Aula de Exercícios 1: Probabilidade

Notas de Aula da Professora Verónica González-López, digitadas por Beatriz Cuyabano, Pós-Graduação IMECC/UNICAMP, com modificações do Prof. Caio Azevedo

Probabilidade - Introdução

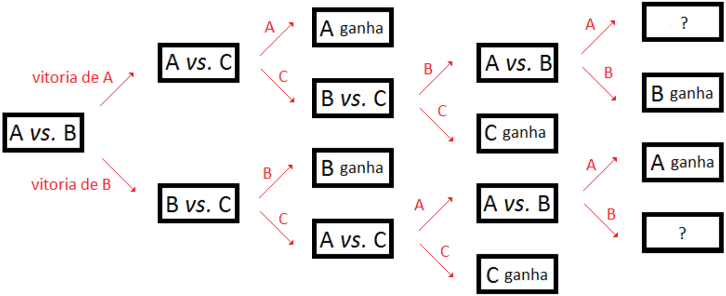
Exemplo

Três jogadores **A**, **B** e **C** disputam um torneio de tênis. Inicialmente, **A** joga com **B** e o vencedor joga com **C**, e assim por diante. O torneio termina quando um jogador ganha duas vezes seguidas ou quando são disputadas, ao todo, quatro partidas. Quais são os resultados possíveis do torneio?

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 105.

Probabilidade - Introdução

- Temos a seguinte árvore de possibilidades:



- O primeiro nó é um evento marginal (início do experimento aleatório), enquanto que todos os demais são eventos condicionais (à todos os eventos anteriores).

Probabilidade - Introdução

- Com a ajuda da árvore de possibilidades, podemos dizer que são possíveis os eventos AA, BB, ACC, BCC, ACBA, ACBB, BCAA e BCAB.
- Então, temos que

$$\Omega = \{AA, BB, ACC, BCC, ACBA, ACBB, BCAA, BCAB\}.$$

- Logo,

$$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{AA\}, \{BB\}, \{ACC\}, ..., \{BCAA\}, ..., \Omega\}.$$

Probabilidade - Introdução

Exemplo

Uma moeda e um dado são lançados. Apresente o espaço amostral do experimento e depois represente-o como o produto cartesiano dos dois espaços amostrais, correspondente aos experimentos considerados individualmente.

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 106.

Probabilidade - Introdução

- O *espaço amostral* Ω consiste, no caso discreto, da enumeração de todos os resultados possíveis do experimento em questão.
- O experimento *jogar uma moeda* tem dois resultados possíveis: cara (C) e coroa $(\bar{C})$. Logo, o espaço amostral é $\Omega_1 = \{C, \bar{C}\}$.
- O experimento *jogar um dado* tem seis resultados possíveis: 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Logo, o espaço amostral é $\Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Probabilidade - Introdução

- O produto cartesiano $\Omega_1 \times \Omega_2$ é o espaço amostral do experimento *jogar uma moeda e um dado*, ou seja,

$$\begin{aligned}\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = &\{(C,1),(C,2),(C,3),(C,4),(C,5),(C,6),\\ &(\bar{C},1),(\bar{C},2),(\bar{C},3),(\bar{C},4),(\bar{C},5),(\bar{C},6)\}\end{aligned}$$

- Por outro lado, temos que:

$$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset,(C,1),(C,2),...,\Omega\}.$$

Probabilidade - Introdução

Exercício

Defina o espaço amostral dos seguintes experimentos aleatórios:

- [(i)] Numa linha de produção, conta-se o número de peças defeituosas dentro de um intervalo de uma hora.
- [(ii)] Investigam-se famílias com três crianças, anotando-se a configuração segundo o sexo.
- [(iii)] Numa entrevista telefônica com 250 assinantes, anota-se se o proprietário tem ou não máquina de secar roupa.

Probabilidade - Introdução

Exercício

Defina o espaço amostral dos seguintes experimentos aleatórios (continuação):

- [(iv)] Mede-se a duração de lâmpadas, deixando-as acesas até que pararem de funcionar.
- [(v)] De um grupo de cinco pessoas (A,B,C,D,E), sorteiam-se duas, uma após a outra, com reposição, e anota-se a configuração tomada.
- [(vi)] Mesmo que (v), mas sem reposição.
- [(vii)] Mesmo que (v), mas os dois selecionados simultaneamente.

Probabilidade - Introdução

- [(i)] $\Omega = \{0, 1, ...\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.
- [(ii)] M: masculino, F: feminino:

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(M,M,M),(M,M,F),(M,F,M),(F,M,M),(M,F,F),\\ &\quad (F,M,F),(F,F,M),(F,F,F)\},\end{aligned}$$

  e $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.
- [(iii)] $\Omega = \{0, 1, ..., 250\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.
- [(iv)] $\Omega = \{t : \mathcal{R} : t \geq 0\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$.

Probabilidade - Introdução

- [(v)] De um grupo de cinco pessoas (A,B,C,D,E), sorteiam-se duas, uma após a outra, com reposição, e anota-se a configuração tomada.

$$
\begin{aligned}
\Omega = \{&(A, A), (B, B), (C, C), (D, D), (E, E), (A, B), (B, A), (A, C), \\
&(C, A), (A, D), (D, A), (A, E), (E, A), (B, C), (C, B), (B, D), \\
&(D, B), (B, E), (E, B), (C, D), (D, C), (C, E), (E, C), (D, E), \\
&(E, D)\},
\end{aligned}
$$

e $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Probabilidade - Introdução

- [(vi)] Mesmo que (v), mas sem reposição.

$$\begin{aligned}\Omega \quad = \quad & \{(A,B),(B,A),(A,C),(C,A),(A,D),(D,A),(A,E),(E,A),\\ & (B,C),(C,B),(B,D),(D,B),(B,E),(E,B),(C,D),(D,C),\\ & (C,E),(E,C),(D,E),(E,D)\},\end{aligned}$$

e $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Probabilidade - Introdução

- [(vii)] Mesmo que (v), mas os dois selecionados simultaneamente.

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(A,B),(A,C),(A,D),(A,E),(B,C),(B,D),(B,E),(C,D),\\ &\quad (C,E),(D,E)\},\end{aligned}$$

e $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Probabilidade - Algumas Propriedades

- Considere novamente o jogo de tênis entre **A**, **B** e **C**. Temos que $\Omega = \{AA, BB, ACC, BCC, ACBA, ACBB, BCAA, BCAB\}$.
- Seja $P(i)$ a probabilidade do i-ésimo jogador vencer o torneio, $i \in \{A, B, C\}$.
- Como nada mais fora dito, vamos supor que os jogadores tem a mesma probabilidade de ganhar cada partida, ou seja: $P(A) = P(B) = P(C) = 1/2$ e que os resultados entre estas, são independentes.
- Por exemplo, $P(AA) = P(A \cap A) = P(A, A) = P(A) \times P(A) = 1/4$.
- Note, assim, que Ω não é equiprobabilístico.

Probabilidade - Algumas Propriedades

- [(a)] *Mostre que a soma das probabilidades dos pontos do espaço amostral é 1 (continua no próximo slide).*

$$
\begin{aligned}
& P(AA)+P(BB)+P(ACC)+P(BCC)+P(ACBA)+P(ACBB)\\
+ \quad & P(BCAA)+P(BCAB)=P(A)P(A|A)+P(B)P(B|B)\\
+ \quad & P(A)P(C|A)P(C|AC)+P(B)P(C|B)P(C|BC)\\
+ \quad & P(A)P(C|A)P(B|AC)P(A|ACB)\\
+ \quad & P(A)P(C|A)P(B|AC)P(B|ACB)+\\
+ \quad & P(B)P(C|B)P(A|BC)P(A|BCA)+\\
+ \quad & P(B)P(C|B)P(A|BC)P(B|BCA)=
\end{aligned}
$$

Probabilidade - Algumas Propriedades

- [(a)] *Cont.*

$$
\begin{aligned}
&= P(A)P(A) + P(B)P(B) + P(A)P(C)P(C) + P(B)P(C)P(C) \\
&+ P(A)P(C)P(B)P(A) + P(A)P(C)P(B)P(B) + \\
&+ P(B)P(C)P(A)P(A) + P(B)P(C)P(A)P(B) \\
&= 1/4 + 1/4 + 1/8 + 1/8 + 1/16 + 1/16 + 1/16 + 1/16 = 1
\end{aligned}
$$

Probabilidade - Algumas Propriedades

- [(b)] *Qual a probabilidade de que A vença? Qual a probabilidade de que B vença?*

$$
\begin{aligned}
P(A \text{ vencer}) &= P(AA) + P(BCAA) = P(A)P(A|A) \\
&+ P(B)P(C|B)P(A|BC)P(A|BCA) \\
&= P(A)P(A) + P(B)P(C)P(A)P(A) \\
&= 1/4 + 1/16 = 5/16 = 0,3125.
\end{aligned}
$$

Probabilidade - Algumas Propriedades

- [(b)] *Cont.* De modo análogo,

$$
\begin{aligned}
P(B \text{ vencer}) &= P(BB) + P(ACBB) \\
&= P(B)P(B|B) + P(A)P(C|A)P(B|AC)P(B|ACB) \\
&= P(B)P(B) + P(A)P(C)P(B)P(B) \\
&= 1/4 + 1/16 = 5/16 = 0,3125.
\end{aligned}
$$

Probabilidade - Algumas Propriedades

- [(c)] *Qual a probabilidade que não haja vencedor?*

$$
\begin{aligned}
P(\text{não haver decisão}) &= P(ACBA) + P(BCAB) \\
&= P(A)P(C|A)P(B|AC)P(A|ACB) \\
&+ P(B)P(C|B)P(A|BC)P(B|BCA) \\
&= P(A)P(C)P(B)P(A) + P(B)P(C)P(A)P(B) \\
&= 1/16 + 1/16 = 2/16 = 0,125.
\end{aligned}
$$

Probabilidade - Algumas Propriedades

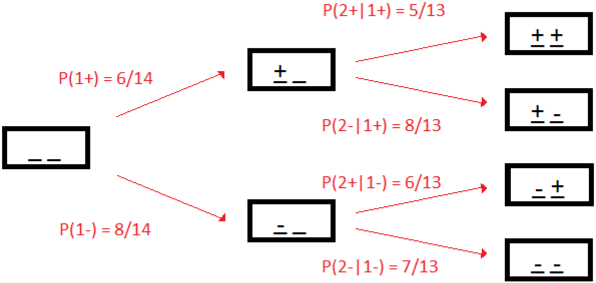
Exemplo

Dentre seis números positivos e oito negativos, dois são escolhidos ao acaso (sem reposição) e multiplicados entre si. Qual a probabilidade que o produto seja positivo?

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 110.

Probabilidade - Algumas Propriedades

- Considere a seguinte árvore de probabilidades:



Probabilidade - Algumas Propriedades

- Note que $\Omega = \{++, +-, -+, --\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, em que ij, indica o sinal do elemento selecionado na primeira e segunda seleções, respectivamente ($i, j \in \{-, +\}$).
- Com a ajuda do diagrama, observamos que:

$$
\begin{aligned}
P(++) &= P(+)P(+|+) = \frac{6}{14}\frac{5}{13} = \frac{15}{91}, \\
P(+-) &= P(-)P(+|-) = \frac{6}{14}\frac{8}{13} = \frac{24}{91}, \\
P(-+) &= P(-)P(+|-) = \frac{8}{14}\frac{6}{13} = \frac{24}{91}, \\
P(--) &= P(-)P(-|-) = \frac{8}{14}\frac{7}{13} = \frac{4}{13}.
\end{aligned}
$$

Probabilidade - Algumas Propriedades

- Como estamos interessados no evento A: que o produto dos dois números seja positivo, os resultados de interesse são $++$ ou $--$. Assim:

$$P(A) = P[(++) \cup (--)] = P(++) + P(--) = \frac{15 + 28}{91} = \frac{43}{91}.$$

Probabilidade - Distribuições Bivariadas

Exemplo

Considere um estudo com 19476 homens de 50 anos ou mais, escolhidos de maneira aleatória e independentemente uns dos outros, os quais foram submetidos a dois testes de rastreamento de câncer de próstata.

- *PSA:* Antígeno prostático específico (exame de sangue).
- *DRE:* Toque retal (Digital Rectal Examination).
- *Confirmação:* biópsia.

Probabilidade - Distribuições Bivariadas

- Posteriormente foi verificado se havia de fato câncer (com câncer) ou não (sem câncer), através de biópsia:

Com câncer (Tabela 1 (a))

	DRE+	DRE-	
PSA+	189	292	481
PSA-	145	1255	1400
	334	1547	1881

Sem câncer (Tabela 1 (b))

	DRE+	DRE-	
PSA+	141	755	896
PSA-	1002	15697	16699
	1143	16452	17595

Probabilidade - Distribuições Bivariadas

- A tabela a seguir é para todos os indivíduos (com e sem câncer):

Total (Tabela 2)

	DRE+	DRE-	
PSA+	330	1047	1377
PSA-	1147	16952	18099
	1477	17999	19476

Probabilidade - Distribuições Bivariadas

Exemplo

Sejam os seguintes eventos associados ao experimento:

A = DRE+   B = PSA+   C = Paciente tem câncer

A^c = DRE-   B^c = PSA-   C^c = Paciente não tem câncer

Na literatura, $P(A|C)$ é chamado de *sensibilidade* do DRE, e $P(A^c|C^c)$ é chadado de *especificidade* do teste DRE. Analogamente $P(B|C)$ e $P(B^c|C^c)$ são a sensibilidade e especificidade do teste PSA, respectivamente.

$P(C) = 1881/19476 = 0{,}0966$ é a *prevalência* do câncer de próstata em homens com 50 anos ou mais de idade.

Probabilidade - Distribuições Bivariadas

Exercício

Sorteamos um indivíduo ao acaso da amostra. Calcule as probabilidades dos seguintes eventos:

$$\begin{array}{lll} P(A|C) & P(A \cap B|C) & P(A \cup B|C) \\ P(A|C^c) & P(A \cap B|C^c) & P(A \cup B|C^c) \\ P(A) & P(A \cap B) & P(A \cup B) \end{array}$$

Probabilidade - Distribuições Bivariadas

- Em casos assim (no geral), probabilidade condicionais devem ser calculadas via Tabelas 1 (a) e 1(b), enquanto que probabilidade marginais, sem condicionar, através da Tabela 2.
- Note que $\Omega = \{1, 2, 3, ..., 19476\}$, é um espaço amostral equiprobabilístico e $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.
- Dessa forma, da Tabela 1(a), temos que:

$$P(A|C) = \frac{334}{1881},$$

Probabilidade - Distribuições Bivariadas

- (Cont.) Dessa forma, da Tabela 1(a), temos que:

$$
\begin{aligned}
P(A \cap B|C) &= \frac{189}{1881}, \\
P(A \cup B|C) &= P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B|C) \\
&= \frac{334}{1881} + \frac{481}{1881} - \frac{189}{1881} = \frac{626}{1881}
\end{aligned}
$$

Probabilidade - Distribuições Bivariadas

- Analogamente, da Tabela 1(b), temos que:

$$
\begin{aligned}
P(A|C^c) &= \frac{1143}{17595}, P(A \cap B|C^c) = \frac{141}{17595}, \\
P(A \cup B|C^c) &= P(A|C^c) + P(B|C^c) - P(A \cap B|C^c) \\
&= \frac{1143}{17595} + \frac{896}{17595} - \frac{141}{17595} = \frac{1898}{17595}
\end{aligned}
$$

Probabilidade - Distribuições Bivariadas

- Finalmente, da Tabela 2, temos que:

$$
\begin{aligned}
P(A) &= \frac{1477}{19476}, P(A \cap B) = \frac{330}{19476}, \\
P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\
&= \frac{1477}{19476} + \frac{1377}{19476} - \frac{330}{19476} = \frac{2524}{19476}
\end{aligned}
$$