Aula de Exercícios 4: Teorema de Bayes e Probabilidade Condicional

Notas de Aula da Professora Verónica González-López, digitadas por Beatriz Cuyabano, Pós-Graduação IMECC/UNICAMP, com modificações do Prof. Caio Azevedo

Teorema de Bayes

Exemplo

Suponha que 30% dos empregados de uma empresa são mulheres e o restante, homens. Além disso, $3/10$ das mulheres são fumantes, enquanto que $11/70$ dos homens são fumantes. Calcule:

- [(a)] A probabilidade de um indivíduo sorteado ser mulher e fumante;
- [(b)] A probabilidade de um indivíduo sorteado ser homem e fumante;
- [(c)] A probabilidade de um homem ser fumante;
- [(d)] A probabilidade de um homem ser não fumante;
- [(e)] A probabilidade de um fumante ser homem.

Fonte: Prof. Mario Gneri, Notas de Aula.

Teorema de Bayes

- [(a)] Conhecemos $P(\text{mulher}) = \dfrac{3}{10}$, e além disso, $P(\text{fumante}|\text{mulher}) = \dfrac{15}{100}$. Então a probabilidade do evento "mulher e fumante" ($\{\text{mulher} \cap \text{fumante}\}$), é dada por

$$\begin{aligned} P(\text{mulher} \cap \text{fumante}) &= P(\text{fumante}|\text{mulher})P(\text{mulher}) \\ &= \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{9}{100}. \end{aligned}$$

Teorema de Bayes

- [(b)] De maneira similar, temos que

$$
\begin{aligned}
P(\text{homem} \cap \text{fumante}) &= P(\text{fumante}|\text{homem})P(\text{homem}) \\
&= \frac{7}{10} \times \frac{11}{70} = \frac{11}{100}.
\end{aligned}
$$

Teorema de Bayes

- [(c)] Aqui, estamos analisando uma restrição da população, isto é, "dentre os homens, quais são fumantes"? O evento em questão é $\{\text{fumante}|\text{homem}\}$ e a probabilidade é dada pelo enunciado,

$$P(\text{fumante}|\text{homem}) = \frac{11}{70}.$$

Teorema de Bayes

- [(d)] Temos que

$$P(\text{fumante}^c|\text{homem}) = 1 - P(\text{fumante}|\text{homem}) = \frac{59}{70}.$$

pois a probabilidade condicional preserva a propriedade de complemento da probabilidade, isto é, $P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$.

Teorema de Bayes

- [(e)] Para encontrar esta probabilidade, devemos utilizar o Teorema de Bayes, isto é,

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}.$$

No contexto do problema, queremos calcular $P(\text{homem}|\text{fumante})$, que é dadapor

$$P(\text{homem}|\text{fumante}) = \frac{P(\text{fumante}|\text{homem})P(\text{homem})}{P(\text{fumante})}$$

Teorema de Bayes

- [(e)] Note, contudo, que não sabemos qunto é a $P(\text{fumante})$. Assim, devemos considerar o teorema da probabilidade total, ou seja:

$$\begin{aligned} P(\text{fumante}) &= P(\text{fumante}|\text{mulher})P(\text{mulher}) \\ &+ P(\text{fumante}|\text{homem})P(\text{homem}) \end{aligned}$$

Teorema de Bayes

- [(e)] Temos, então, que:

$$P(\text{fumante}) = \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} + \frac{11}{70} \times \frac{7}{10} = \frac{1}{5}.$$

- Logo,

$$P(\text{homem}|\text{fumante}) = \frac{11/70 \times 7/10}{1/5} = \frac{11}{20}.$$

Independência e Probabilidade Condicional

Exemplo

Três pessoas serão selecionadas aleatoriamente dentre um grupo de dez estagiários administrativos. Esses três formarão um comitê com três cargos diferentes: o primeiro será nomeado coordenador, o segundo fiscal e o terceiro secretário.

Metade do grupo são estudantes de último ano de graduação, sem nenhuma experiência dentro da empresa. Os outro cinco são estagiários há um semestre, e já concorrem por uma vaga efetiva na empresa.

Independência e Probabilidade Condicional

Exemplo

1. [(1)] Qual é a probabilidade de um dos veteranos ser o coordenador do comitê?
2. [(2)] Mostre que o evento $A = \{$O coordenador é um estagiário antigo$\}$ não é independente do evento: número de estagiários novos no comitê.
3. [(3)] Se o comitê tem dois estagiários novos, qual é a probabilidade de que o coordenador seja o estagiário antigo?
4. [(4)] Se o comitê tem pelo menos dois estagiários novos, qual é a probabilidade de que o coordenador seja um estagiário novo?

Independência e Probabilidade Condicional

- O espaço amostral (configurações possíveis para a formação do comitê) é dado por:

$$H = \{nnn, nna, nan, ann, naa, ana, aan, aaa\},$$

  em que a ordem representa os cargos (coordenador, fiscal, secretário) e a indica um estagiário antigo, enquanto n um estagiário novo.

- Defina o evento $A = \{\text{O coordenador é um estagiário antigo}\}$, de modo que $A^c = \{\text{O coordenador é um estagiário novo}\}$. Defina também os eventos B_0, B_1, B_2 e B_3, associados ao número de estagiários novos no comitê.

Independência e Probabilidade Condicional

- Para cada configuração, temos as seguintes probabilidades:

Evento	Probabilidade
nnn	$5/10 \times 4/9 \times 3/8 = 3/36$
nna	$5/10 \times 4/9 \times 5/8 = 5/36$
nan	$5/10 \times 5/9 \times 4/8 = 5/36$
ann	$5/10 \times 5/9 \times 4/8 = 5/36$
naa	$5/10 \times 5/9 \times 4/8 = 5/36$
ana	$5/10 \times 5/9 \times 4/8 = 5/36$
aan	$5/10 \times 4/9 \times 5/8 = 5/36$
aaa	$5/10 \times 4/9 \times 3/8 = 3/36$

Independência e Probabilidade Condicional

- Observando os pontos amostrais na tabela anterior (nnn, nna, etc.), podemos construir uma tabela de "distribuição de probabilidade" para B, ou seja se:

$$
\begin{aligned}
B_0 &= \{aaa\}, \\
B_1 &= \{naa, ana, aan\} \\
B_2 &= \{nna, nan, ann\} \\
B_3 &= \{nnn\},
\end{aligned}
$$

então

	$P(B_0)$	$P(B_1)$	$P(B_2)$	$P(B_3)$
Probabilidade	3/36	15/36	15/36	3/36

Independência e Probabilidade Condicional

- [(1)] Temos que essa probabilidade pode ser extraída da primeira tabela. Ela corresponde aos eventos *ann*, *aan*, *ana* e *aaa*. Como os eventos são disjuntos, a probabilidade de $A = \{$O coordenador é um estagiário antigo$\}$ é dada por

$$P(A) = P(\{ann\}) + P(\{aan\}) + P(\{ana\}) + P(\{aaa\})$$

$$P(A) = \frac{5}{36} + \frac{5}{36} + \frac{5}{36} + \frac{3}{36} = \frac{1}{2}.$$

Independência e Probabilidade Condicional

- [(2)] Embora seja intuitivo dizer que os eventos são dependentes (afinal, quanto mais estagiários antigos no comitê, maiores são as chances do coordenador ser um deles), devemos mostrar que a distribuição conjunta dos eventos não staisfaz a definição de independência, a saber,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \Leftrightarrow A \text{ e } B \text{ são independentes}$$

- Com efeito, considere novamente a tabela. Temos que o evento $A \cap B_3 = \emptyset$, pois não há estagiários antigos em B_3 e, além disso, $A \cap B_2 = \{ann\}$, $A \cap B_1 = \{ana, aan\}$ e $A \cap B_0 = \{aaa\}$.

Independência e Probabilidade Condicional

- [(2)] (cont.) Temos que

$$\begin{aligned} P(A \cap B_0) &= P(\{aaa\}) &= \tfrac{3}{36} \neq \tfrac{1}{2} \times \tfrac{3}{36} = P(A)P(B_0), \\ P(A \cap B_1) &= P(\{ana, aan\}) &= \tfrac{10}{36} \neq \tfrac{1}{2} \times \tfrac{15}{36} = P(A)P(B_1), \\ P(A \cap B_2) &= P(\{ann\}) &= \tfrac{5}{36} \neq \tfrac{1}{2} \times \tfrac{15}{36} = P(A)P(B_2), \\ P(A \cap B_3) &= P(\emptyset) &= 0 \neq \tfrac{1}{2} \times \tfrac{3}{36} = P(A)P(B_3) \end{aligned}$$

- Ou seja, os eventos A e B_k, $k = 1, 2, 3, 4$ são dependentes (A $\perp B_k$), $k = 1, 2, 3, 4$.

Independência e Probabilidade Condicional

- [(3)] Queremos calcular $P(A|B_2)$. Pela definição de probabilidade condicional, vem que

$$P(A|B_2) = \frac{P(B_2 \cap A)}{P(B_2)} = \frac{5/36}{15/36} = \frac{5}{15}.$$

- [(4)] Queremos, agora, calcular $P(A|\{B_2 \cup B_3\})$. Temos que

$$P(A|\{B_2 \cup B_3\}) = \frac{P(A \cap \{B_2 \cup B_3\})}{P(B_2 \cup B_3)} = \frac{P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3)}{P(B_2) + P(B_3)},$$

pois $B_2 \cap B_3 = \emptyset$. Basta conferir as “distribuições conjuntas” no item (2) para determinar que $P(A|\{B_2 \cup B_3\}) = 5/18$.

Teorema de Bayes

Exemplo

Uma companhia multinacional tem três fábricas que produzem o mesmo tipo de produto. A fábrica I é responsável por 30% do total produzido, a fábrica II produz 45% do total, e o restante vem da fábrica III. Cada uma das fábricas, no entanto, produz uma proporção de produtos que não atendem aos padrões estabelecidos pelas normas internacionais. Tais produtos são considerados "defeituosos" e correspondem a 1%, 2% e 1,5%, respectivamente, dos totais produzidos por fábrica.

No centro de distribuição, é feito o controle de qualidade da produção combinada das fábricas.

Teorema de Bayes

Exemplo

1. [(1)] Qual é a probabilidade de encontrar um produto defeituoso durante a inspeção de qualidade?
2. [(2)] Se durante a inspeção, encontramos um produto defeituoso, qual é a probabilidade que ele tenha sido produzido na fábrica II?

Teorema de Bayes

- [(1)] Seja o evento $A = \{\text{Produto Defeituoso}\}$ e $F_i = \{\text{Produto da Fábrica } i\}$. Sabemos, pelo enunciado, que $P(F_1) = \frac{30}{100}$, $P(F_2) = \frac{45}{100}$ e $P(F_3) = \frac{25}{100}$. Além disso, sabemos que $P(A|F_1) = \frac{10}{1000}$, $P(A|F_2) = \frac{20}{1000}$ e $P(A|F_3) = \frac{15}{1000}$.
- Então, pela teorema da probabilidade total, temos que

$$\begin{aligned} P(A) &= P(F_1)P(A|F_1)+P(F_2)P(A|F_2)+P(F_3)P(A|F_3) \quad (1) \\ &= \frac{30}{100}\times\frac{10}{1000}+\frac{45}{100}\times\frac{20}{1000}+\frac{25}{100}\times\frac{15}{1000} \\ &= \frac{300}{10000}+\frac{900}{10000}+\frac{375}{10000}=\frac{1575}{10000}. \end{aligned}$$

Teorema de Bayes

- [(2)] Aplicando o Teorema de Bayes e usando o item anterior para encontrar $P(A)$, temos que:

$$P(F_2|A) = \frac{P(A|F_2)P(F_2)}{P(A)} = \frac{\frac{20}{1000} \times \frac{45}{100}}{\frac{1125}{10000}} = \frac{900}{1575}.$$

Probabilidade Condicional

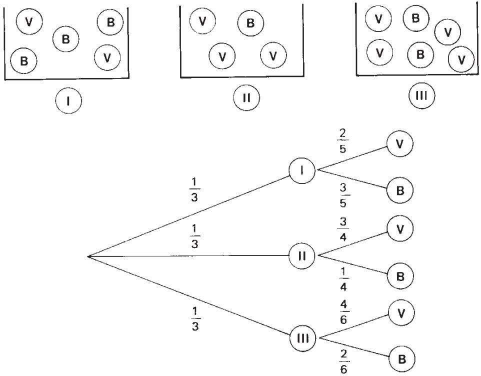
Exemplo

Uma certa urna (urn I) tem 2 bolas vermelhas (V) e 3 brancas (B); outra urna (urna II) tem 3 bolas vermelhas e uma branca, e a urna III tem 4 bolas vermelhas e 2 brancas. Uma urna é selecionada ao acaso e dela é extraída uma bola. Qual a probabilidade da bola ser vermelha?

Fonte: Hazzan, Matemática Elementar: Combinatória e Probabilidade, pág 103-E.

Probabilidade Condicional

- Considere o diagrama abaixo:



Probabilidade Condicional

- Note que os eventos U_I (sortear a urna I), U_{II} (sortear a urna I) e U_{III} (sortear a urna III) são uma partição de Ω, isto é, $\Omega = U_I \dot{\cup} U_{II} \dot{\cup} U_{III}$, em que $\dot{\cup}$ representa a união disjunta, ou seja $U_i \bigcap U_j = \emptyset, i, j \in \{I, II, III\}, i \neq j$.
- Então o evento $V =$ sair bola vermelha tem probabilidade dada por

$$P(V) = P(U_I \cap V) + P(U_{II} \cap V) + P(U_{III} \cap V).$$

Probabilidade Condicional

- Contudo, pelo diagrama anterior, notamos que $P(U_I \cap V) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$, $P(U_{II} \cap V) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ e $P(U_{III} \cap V) = \frac{1}{3} \times \frac{4}{6} = \frac{2}{9}$. Então, temos que:

$$P(V) = \frac{2}{15} + \frac{1}{4} + \frac{2}{9} = \frac{109}{180}.$$

Teorema de Bayes

Exemplo

Considere uma urna com bolas pretas e vermelhas, de onde sorteamos aleatoriamente bolas, sem reposição. Adicionamente:

- [(a)] Suponha que temos apenas uma bola preta e uma vermelha. Se na segunda extração tirarmos uma bola vermelha, qual a probabilidade da primeira extração ter sido de uma bola preta?
- [(b)] Suponha que temos três bolas pretas e duas vermelhas. Se na segunda extração tirarmos uma bola vermelha, qual a probabilidade da primeira extração ter sido de uma bola preta?

Teorema de Bayes

- O objetivo do item (a) é justificar que nem sempre trabalhamos com probabilidades condicionadas em algum instante anterior do tempo. Seja X_1 a primeira extração e X_2 a segunda extração.
  - [(a)] Sem ser condicionalmente, a probabilidade de $X_1 = V$ seria igual a probabilidade de $X_1 = P$, ou seja, $1/2$. Mas sabemos que ocorreu $X_2 = V$, então a primeira bola a ter sido retirada foi necessariamente preta. Temos, então, que, embora X_2 tenha ocorrido no futuro, já sabemos a informação sobre esse evento e portanto devemos atualizar a probabilidade de interesse.

Teorema de Bayes

- [(a)] (cont.) Formalmente, considere $P(X_1 = P|X_2 = V)$. Então

$$P(X_1 = P|X_2 = V) = \frac{P(X_2 = V|X_1 = P)P(X_1 = P)}{P(X_2 = V)},$$

mas $P(X_2 = V|X_1 = P) = 1$, pois só temos duas bolas na urna. Sabemos que $P(X_1 = P) = 1/2$.

Teorema de Bayes

- [(a)] (cont.) Já $P(X_2 = V)$ deve ser determinado pela teorema da probabilidade total, ou seja

$$\begin{aligned} P(X_2 = V) &= P(X_2 = V|X_1 = P)P(X_1 = P) \\ &+ P(X_2 = V|X_1 = V)P(X_1 = V). \end{aligned}$$

- Contudo, novamente, $P(X_2 = V|X_1 = V) = 0$ pois não há reposição e $P(X_2 = V|X_1 = P) = 1$. Então

$$P(X_1 = P|X_2 = V) = \frac{1 \times \frac{1}{2}}{0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2}} = 1$$

Teorema de Bayes

- [(b)] Novamente queremos $P(X_1 = P|X_2 = V)$, ou seja

$$P(X_1 = P|X_2 = V) = \frac{P(X_2 = V|X_1 = P)P(X_1 = P)}{P(X_2 = V)}.$$

- Contudo, sabemos que $P(X_1 = V) = 2/5$ e $P(X_1 = P) = \frac{3}{5}$. Além disso, $P(X_2 = V|X_1 = V) = \frac{1}{4}$, e $P(X_2 = V|X_1 = P) = \frac{1}{2}$.

Teorema de Bayes

- [(b)] Agora, para determinar $P(X_2 = V)$, devemos usar o teorema da probabilidade total, ou seja:

$$\begin{aligned} P(X_2 = V) &= P(X_2 = V|X_1 = P)P(X_1 = P) \\ &\quad + P(X_2 = V|X_1 = V)P(X_1 = V) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Teorema de Bayes

- Então a probabilidade da primeira extração resultar em bola preta, dado que a segunda bola erxtraída fora vermelha, é simplesmente:

$$
\begin{aligned}
P(X_1 = P|X_2 = V) &= \frac{P(X_2 = V|X_1 = P)P(X_1 = P)}{2/5} \\
&= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{3}{4} \neq \frac{3}{5} = P(X_1 = P).
\end{aligned}
$$