Família de localização-escala

Prof. Caio Azevedo

Família de localização - escala

- Uma outra família bastante importante de distribuições é a família de localização-escala (FLE) e as respectivas famílias que são casos particulares dela (FLE).
- As aplicações da FLE vão desde a obtenção de quantidades pivotais (conceito que veremos mais adiante) até a construção de modelos de regressão (mais gerais que o modelo de regressão normal linear `http://www.ime.unicamp.br/~cnaber/Material_ME613_1S_2019.htm`)

Família de localização - escala

- Teorema : Seja $g(.)$ uma fdp, $x \in \mathcal{R}$ e $\boldsymbol{\theta} \in \Theta = \mathcal{R} \times \mathcal{R}^+$, $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)$. Então a função

$$f_X(x; \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\sigma} g\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \mathbb{1}_{\mathcal{R}}(x), \sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

é uma legítima fdp. Prova: exercício.

Família de localização

- Def: A distribuição $f_X(., \mu)$ pertence à família de localização (FL) $(\mu \in \mathcal{R})$ se $f_X(x; \mu) = g(x - \mu)\mathbb{1}_A(x)$, $A \subseteq \mathcal{R}$.
- Além disso, a distribuição de $Y = X - \mu$ não depende de μ e $\exists$ uma vac Z, $X = \mu + Z$ e $f_Z(z) = g(z)\mathbb{1}_{\mathcal{R}}(z)$.
- Exemplos.
  - $X \sim N(\mu, 1)$:
    $f_x(x; \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2}\right\} \mathbb{1}_{\mathcal{R}}(x) = g(x - \mu)\mathbb{1}_A(x)$

Família de localização

- Exemplos (cont.)
  - Exponencial deslocada (truncada):

$$f_X(x,\mu) = e^{-(x-\mu)}\mathbb{1}_{(\mu,\infty)}(x) = g(x-\mu)\mathbb{1}_{\mathcal{R}}(x).$$

  - Uniforme contínua: $X \sim U(\theta - a, \theta + a), \theta \in \mathcal{R},\ a \in \mathcal{R}$ (este, conhecido):

$$f_X(x;\theta) = \frac{1}{2a}\mathbb{1}_{(\theta-a,\theta+a)}(x) = \frac{1}{2a}\mathbb{1}_{(-a,a)}(x-\theta) = h(x-\theta)$$

  - $X \sim \text{Cauchy}(\mu, 1)$:

$$f_X(x;\mu) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+(x-\mu)^2}\mathbb{1}_{\mathcal{R}}(x)$$

Família de escala

- Def: A distribuição $f_X(., \sigma^2)$ pertence à família de escala (FES) $(\sigma^2 \in \mathcal{R}^+)$ se $f_X(x; \sigma^2) = \frac{1}{\sigma} g\left(\frac{x}{\sigma}\right) \mathbb{1}_A(x), A \subseteq \mathcal{R}$.
- Além disso, a distribuição de $Y = \frac{X}{\sigma}$ não depende de σ^2 e $\exists$ uma vac Z, $X = \sigma Z$ e $f_Z(z) = g_Z(z)\mathbb{1}_{A^*}(z)$, $A^* \subseteq \mathcal{R}$.
- Exemplos.
  - $X \sim N(0, \sigma^2)$:

$$f_x(x; \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\} \mathbb{1}_{\mathcal{R}}(x) = \frac{1}{\sigma} g\left(\frac{x}{\sigma}\right) \mathbb{1}_A(x).$$

Família de escala (cont. dos exemplos)

- Exponencial: $X \sim \exp(\theta)$,

$$f_X(x;\theta) = \frac{e^{-x/\theta}}{\theta}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x) = \frac{1}{\theta}g(x/\theta)\mathbb{1}_A(x).$$

- Uniforme contínua: Se $X \sim U(0,\theta)$,

$$f_X(x;\theta) = \frac{1}{\theta}\mathbb{1}_{(0,\theta)}(x) = \frac{1}{\theta}\mathbb{1}_{(0,1)}(x/\theta) = \frac{1}{\theta}g(x/\theta)\mathbb{1}_A(x).$$

Família de localização-escala

- Def: A distribuição $f_X(.,\boldsymbol{\theta})$ pertence à família de localização-escala (FLE) ($\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}^+$) se $f_X(x;\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\sigma} g\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \mathbb{1}_{\mathcal{R}}(x)$.
- Além disso, a distribuição de $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ não depende de $\boldsymbol{\theta}$ e $\exists$ uma vac Z, $X = \mu + \sigma Z$ e $f_Z(z) = g(z)\mathbb{1}_{\mathcal{R}}(z)$.
- Exemplos.
  - $X \sim N(\mu, \sigma^2)$:
    $f_X(x;\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \mathbb{1}_{\mathcal{R}}(x) = \frac{1}{\sigma} g\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \mathbb{1}_{\mathcal{R}}(x)$.

Família de localização-escala (cont. dos exemplos)

- $X \sim \text{Cauchy}(\mu, \sigma^2)$:

$$f_X(x; \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\pi\sigma} \frac{1}{1 + \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \mathbb{1}_{\mathcal{R}}(x) = \frac{1}{\sigma} g\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \mathbb{1}_{\mathcal{R}}(x).$$

- $X \sim \text{Laplace}(\mu, \sigma)$:

$$\frac{1}{2\sigma} \exp\left\{-\left|\frac{x-\mu}{\sigma}\right|\right\} \mathbb{1}_{\mathcal{R}}(x) = \frac{1}{\sigma} g\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \mathbb{1}_{\mathcal{R}}(x).$$

Família de localização-escala

- Teorema: Seja g uma fdp, $\mu \in \mathcal{R}, \sigma^2 \in \mathcal{R}^+$. Então X é uma vac com fdp

$$f_x(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\sigma} g\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \mathbb{1}_{A^*}(x), A^* \subseteq \mathcal{R}$$

se, e somente se, $\exists$ uma vac Z, $X = \mu + \sigma Z$ e $f_Z(z) = g(z)\mathbb{1}_{A^*}(z), A^* \subseteq \mathcal{R}$.

Família de localização-escala

- Dem: ($\leftarrow$) Defina $x = \mu + \sigma z = h(z)$. Dessa forma $x = g(z)$ é uma transformação 1 a 1, logo $z = h^{-1}(x)$. Pelo método do Jacobiano temos que:

$$f_X(x; \boldsymbol{\theta}) = \left| \frac{d}{dx} h^{-1}(x) \right| f_Z(h^{-1}(x); \boldsymbol{\theta})$$

mas $h^{-1}(x) = \frac{x-\mu}{\sigma} \rightarrow f_X(x; \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\sigma} f_Z\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma} g\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \mathbb{1}_A(x)$

Família de localização-escala

- Dem: $(\rightarrow)$ Seja $f_X(x;\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\sigma} g\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \mathbb{1}_A(x)$ defina $h(x) = \frac{x-\mu}{\sigma}$.
- Seja $z = h(x)$. Como h é uma transformação 1 a 1, temos que $x = z\sigma + \mu = h^{-1}(z)$. Portanto, pelo método do Jacobinao, temos que:

$$
\begin{aligned}
f_Z(z;\boldsymbol{\theta}) &= \left|\frac{d}{dz} h^{-1}(z)\right| f_X(h^{-1}(z)) = \\
&= \frac{\sigma}{\sigma} g(z) \mathbb{1}_{A^*}(z) = g(z) \mathbb{1}_{A^*}(z) = f_Z(z)
\end{aligned}
$$