# Aula de Exercícios 3: Análise Combinatória e Probabilidade Condicional

Notas de Aula da Professora Verónica González-López, digitadas por Beatriz Cuyabano, Pós-Graduação IMECC/UNICAMP, com modificações do Prof. Caio Azevedo

# Técnicas de Contagem

## Exemplo

Para a Copa do Mundo 24 países são divididos em seis grupos, com 4 países cada um. Supondo que a escolha do grupo de cada país é feita ao acaso, calcule a probabilidade de que dois países determinados, digamos $A$ e $B$, fiquem no mesmo grupo (suponha que há posições definidas dentro de cada grupo).

*Fonte: Morgado, Carvalho, Carvalho & Fernandez*, Análise Combinatória e Probabilidade, pág 125.

# Técnicas de Contagem

- Vamos tomar como espaço amostral o conjunto de todas as permutações de 24 elementos, ou seja **o número de casos possíveis é 24!**.
- Agora, cada um dos 24 times serão divididos em 6 grupos de 4 times.

| I | II | III | IV | V | VI |
|---|---|---|---|---|---|
| ●●●● | ●●●● | ●●●● | ●●●● | ●●●● | ●●●● |

- Quantas permutações existem tais que $A$ e $B$ pertençam ao mesmo grupo? Consideremos, primeiramente, o grupo I. $A$ pode ser colocado em 4 lugares. Restam para $B$ 3 lugares no mesmo grupo, e os times restantes podem ser dispostos de 22! maneiras diferentes.

# Técnicas de Contagem

- Portanto o número de permutações com $A$ e $B$ no primeiro grupo é

$$4 \times 3 \times 22!.$$

- Contudo, como temos 6 grupos, a probabilidade procurada é igual ao número de casos favoráveis sobre os possíveis, ou simplesmente

$$\frac{6 \times 4 \times 3 \times 22!}{24!} = \frac{3}{23} \approx 0{,}13$$

# Probabilidade Condicional

## Exemplo

Consideremos dois dados: um deles equilibrado, com $P(\{1\}) = \ldots = P(\{6\}) = 1/6$, e outro viciado, com $P(\{1\}) = 1/2$ e $P(\{2\}) = \ldots = P(\{6\}) = 1/10$. Escolhe-se um dos dados ao acaso e se efetuam dois lançamentos, obtendo-se dois uns. Qual a probabilidade condicional de que o dado escolhido tenha sido o viciado?

*Fonte: Morgado, Carvalho, Carvalho & Fernandez*, Análise Combinatória e Probabilidade, pág 148.

# Probabilidade Condicional

- Temos que cada dado é escolhido com probabilidade $1/2$. Por outro lado, a probabilidade de observar $\{1, 1\}$ em dois lançamentos de um dado não viciado é $1/6 \times 1/6 = 1/36$. Para o dado viciado, temos que essa probabilidade é igual a $1/2 \times 1/2 = 1/4$.
- A probabilidade do evento $E =$"observar dois uns" é dada pela união dos eventos $E_1 =$"sortear o dado viciado e observar dois uns" e $E_2 =$"sortear o dado equilibrado e observar dois uns". Defina ainda o evento V: o dado selecionado fora o viciado. Assim (slide seguinte),

# Probabilidade Condicional

- (Cont.)

$$
\begin{aligned}
P(E) &= P(E_1) + P(E_2) = P(V \cap \{1,1\}) + P(\overline{V} \cap \{1,1\}) \\
&= P(V)P(\{1,1\}|V) + P(\overline{V})P(\{1,1\}|\overline{V}) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{36} = \frac{5}{36}.
\end{aligned}
$$

# Probabilidade Condicional

- Por outro lado, a probabilidade do evento A: dado escolhido ser o viciado, dado que se observou dois uns (evento E), é dada por:

$$P(A|E) \quad = \quad \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{P(A)P(E|A)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}}{\frac{5}{36}} = \frac{9}{10}.$$

# Probabilidade Condicional

## Exemplo

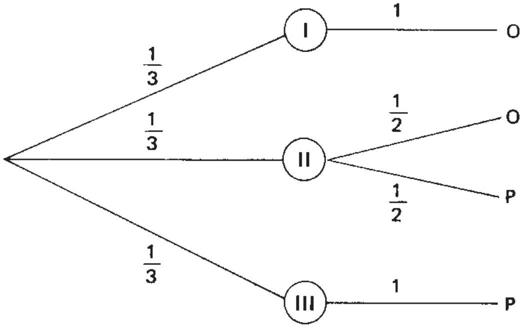
Esse problema é conhecido como *Problema da moeda de Bertrand*.

Existem três caixas idênticas. A primeira contém duas moedas de ouro, a segunda contém uma de ouro e outra de prata, e a terceira contém duas moedas de prata. Uma caixa é selecionada ao acaso e da mesma é escolhida uma moeda ao acaso. Se a moeda é de ouro, qual a probabilidade de que a outra moeda da caixa escolhida também seja de ouro?

*Fonte: Hazzan*, Matemática Elementar: Combinatória e Probabilidade, pág 104-E.

# Probabilidade Condicional

- Considere a seguinte árvore de probabilidades:



# Probabilidade Condicional

- Note que o problema pode ser reformulado da seguinte forma: "Se a moeda sorteada é de ouro, qual a probabilidade de que ela tenha vindo da caixa I?", (a caixa I é a única que contém duas moedas de ouro).
- Sejam os eventos:
  - $C_I$: A caixa sorteada é a I.
  - $C_{II}$: A caixa sorteada é a II.
  - $C_{III}$: A caixa sorteada é a III.
  - $O$: A moeda sorteada é de ouro.

# Probabilidade Condicional

- Note que $\Omega = C_I \cup C_{II} \cup C_{III}$ I(partição), e consequentemente, temos que:

$$\begin{aligned} P(O) &= P(C_I \cap O) + P(C_{II} \cap O) + P(C_{III} \cap O) \\ &= \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

- Como $P(C_I \cap O) = 1/3$, temos, simplesmente, que

$$P(C_I | O) = \frac{P(C_I \cap O)}{P(O)} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}.$$

- Ou seja, a probabilidade de que a outra moeda também seja de ouro é de $2/3$.

# Independência

## Exemplo

Dizemos que os eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são independentes se $P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \ldots P(A_{i_k})$. Para apenas dois eventos, $A$ e $B$, isso significa que $A$ e $B$ são independentes se $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Mostre um caso $n = 3$ onde vale a independência 2 a 2, mas os eventos não são independentes.

*Fonte: Morgado, Carvalho, Carvalho & Fernandez*, Análise Combinatória e Probabilidade, pág 154.

# Independência

- Considere o espaço amostral $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, e considere que $P(\omega_i) = 1/4$, $i = 1, 2, 3, 4$.
- Defina agora os eventos $A = \{\omega_1, \omega_3\}$, $B = \{\omega_2, \omega_3\}$ e $C = \{\omega_3, \omega_4\}$.
- Assim, temos que $P(A) = P(B) = P(C) = 1/2$. Além disso,

$$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{1}{4},$$

  ou seja, os eventos são, dois a dois, independentes.
- Contudo,

$$P(A \cap B \cap C) = P(\{\omega_3\}) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A)P(B)P(C).$$

# Independência

## Exemplo

Um jogador deve enfrentar, em um torneio, dois outros, chamados $A$ e $B$. Os resultados dos jogos são independentes e as probabilidades dele ganhar de $A$ e de $B$ são $1/3$ e $2/3$, respectivamente. O jogador vencerá o torneio se ganhar dois jogos consecutivos, de uma série de 3. Que série de jogos é mais favorável para o jogador: $ABA$ ou $BAB$?

*Fonte: Morgado, Carvalho, Carvalho & Fernandez*, Análise Combinatória e Probabilidade, pág 155.

# Independência

- A probabilidade do jogador vencer se escolher a primeira série é (i) ganha de $A$, ganha de $B$ ou (ii) perde para $A$, ganha de $B$ e ganha de $A$. Ou seja:

$$P(ABA) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{10}{27}.$$

- Analogamente, a probabilidade do jogador vencer se escolher a segunda série $BAB$ é:

$$P(BAB) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}.$$

# Independência

- A primeira série é mais favorável. Este resultado parece surpreendente pois $A$ é um adversário mais difícil, e o jogador deve enfrentá-lo duas vezes na primeira série.
- O que acontece intuitivamente é que o jogo com $A$ na segunda série é decisivo. Na primeira série, o jogador tem duas oportunidades para derrotar $A$.

# Independência

## Exemplo

- [(a)] Um dado equilibrado é lançado quatro vezes. Os lançamentos são independentes. Qual a probabilidade de observar a face 6 pelo menos uma vez?
- [(b)] Dois dados equilibrados são lançados simultaneamente, 10 vezes. Os lançamentos são independentes. Qual a probabilidade de observar a dupla de 6 pelo menos uma vez?

# Independência

- [(a)] Seja $A$ o evento "observar a face 6 pelo menos 1 vez". Temos que

$$P(A) = 1 - P(A^c),$$

em que $A^c$ é o evento "não observar a face 6 nenhuma vez".

- Para esse evento ($A^c$) é mais fácil de determinar a probabilidade, pois cada lançamento é independente, e a probabilidade de não observarmos 6 em um dado lançamento é igual a $5/6$.
- Então $P(A^c) = (5/6)^4$, pela independência, e consequentemente $P(A) = 1 - (5/6)^4$.

# Independência

- [(b)] Considere $A$ o evento "dupla de 6 pelo menos uma vez".
- Novamente, é mais fácil considerar $A^c$ = "dupla de 6 não é observada nenhuma vez".
- Temos que $P(A) = 1 - P(A^c)$. Como $P(\{6,6\}) = 1/36$, então

$$P(A^c) = (35/36)^{10}.$$

- Logo $P(A) = 1 - (35/36)^{10}$.

# Independência

## Exemplo

Peças são produzidas em uma linha de produção. A probabilidade de observar uma peça defeituosa é 0,10. Selecionamos uma amostra de tamanho 10. Qual a probabilidade de obter duas peças defeituosas nesta amostra? As peças são selecionadas independentemente.

# Independência

- Seja D o evento "a peça é defeituosa", e B o evento "a peça é boa". Então $P(D) = 0{,}1$ e $P(B) = 0{,}9$.
- Seja, agora, o evento $A$ = "duas peças defeituosas na amostra". Como a ordem em que essas peças são sorteadas não importa, temos que são favoráveis os casos

$$\{DDBBBBBBBB, DBDBBBBBBB, \ldots, BBBBBBBBDD\},$$

# Independência

- Ao todo temos $\binom{10}{2}$ casos. Pela independência, todos tem probabilidade $0{,}1^2 0{,}9^8$. Então, temos que

$$P(A) = \binom{10}{2} 0{,}1^2 0{,}9^8 = 0{,}1937.$$

# Exercícios Complementares: Contagem

## Exercícios (devem ser resolvidos pelo aluno)

- [(1)] Quantos números diferentes de 4 algarismos distintos existem no sistema decimal de enumeração?
- [(2)] Quantos números ímpares diferentes de 4 algarismos distintos existem no sistema decimal de enumeração?
- [(3)] Quantos números, compreendidos entre 3000 e 4000, podemos formar com os algarismos 2, 3, 4, 6, 8 e 9, de modo que não se considerem algarismos repetidos?

# Exercícios Complementares: Contagem

## Exercício

- [(4)] Num grupo de 5 pessoas, duas são irmãs. O número de maneiras distintas pelas quais elas podem ficar em fila, de modo que as duas irmãs sempre fiquem juntas é igual a?
- [(5)] Quantos números ímpares compreendidos entre 2000 e 7000 podemos formar com os algarismos 2, 3, 4, 6, 8 e 9, de modo que não tenham números repetidos?

# Exercícios Complementares: Contagem

**Exercício**

- [(6)] Sobre uma reta ($R1$) marca-se 7 pontos e sobre uma outra reta ($R2$), paralela a primeira reta, marca-se 4 pontos. Qual o número de triângulos que obtemos unindo 3 dos quaisquer dos 11 pontos?
- [(7)] Em uma reunião há 12 rapazes, 4 dos quais usam óculos e 16 moças, 6 das quais usam óculos. De quantas maneiras possíveis podem ser formados casais para dançar, se quem usa óculos só quer fazer par com quem não usa óculos?

# Exercícios Complementares: Contagem

## Exercício

- [(8)] Para diminuir o emplacamento de carros roubados, um determinado país resolveu fazer um cadastro nacional, em que as placas são formadas com 3 letras e 4 algarismos, sendo que a primeira letra da placa determina um estado desse país. Considerando o alfabeto com 26 letras, o número máximo de carros que cada estado pode emplacar será

# Exercícios Complementares: Probabilidade Condicional

## Exercícios (devem ser resolvidos pelo aluno)

- [(1)] Um experimento consiste em lançar um dado equilibrado duas vezes, independentemente. Dado que os dois números sejam diferentes, qual é a probabilidade condicional de:
  - [(1.a)] pelo menos um dos números ser 6
  - [(1.b)] a soma dos números ser 8
- [(2)] Sabe-se que de cada 5 pessoas de uma determinada comunidade, uma é portadora de um certo tipo de anemia. Se selecionarmos, ao acaso, 3 pessoas dessa comunidade, qual a probabilidade de pelo menos uma delas seja portadora daquele tipo de anemia?

# Exercícios Complementares: Probabilidade Condicional

## Exercício

- [(3)] 4 homens e 4 mulheres devem ocupar 8 lugares de um banco. Qual a probabilidade de que nunca fiquem lado a lado duas pessoas do mesmo sexo?
- [(4)] Durante o mês de novembro a probabilidade de chuva é de 0,3. O Brasil ganha o jogo em um dia com chuva com probabilidade de $0,4$, em dia sem chuva com probabilidade 0,6. Se o Brasil ganhou em novembro, qual é a probabilidade de que choveu nesse dia?

# Exercícios Complementares: Probabilidade Condicional

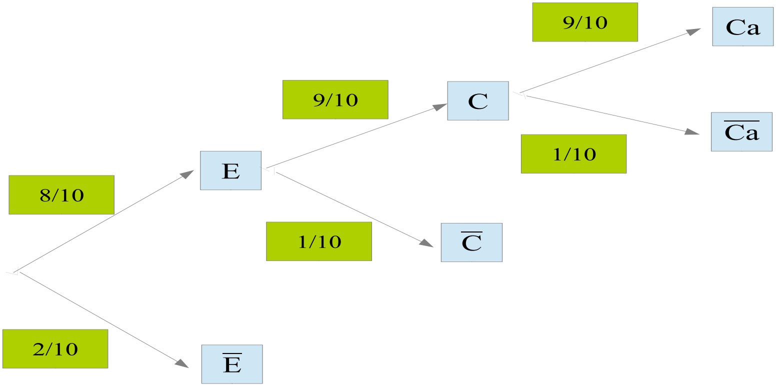
## Exercício

- [(5)] Pedro quer enviar uma carta para Mariana. A probabilidade de que Pedro escreva a carta é 0,80. A probabilidade de que o correio não a perca é de 0,90. A probabilidade de que o carteiro a entregue é 0,90. Dado que Mariana não recebeu a carta, qual é a probabilidade condicional de que Pedro não a tenha escrito?

# Exercícios Complementares: Probabilidade Condicional

- Sejam os eventos:
  - E: Pedro escreve a carta.
  - C: O correio não perda a carta.
  - Ca: O carteiro entrega a carta.
  - R: Mariana recebeu a carta.
- $P(\overline{E}|\overline{R})$?
- Inicialmente, considere a árvore de probabilidades do slide seguinte.

# Exercícios Complementares: Probabilidade Condicional



# Exercícios Complementares: Probabilidade Condicional

- Temos que

$$P(\overline{E}|\overline{R}) = \frac{P(\overline{E}\cap\overline{R})}{P(\overline{R})} = \frac{P(\overline{E})P(\overline{R}|\overline{E})}{P(\overline{R})} = \frac{\frac{2}{10}\times 1}{P(\overline{R})}. \quad (1)$$

- Mas

$$\begin{aligned} P(\overline{R}) &= P(\overline{E}\cup(E\cap\overline{C})\cup(E\cap C\cap\overline{Ca})) \\ &= P(\overline{E}) + P(E\cap\overline{C}) + P(E\cap C\cap\overline{Ca}) \\ &= \frac{2}{10} + \frac{8}{10}\frac{1}{10} + \frac{8}{10}\frac{9}{10}\frac{1}{10} = \frac{200+80+72}{1000} \\ &= \frac{352}{1000}. \quad (2) \end{aligned}$$

# Exercícios Complementares: Probabilidade Condicional

- Assim, da Equação (2) em (1), vem que

$$P(\overline{E}|\overline{R}) = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{352}{1000}} = \frac{100}{176}.$$

- À rigor, a forma mais simples de resolver este problema é cacular $P(R)$ e, posteriormente, $P(\overline{R}) = 1 - P(R)$. Com efeito, note que

$$P(R) = P(E \cap C \cap Ca) = \frac{8}{10} \times \frac{9}{10} \times \frac{9}{10} = \frac{648}{1000}.$$

- Logo, $P(\overline{R}) = 1 - \frac{648}{1000} = \frac{352}{1000}$. (CQD)