Aula de Exercícios 2: Análise Combinatória e Probabilidade

Notas de Aula da Professora Verónica González-López, digitadas por Beatriz Cuyabano, Pós-Graduação IMECC/UNICAMP, com modificações do Prof. Caio Azevedo

Técnicas de Contagem

- Revisitando os conceitos de permutações e combinações (link).
- *Permutações* são os arranjos de elementos nos quais se considera a ordem com que são selecionados (escolhidos). Através dela calculamos de quantas formas podemos obter uma amostra de tamanho n, de uma população com tamanho N.

$$_{N}P_{n} = \frac{N!}{(N-n)!}$$

Técnicas de Contagem

- *Combinações* são arranjos nos quais não considera a ordem dos elementos. Se o objetivo é ter amostras sem repetição, temos:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!},$$

que também pode ser denotado por $C(n, r)$ ou C_r^n.

Técnicas de Contagem

- Podemos fazer combinações com elementos repetidos, também. Nesse caso, $C_r(n, k) = C(n + k - 1, k)$ ("r" denota repetição).
- Na Equação (1) as bolinhas (k) representam a quantidade de elementos da amostra, enquanto que as barrinhas (n-1) estão relacionadas com a quantidade de elementos da população.

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = k \leftrightarrow \bullet \bullet \,|\, \bullet \bullet \bullet \,|...| \tag{1}$$

Técnicas de Contagem

- Essencialmente, a Equação (1) indica de quantas formas podemos "decompor" o número k em n variáveis ($k, n \in \mathcal{N}$). Tal solução é dada por

$$C(n+k-1, k) = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!},$$

pois a permutação entre os pontos e entre as hastes, geram as mesmas soluções.

Técnicas de Contagem - Um Exemplo

- Suponha uma população com $N = 6$ elementos e que queremos sortear amostras de tamanho 2. Vamos considerar as seguintes possibilidades de sorteio:
  1. Com ordem e repetição.
  2. Com ordem e sem repetição.
  3. Sem ordem e com repetição.
  4. Sem ordem e sem repetição.
  5. Só repetição.

Técnicas de Contagem - Um Exemplo

- *Caso 1*: Com ordem e com repetição é quando sorteamos, por exemplo, duas vezes seguidas. Temos $6 \times 6 = 36$ possibilidades. Assim, temos que Ω é dado por:

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Técnicas de Contagem - Um Exemplo

- *Caso 2*: Se queremos a amostra com ordem e sem repetições, temos ${}_6P_4 = \frac{6!}{4!} = 30$ possibilidades. Assim, temos que Ω é dado por:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\
(2,1) & & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\
(3,1) & (3,2) & & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\
(4,1) & (4,2) & (4,3) & & (4,5) & (4,6) \\
(5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & & (5,6) \\
(6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) &
\end{array}
$$

Técnicas de Contagem - Um Exemplo

- *Caso 3*: Se queremos a amostra sem ordem, mas com repetições, temos $C_r(6,2) = \binom{6+2-1}{2} = 21$ possibilidades. Assim, temos que Ω é dado por:

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
		(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
			(4,4)	(4,5)	(4,6)
				(5,5)	(5,6)
					(6,6)

Técnicas de Contagem - Um Exemplo

- *Caso 4*: Se queremos a amostra sem ordem e sem repetições, temos $C(6,2) = \binom{6}{2} = 15$ possibilidades. Assim, temos que Ω é dado por:

$$
\begin{array}{ccccc}
(1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\
 & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\
 & & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\
 & & & (4,5) & (4,6) \\
 & & & & (5,6)
\end{array}
$$

Técnicas de Contagem - Um Exemplo

- *Caso 5*: Se só queremos repetições, temos somente 6 possibilidades.

  Assim, temos que Ω é dado por:

$$\begin{matrix} (1,1) & & & & & \\ & (2,2) & & & & \\ & & (3,3) & & & \\ & & & (4,4) & & \\ & & & & (5,5) & \\ & & & & & (6,6) \end{matrix}$$

Probabilidade - Probabilidade condicional

Exemplo

Um restaurante popular apresenta apenas dois tipos de refeições: salada completa ou um prato à base de carne. Considere que 20% dos fregueses do sexo masculino preferem a salada, 30% das mulheres escolhem carne e que 75% dos fregueses são homens. Considere os seguintes eventos:

H: o freguês é homem	**A**: prefere salada
M: o freguês é mulher	**B**: prefere carne

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 122.

Probabilidade - Probabilidade condicional

- Devemos “interpretar” os dados do enunciado da seguinte forma:
  - [(i)] “20% *dos fregueses do sexo masculino preferem a salada*” diz que o evento $A|H$ tem probabilidade $P(A|H) = \frac{20}{100}$. Observe, então, que $P(A^c|H) = P(B|H) = \frac{80}{100} = 1 - P(A|H)$, ou seja, 80% dos homens preferem carne.
  - [(ii)] De modo análogo, “30% *das mulheres escolhem carne*” diz que o evento $B|M$ tem probabilidade $P(B|M) = \frac{30}{100}$.
  - [(iii)] “75% *dos fregueses são homens*” nos diz que o evento H tem $P(H) = \frac{75}{100}$.

Probabilidade - Probabilidade condicional

- Temos, adicionalmente, que:
  - [(i)] Se $P(A|H) = P(A \cap H)/P(H)$, então $P(A \cap H) = P(A|H)P(H)$. Ou seja, a probabilidade da intersecção dos eventos "cliente gosta de salada" com "cliente é homem" é igual a :

$$\frac{20}{100}\frac{75}{100} = \frac{15}{100}.$$

  - [(ii)] $P(A) = P(A|H)P(H) + P(A|M)P(M)$. Ou seja,

$$P(A) = \frac{20}{100}\frac{75}{100} + \frac{70}{100}\frac{25}{100} = \frac{150}{1000} + \frac{175}{1000} = \frac{325}{1000}.$$

  - Então, a probabilidade de um cliente gostar de salada é de $\frac{325}{1000}$.

Probabilidade - Probabilidade condicional

- Assim, temos a seguinte a tabela:

	Salada (A)	Carne (B)	Total
Homem (H)	$\frac{150}{1000}$	$\frac{600}{1000}$	$\frac{750}{1000}$
Mulher (M)	$\frac{175}{1000}$	$\frac{75}{1000}$	$\frac{250}{1000}$
Total	$\frac{325}{1000}$	$\frac{675}{1000}$	$\frac{1000}{1000} = 1$

Probabilidade - Probabilidade condicional

- Basta agora consultar a tabela:
  - [(a)] *Calcular* $P(H)$, $P(A|H)$ *e* $P(B|M)$

$$P(H) = \frac{75}{100}, P(A|H) = \frac{20}{100}, P(B|M) = \frac{30}{100}.$$

Note que essas probabilidades são informadas no enunciado.

Probabilidade - Probabilidade condicional

- (cont.) Basta agora consultar a tabela:
  - [(b)] *Calcular* $P(A \cap H)$ *e* $P(A \cup H)$

$$
\begin{aligned}
P(A \cap H) &= P(A|H)P(H) = \frac{20}{100}\frac{75}{100} = \frac{15}{100}, \\
P(A \cup H) &= P(A) + P(H) - P(A \cap H) \\
&= \frac{325}{1000} + \frac{750}{1000} - \frac{150}{1000} = \frac{925}{1000}
\end{aligned}
$$

  - [(c)] *Calcular* $P(M|A)$

$$
P(M|A) = \frac{P(M \cap A)}{P(A)} = \frac{175/1000}{325/1000} = \frac{175}{325}.
$$

Probabilidade - Probabilidade condicional

Exemplo

As probabilidades de três motoristas serem capazes de guiar até em casa com segurança, depois de beber, são de 1/3, 1/4 e 1/5, respectivamente. Se decidirem guiar até em casa, depois de beber numa festa, qual a probabilidade de todos os três motoristas sofrerem acidentes? Qual a probabilidade de pelo menos um dos motoristas guiar até em casa a salvo?

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 122.

Probabilidade - Probabilidade condicional

- Considere os seguintes eventos:

  A: Primeiro Motorista sofre acidente

  B: Segundo Motorista sofre acidente

  C: Terceiro Motorista sofre acidente

- Temos que P(A) $= 2/3$, P(B) $= 3/4$ e P(C) $= 4/5$, respectivamente. Assuma também que eles são independentes entre si.
- Então P(todos sofrerem acidentes) $= P(A \cap B \cap C)$ mas, pela independência, temos que $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$ que é igual a $2/5$.

Probabilidade - Probabilidade condicional

- Finalmente, qual a probabilidade de pelo menos um deles não sofrer acidente?
- Seja E o evento *todos os três sofrem acidente*. Então *pelo menos um não sofre acidente* é E^c.
- Além disso, $E = A \cap B \cap C$, e sabemos que $P(E) = 2/5$. Portanto

$$P(E^c) = 1 - P(E) = 1 - 2/5 = 3/5.$$

Probabilidade - Probabilidade condicional

Exemplo

Duas lâmpadas queimadas foram misturadas, acidentalmente, com seis lâmpadas boas. Se testarmos as lâmpadas, uma por uma, até encontrar as duas defeituosas, qual é a probabilidade de que a última defeituosa seja encontrada no quarto teste?

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 122.

Probabilidade - Probabilidade condicional

- Seja Q uma lâmpada queimada e B uma lâmpada boa. Sabendo que são duas queimadas, encerramos os testes quando a segunda for encontrada.
- Então, o nosso espaço amostral corresponde à:

$$\begin{aligned}\Omega &= \{QQ, QBQ, BQQ, QBBQ, BQBQ, BBQQ, QBBBQ,\\ &\quad BQBBQ, BBQBQ, BBBQQ, \ldots, BBBBBBQQ\}\end{aligned}$$

- O evento *a última lâmpada defeituosa é encontrada no quarto teste* corresponde aos eventos $\{QBBQ, BQBQ, BBQQ\}$.

Probabilidade - Probabilidade condicional

- Temos que:

$$
\begin{aligned}
& P(QBBQ \text{ ou } BQBQ \text{ ou } BBQQ) \\
= \; & P(QBBQ \cup BQBQ \cup BBQQ) \\
= \; & P(QBBQ) + P(BQBQ) + P(BBQQ),
\end{aligned}
$$

pois os eventos são disjuntos.

Probabilidade - Probabilidade condicional

- Por outro lado, temos que:

$$\begin{aligned}
P(QBBQ) &= P(Q)P(B|Q)P(B|QB)P(Q|BBQ) = \frac{2}{8}\frac{6}{7}\frac{5}{6}\frac{1}{5} = \frac{1}{28} \\
P(BQBQ) &= P(B)P(Q|B)P(B|BQ)P(Q|BQB) = \frac{6}{8}\frac{2}{7}\frac{5}{6}\frac{1}{5} = \frac{1}{28} \\
P(BBQQ) &= P(B)P(B|B)P(Q|BB)P(Q|BBQ) = \frac{6}{8}\frac{5}{7}\frac{2}{6}\frac{1}{5} = \frac{1}{28}
\end{aligned}$$

- Ou seja, P(*última defeituosa encontrada no quarto teste*) $= \frac{3}{28}$