0,5 \ln \left(\frac{1+\hat{\rho}_{ij}}{1-\hat{\rho}_{ij}} \right),$$

$$\hat{\rho}_{ij} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_{ki} X_{kj} - \bar{X}_i \bar{X}_j}{\sqrt{S_i^2 S_j^2}}$$

é a correlação amostral de Pearson e

$$P(Z \leq z_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \frac{1+\gamma}{2}, Z \sim N(0, 1).$$

Testes de hipótese (TH) para cada componente de μ e Σ

- Para as componente μ_j e σ_j^2 , $j = 1, 2, \dots, p$ temos diversos resultados aqui apresentados:
 - Aulas teóricas (ME414): [TH1](#), [TH2](#) e [TH3](#).
 - Aulas práticas (ME414): [TH1](#), [TH2](#).
- Para testar $H_0 : \rho_{ij} = 0$ vs $H_1 : \rho_{ij} \neq 0$, podemos usar a estatística do teste $Z_t = \frac{\hat{\rho}_{ij}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-\hat{\rho}_{ij}^2}}$, rejeitando H_0 se $|z_t| > z_c$ ou se $p\text{-valor} = P(Z > z_t | H_0) > \alpha$, em que z_t é o valor calculado da estatística do teste, α é o nível de significância, $Z \sim N(0, 1)$ e $P(Z < z_c | H_0) = \frac{1-\alpha}{2}$.

Inferência para combinações lineares do vetor de médias

- Defina $\theta = \mathbf{R}_{(1 \times p)} \boldsymbol{\mu}$ em que \mathbf{R} é um vetor não aleatório.
- Temos que $\hat{\theta} = \mathbf{R} \hat{\boldsymbol{\mu}} \sim N(\mathbf{R} \boldsymbol{\mu}, \mathbf{R} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{R}' / n)$ (exercício).

- Assim, analogamente ao caso anterior, temos que

$$IC(\theta, \gamma) = \left[\mathbf{R} \bar{\mathbf{X}} - t_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\mathbf{R} \mathbf{S}^2 \mathbf{R}'}{n}}, \mathbf{R} \bar{\mathbf{X}} + t_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\mathbf{R} \mathbf{S}^2 \mathbf{R}'}{n}} \right], \text{ em que}$$

$$P(T \leq t_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \frac{1+\gamma}{2}, T \sim t_{(n-1)}.$$

Região de confiança para μ

- Pode-se provar que :
 - $(\mathbf{X} - \mu)' \Sigma^{-1} (\mathbf{X} - \mu) \sim \chi_{(p)}^2$ e $Q = n(\bar{\mathbf{X}} - \mu)' \Sigma^{-1} (\bar{\mathbf{X}} - \mu) \sim \chi_{(p)}^2$ (prova:fgm).
 - $T = n(\bar{\mathbf{X}} - \mu)' (\mathbf{S}^2)^{-1} (\bar{\mathbf{X}} - \mu) \sim T^2$ de Hotelling e $F = \frac{n-p}{(n-1)p} T \sim F_{(p, n-p)}$.
 - Definição $\mathbf{X} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ e $\mathbf{W} \sim W_p(k, \Sigma)$, $\mathbf{X} \perp \mathbf{W}$. Assim $Y = (\mathbf{X} - \mu)' (\mathbf{W}/k)^{-1} (\mathbf{X} - \mu) \sim T^2$ de Hotelling (veja site do curso).
- Portanto, uma região de confiança é um conjunto, digamos $R(\mu, \gamma)$, contido em \mathcal{R}^p , tal que $P(R(\mu, \gamma) \leq q_\gamma) = \gamma$, em que q_γ é um quantil apropriado da distribuição associada à $R(\mu, \gamma)$.

Região de confiança para μ

- Então, se f_γ for um quantil da distribuição $F_{(p, n-p)}$, tal que $P(F \leq f_\gamma) = \gamma$, uma região de confiança γ para μ é o conjunto de todas as p -uplas, digamos μ^* , tais que

$$n(\bar{x} - \mu^*)' (s^2)^{-1} (\bar{x} - \mu^*) \leq \frac{p(n-1)}{(n-p)} f_\gamma$$

- Para uma dada amostra (matriz de dados observada) basta calcular a forma quadrática acima (para todas as p -uplas) e ver quais satisfazem à inequação.
- Mais detalhes (incluindo $p \geq 3$): [Johnson and Wichern \(2018\)](#). No R: função “ellipse” do pacote “ellipse”: [página](#), [manual](#).

Simulação de um vetor aleatório $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$

- Seja $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{R}^p$, $\boldsymbol{\Sigma}$ positiva definida.
- Sabemos que $\mathbf{X} = \boldsymbol{\Psi}\mathbf{Z} + \boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\Psi} = \text{Cholesky}(\boldsymbol{\Sigma})$,
 $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_p)$, $Z_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(0, 1)$, $i = 1, \dots, p$ (exercício).
- $\mathbf{x} = \boldsymbol{\Psi}\mathbf{F}_Z^{-1}(\mathbf{z}) + \boldsymbol{\mu}$, $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_p)$, em que
 $\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{z}) = (F_Z^{-1}(z_1), \dots, F_Z^{-1}(z_p))$ (vetor coluna). No R,
“manualmente”:

```
m.u = cbind(runif(n)); m.z = qnorm(m.u)
```

```
for (i in 2:p){m.u = cbind(runif(n))
```

```
m.z = cbind(m.z,qnorm(m.u))};
```

```
m.x = t(chol(m.sigma)%*%t(m.z) + matrix(v.mu,p,n))
```

Cont.

- Também no R, de forma mais simples: função “mvrnorm ” do pacote “MASS”:

`mvrnorm(n=“tamanho da amostra”, mu=“vetor de médias”,
Sigma=“matriz de covariâncias”)`

Verificação da normalidade multivariada de uma matriz de dados

- $X_{ij} \sim N(\mu_j, \sigma_j^2), j = 1, 2, \dots, p, i = 1, \dots, n.$
- $n (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})' (\mathbf{S}^2)^{-1} (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}}) \approx \chi_p^2,$ para n suficientemente grande.
- Construir histogramas e/ou gráficos de quantis-quantis com envelope para cada variável e para a forma quadrática, bem como a utilização de testes não paramétricos (p.e., Kolmogorov-Smirnov).

Procedimento para se gerar o gráfico de envelopes (quantil-quantil)

- 1) Simule n variáveis aleatórias independentes de interesse ($N(0, 1)$ ou $\chi^2_{(\rho)}$). Repita este processo m vezes.
- 2) Ao final teremos uma matriz com valores simulados dessas variáveis aleatórias, digamos V_{ij} , $i=1, \dots, n$, (tamanho da amostra) $j=1, \dots, m$ (réplica).

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1m} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \dots & v_{nm} \end{bmatrix}$$

Cont.

- 3) Dentro de cada amostra (coluna), ordena-se, de modo crescente, os valores simulados, obtendo-se $v_{(i)j}^*$; (i -ésima estatística de ordem da j -ésima amostra):

$$\mathbf{V}^* = \begin{bmatrix} v_{(1)1} & v_{(1)2} & \cdots & v_{(1)m} \\ v_{(2)1} & v_{(2)2} & \cdots & v_{(2)m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{(n)1} & v_{(n)2} & \cdots & v_{(n)m} \end{bmatrix}$$

- 4) Pode-se obter os limites $v_{(i)l} = \min_{1 \leq j \leq m} v_{(i)j}$ e $v_{(i)s} = \max_{1 \leq j \leq m} v_{(i)j}$.

Cont.

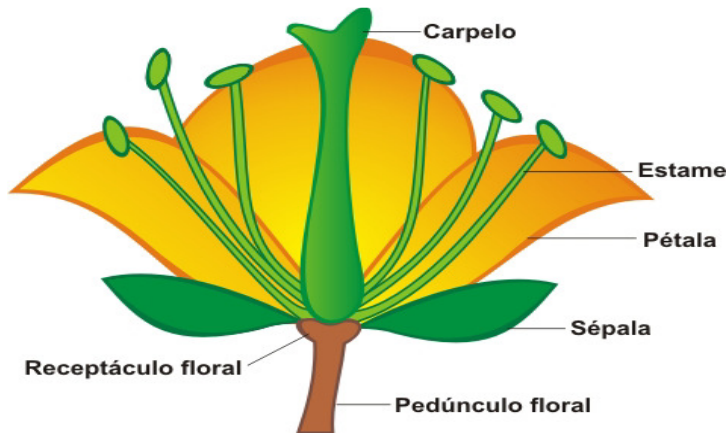
- 5) Porém, na prática considera-se $v_{(i)l} = \frac{v_{(i)(2)} + v_{(i)(3)}}{2}$ e $v_{(i)s} = \frac{v_{(i)(m-2)} + v_{(i)(m-1)}}{2}$ (para se gerar limites de confiança), em que $v_{(i)(r)}$ é a r -ésima estatística de ordem dentro de cada linha, $i = 1, 2, \dots, n$.

- Além disso, consideramos como a linha de referência

$$v_{(i)} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m v_{(i)j}, i = 1, 2, \dots, n.$$

Dados da íris “de Fisher”

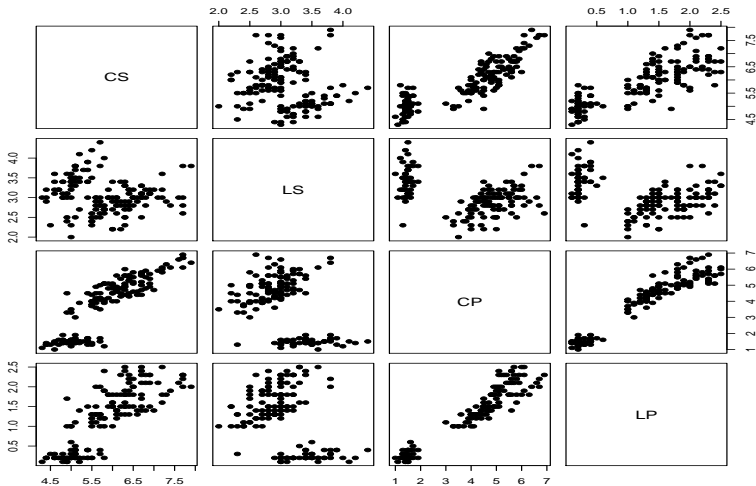
- Os dados consistem de 50 unidades amostrais de três espécies (setosa, virginica, versicolor) de íris (uma espécie de planta), ou seja, temos um total de 150 unidades amostrais (Fisher (1936) e Anderson (1935)).
- De cada uma delas mediu-se quatro variáveis: comprimento e largura da sépala (CS, LS) e comprimento e largura da pétala (CP,LP).
- Objetivo original: quantificar a variação morfológica em relação à essas espécies com bases nas quatro variáveis de interesse.



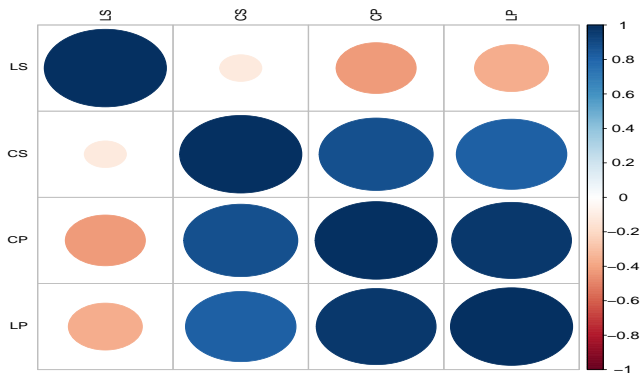
Cont.

- Seja Y_{ijk} : o valor da k -ésima variável ($k=1,2,3,4$), para a j -ésima flor ($j=1,\dots,50$) do i -ésimo grupo ($i = 1, 2, 3$).
- Por enquanto, vamos desconsiderar as espécies de Íris, ou seja, vamos considerar que $\mathbf{Y}_j = (Y_{j1}, Y_{j2}, Y_{j3}, Y_{j4}) \stackrel{ind.}{\sim} N_4(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, na seguinte ordem: comprimento e largura da sépala (CS, LS) e comprimento e largura da pétala (CP,LP).

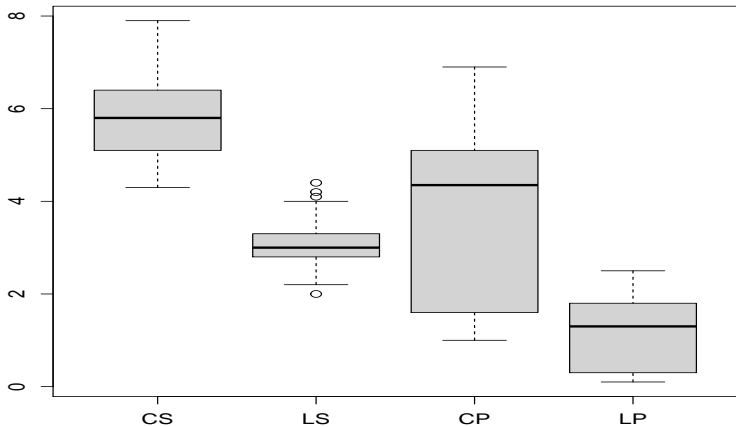
Gráficos de dispersão múltipla



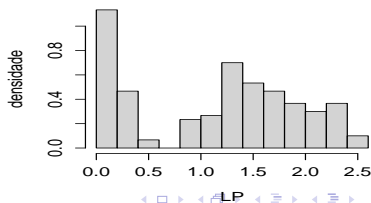
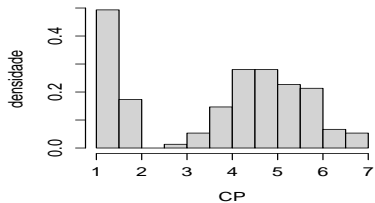
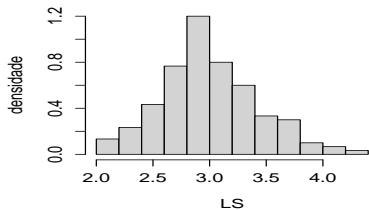
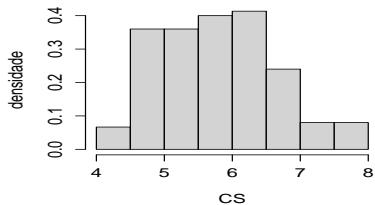
Matriz de correlações



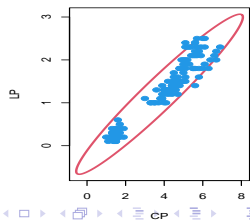
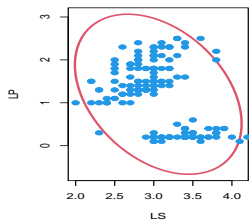
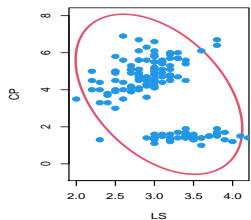
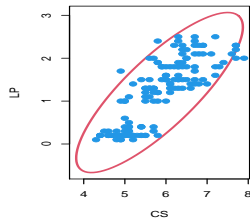
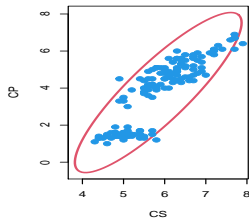
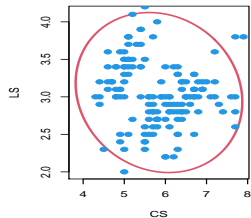
Box-plot das variáveis



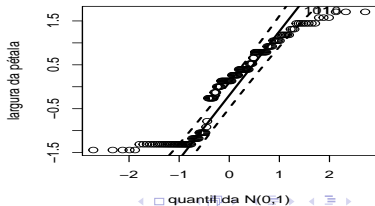
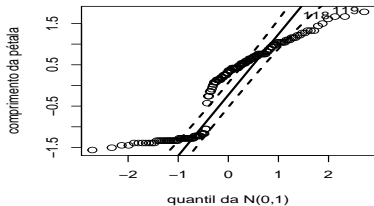
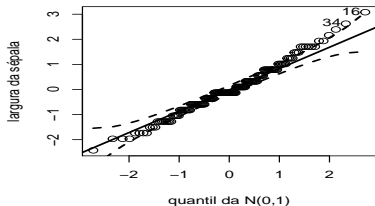
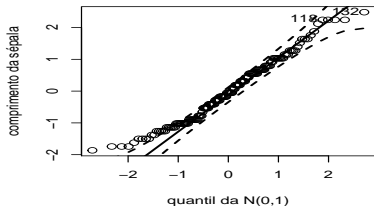
Histogramas das variáveis



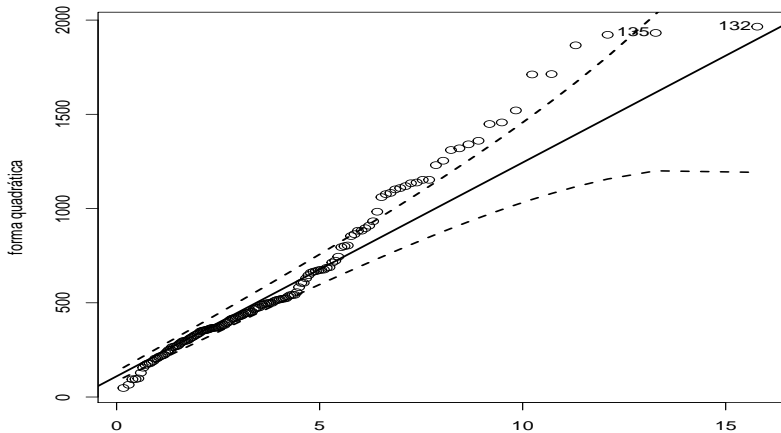
Elipsóides de 95% confiança para cada par de variáveis



Gráficos QQ plot para cada variável



Gráficos QQ plot para a forma quadrática



quantil da distribuição qui-quadrado

- Testes de Kolmogorov-Smirnov (p-valor entre parênteses):
 - CS: $D = 0,089$ ($p = 0,1891$).
 - LS: $D = 0,106$ ($p = 0,0723$).
 - CP: $D = 0,198$ ($p < 0,0001$).
 - LP: $D = 0,173$ ($p < 0,0003$).