

# Análise de dados e métodos de diagnóstico em modelos de regressão normais lineares (parte 1)

Prof. Caio Azevedo

(grande parte do material apresentado foi extraído do livro Modelos de regressão com apoio computacional do Prof. Gilberto A. Paula)

*[http : //www.ime.usp.br/~giapaula/texto\\_2013.pdf](http://www.ime.usp.br/~giapaula/texto_2013.pdf)*

# Forma matricial do MRNL

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\xi}$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_{11} & \dots & X_{1p} \\ X_{21} & \dots & X_{2p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n1} & \dots & X_{np} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix}, \boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

- Suposição:  $\boldsymbol{\xi} \sim N_n(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_n)$ .
- $\mathbf{Y}$  é o vetor das variáveis resposta.
- O índice  $n$  da variável resposta é geral e pode representar combinações de índices.
- $\mathbf{X}$  é a matriz de plajenamento (ou delineamento) que define a parte sistemática do modelo.

## Explicação da variabilidade

- Vimos, anteriormente, que um dos objetivos do modelo é explicar a variabilidade dos dados através da parte sistemática  $\mathbf{X}\beta$ .
- Uma forma de se medir tal característica é comparar as somas de quadrados, ou seja:

$$SQT = \underbrace{\sum_{i=1}^n (\bar{Y} - \hat{Y}_i)^2}_{SQM} + \underbrace{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}_{SQR}$$

- $R^2 = \frac{SQM}{SQT} = 1 - \frac{SQR}{SQT}$ . Quanto maior for o  $R^2$  (coeficiente de determinação), maior o percentual da variabilidade explicada pelo modelo.

## Explicação da variabilidade

- A inclusão de inúmeras variáveis, mesmo que tenham pouco poder explicativo sobre a variável dependente, aumentarão o valor de  $R^2$ . Assim, uma alternativa um pouco melhor à ele é o  $R^2$  ajustado:

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{n-1}{n-p}(1 - R^2)$$

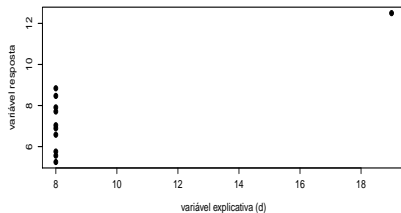
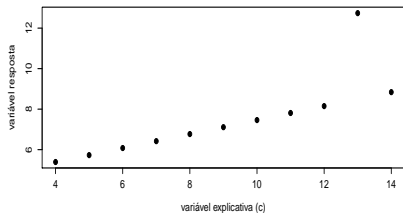
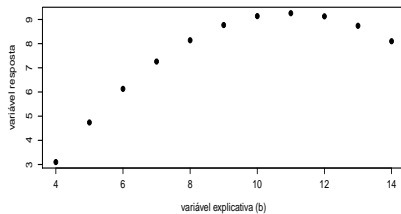
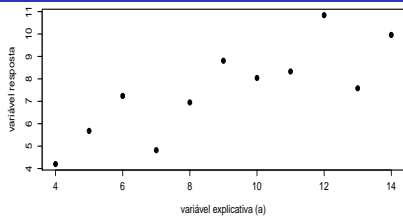
n: é o tamanho da amostra e p: é o número de colunas da matriz  $\mathbf{X}$

- Contudo, a simples visualização dessas quantidades, por si só, não é suficiente para se medir a adequabilidade do modelo.
- Tanto o coeficiente de determinação quanto o coeficiente de determinação ajustado podem ser apresentados em forma percentual.

# Exemplo de Anscombe (1973)

	A		B		C		D	
	x	y	x	y	x	y	x	y
1	10,00	8,04	10,00	9,14	10,00	7,46	8,00	6,58
2	8,00	6,95	8,00	8,14	8,00	6,77	8,00	5,76
3	13,00	7,58	13,00	8,74	13,00	12,74	8,00	7,71
4	9,00	8,81	9,00	8,77	9,00	7,11	8,00	8,84
5	11,00	8,33	11,00	9,26	11,00	7,81	8,00	8,47
6	14,00	9,96	14,00	8,10	14,00	8,84	8,00	7,04
7	6,00	7,24	6,00	6,13	6,00	6,08	8,00	5,25
8	4,00	4,20	4,00	3,10	4,00	5,39	19,00	12,50
9	12,00	10,84	12,00	9,13	12,00	8,15	8,00	5,56
10	7,00	4,82	7,00	7,26	7,00	6,42	8,00	7,91
11	5,00	5,68	5,00	4,74	5,00	5,73	8,00	6,89

# Gráficos de dispersão: dados de Anscombe



# Suposições

- Vamos ajustar, para cada conjunto de dados, o modelo :

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \xi_i, \xi_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(0, \sigma^2) i = 1, \dots, 11.$$

- No conjunto A, o modelo parece adequado.
- No conjunto B, um modelo quadrático seria mais conveniente.
- No conjunto C, o modelo parece ajustar-se bem aos dados, com exceção do ponto (13,0; 12,74) que se caracteriza como uma observação discrepante (outlier).
- No conjunto D, o coeficiente de regressão  $\beta$  é significativo apenas em função do ponto (19,0; 12,50).

# Suposições

- No entanto, para os quatro conjuntos de dados, temos  $\tilde{\alpha} = 3,00$ ,  $\tilde{\beta} = 0,50$ ,  $\tilde{\sigma}^2 = 1,53$  e  $R^2 = 0,667$  o que evidencia que o coeficiente de determinação ( $R^2$ ) nem sempre é uma boa medida para a avaliação da qualidade do ajuste.
- Analogamente,  $\bar{R}^2 = 0,630$  para os quatro modelos. O que também depõe contra o uso do  $R^2$  ajustado.



# Suposições

- As principais suposições do MNL são:
  - Homocedasticidade (dos erros).
  - Independência (correlação nula) dos erros.
  - Normalidade dos erros.
- Como verificar as suposições do modelo?
- Como proceder se uma ou mais suposições não forem (satisfatoriamente) válida(s)?

# Resíduos

- Como os erros ( $\xi$ ) não são observados (observáveis), precisamos de algum preditor apropriado para avaliar as suposições feitas sobre eles.
- Lembre-se de que  $\xi \sim N_n(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_n)$  (não correlacionados).
- Já definimos os resíduos:  $\hat{\xi}_i = R_i = Y_i - \hat{Y}_i = Y_i - \mathbf{X}'_i \hat{\beta}$ .
- Matricialmente  $\mathbf{R} = \mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\beta} = (\mathbf{I}_n - \mathbf{H})\mathbf{Y}$ ,  
 $\mathbf{H} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$ .
- Assim, temos que, sob as suposições do modelo,  
 $\mathbf{R} \sim N_n(\mathbf{0}, \sigma^2(\mathbf{I}_n - \mathbf{H}))$  (são correlacionados). Mais especificamente,  
 $r_i \sim N(0, \sigma^2(1 - h_{ii}))$  e  $Cov(r_i, r_j) = -\sigma^2 h_{ij}$ , em que  $h_{ij}$  é o elemento da  $i$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna da matriz  $\mathbf{H}$ .

## Cont. (livro do Prof. Gilberto, pág. 48, 49 e 50)

- Defina  $V_i = \frac{R_i}{\sqrt{S^2(1-h_{ii})}}$ , em que  $S^2 = \frac{1}{n-p} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})' (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})$ .
- A divisão por  $(1 - h_{ii})$  atenua a correlação entre os resíduos.
- Contudo,  $R_i$  e  $S^2$  não são independentes (exercício).
- Porém,  $S_{(i)}^2$  e  $R_i$  o são (em que  $S_{(i)}^2$  corresponde à  $S^2$  obtido no modelo sem a  $i$ -ésima observação e  $(i)$  indica que a  $i$ -ésima observação foi excluída) (exercício).
- $$S_{(i)}^2 = \frac{1}{n-p-1} (\mathbf{Y}_{(i)} - \mathbf{X}_{(i)}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(i)})' (\mathbf{Y}_{(i)} - \mathbf{X}_{(i)}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(i)}),$$
$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(i)} = (\mathbf{X}'_{(i)}\mathbf{X}_{(i)})^{-1}\mathbf{X}'_{(i)}\mathbf{Y}_{(i)}.$$

## Cont. (livro do Prof. Gilberto, pág. 48, 49 e 50)

- Pode-se provar, além disso, que  $S_{(i)}^2 = S^2 \left( \frac{n-p-V_i^2}{n-p-1} \right)$  (facilita seu cálculo, dispensando o ajuste do modelo “n” vezes).
- Tem-se, então, que  $T_i = \frac{R_i}{\sqrt{S_{(i)}^2(1-h_{ii})}} \sim t_{(n-p)}$ , sob a validade das hipóteses do modelo (exercício). Lembre-se de que, se  $\nu \geq 30$ , então  $t_{(\nu)} \approx N(0, 1)$ .

# O que e como observar nos resíduos?

- Gráfico de dispersão dos resíduos versus o índice da observação: ausência de dependência/tendência/correlação.
- Gráfico de dispersão dos resíduos versus os valores ajustados: homocedasticidade.
- Boxplot e/ou gráfico de quantis-quantis: simetria, ausência de “out-liers” e multimodalidade.
- Problema no gráfico de quantis-quantis: Visualmente, muitas vezes, é complicado avaliar a proximidade dos quantis.
- Solução: criar bandas de confiança (gráficos de envelope).

# Procedimento para se gerar o gráfico de envelopes

- 1) Gera-se  $n$  observações  $N(0,1)$  as quais são armazenadas em  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)'$ .
- 2) Calcula-se  $\mathbf{r}^* = (\mathbf{I}_n - \mathbf{H})\mathbf{z}$  e depois  $t_i^* = \frac{r_i^*}{\sqrt{1 - h_{ii}}}$ .
- 3) Repete-se os passos (1)-(2),  $m$  vezes. Logo, teremos  $t_{ij}^*, i = 1, \dots, n$  e  $j = 1, \dots, m$ .

## Procedimento para se gerar o gráfico de envelopes

- 4) Ao final teremos uma matriz com os resíduos, ou seja  $t_{ij}^*$ ,  $i=1,\dots,n$ , (tamanho da amostra)  $j=1,\dots,m$  (réplica).

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} t_{11}^* & t_{12}^* & \cdots & t_{1m}^* \\ t_{21}^* & t_{22}^* & \cdots & t_{2m}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1}^* & t_{n2}^* & \cdots & t_{nm}^* \end{bmatrix}$$

## Procedimento para se gerar o gráfico de envelopes

- 5) Dentro de cada amostra, ordena-se, de modo crescente, os resíduos, obtendo-se  $t_{(i)j}^*$  (estatísticas de ordem):

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} t_{(1)1}^* & t_{(1)2}^* & \cdots & t_{(1)m}^* \\ t_{(2)1}^* & t_{(2)2}^* & \cdots & t_{(2)m}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{(n)1}^* & t_{(n)2}^* & \cdots & t_{(n)m}^* \end{bmatrix}$$

- 6) Obtem-se os limites  $t_{(i)l}^* = \min_{1 \leq j \leq m} t_{(i)j}^*$  e  $t_{(i)s}^* = \max_{1 \leq j \leq m} t_{(i)j}^*$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ .



## Procedimento para se gerar o gráfico de envelopes

- 7) Na prática considera-se  $t_{(i)I}^* = \frac{t_{(i)(2)}^* + t_{(i)(3)}^*}{2}$  e  $t_{(i)S}^* = \frac{t_{(i)(m-2)}^* + t_{(i)(m-1)}^*}{2}$  (refinamento das estimativas do mínimo e máximo), em que  $t_{(i)(r)}^*$  é a  $r$ -ésima estatística de ordem dentro de cada linha,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

- Além disso, consideramos como a linha de referência

$$t_{(i)}^* = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m t_{(i)j}^*, i = 1, 2, \dots, n.$$

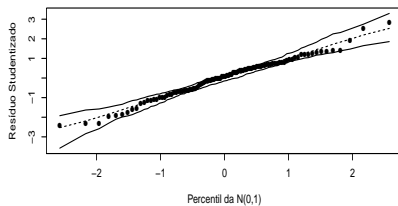
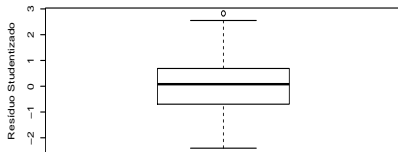
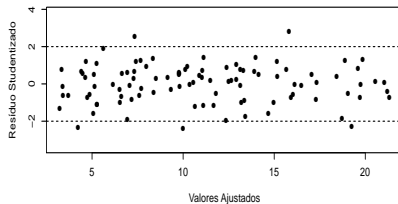
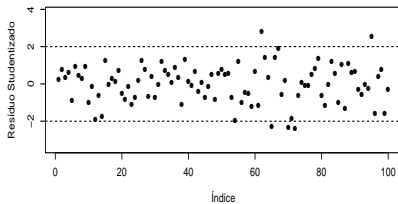
# Estudo de simulação

- Vamos avaliar o comportamento dos resíduos sob:
  - Heterocedasticidade.
  - Correlação entre as observações.
  - Ausência de normalidade.

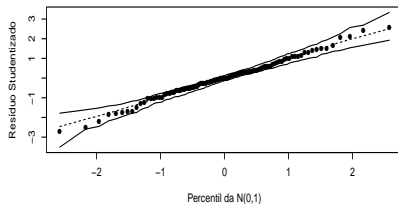
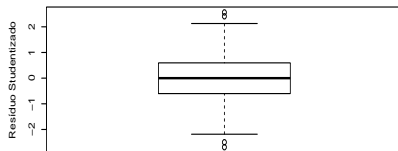
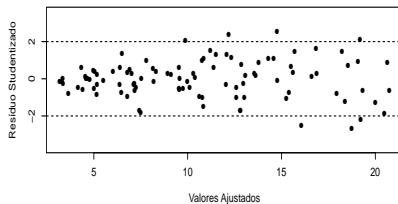
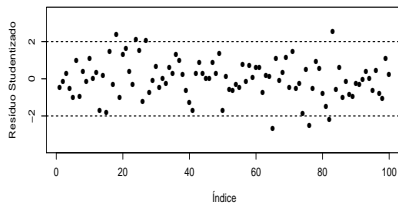
# Heterocedasticidade

- Modelo 1 (M1):  $Y_i = 1 + 2x_i + \xi_i, i = 1, 2, \dots, 100, x_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} U(1, 10)$   
e  $\xi \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(0, 4)$ .
- Modelo 2 (M2): M1 com  $\xi_i \stackrel{ind.}{\sim} N(0, 4x_i)$ .
- Modelo 3 (M3): M1 com  $\xi_i \stackrel{ind.}{\sim} N(0, 4x_i^{-1})$ .
- Modelo 4 (M4): M1 com  $\xi_i \stackrel{ind.}{\sim} N(0, 4x_i), i = 1, 2, \dots, 50$  e  
 $\xi_i \stackrel{ind.}{\sim} N(0, 4x_i^{-1}), i = 51, 2, \dots, 100$ .

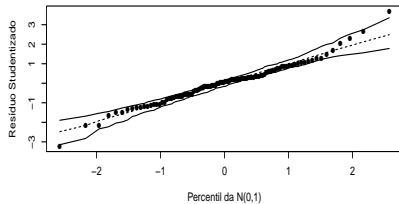
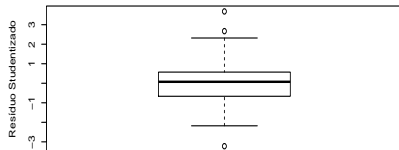
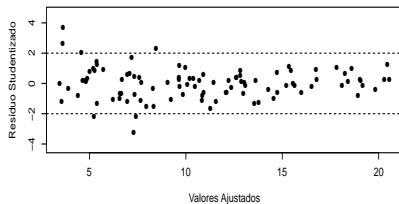
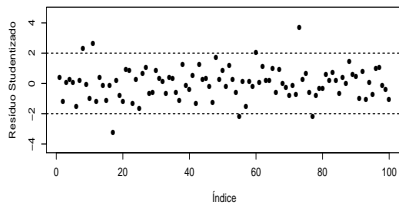
# Modelo 1



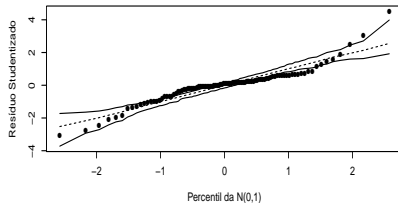
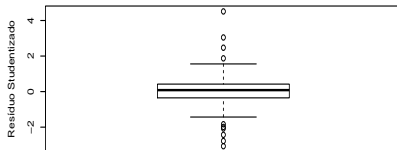
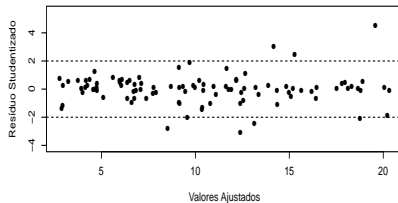
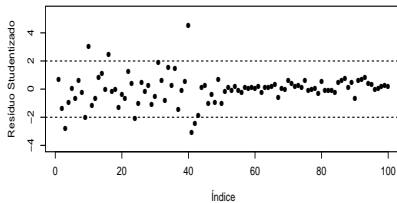
# Modelo 2



# Modelo 3



# Modelo 4



# Dependência

- Modelo 1 (M1):  $Y_i = 1 + 2x_i + \xi_i, i = 1, 2, \dots, 100, x_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} U(1, 10)$  e  $\xi \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(0, 4)$ .
- Modelo 2 (M2):  $Y_i, i = 1, \dots, 100$  segue um processo AR(1) com  $\rho = 0,8$  (correlação entre as observações).
- Modelo 3 (M3): M1 com  $(\xi_i, \xi_{i+1})' \sim N_2 \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 3.2 \\ 3.2 & 4 \end{bmatrix} \right), i=1, \dots, 99$ .

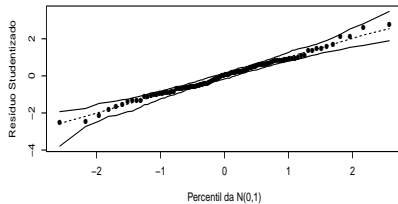
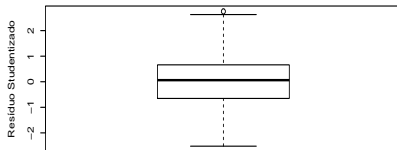
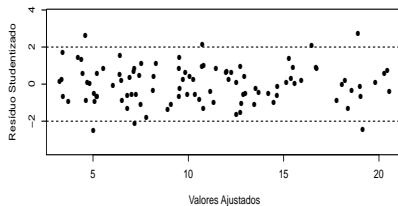
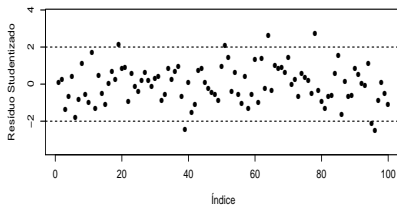


# Dependência

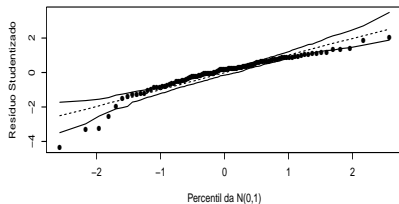
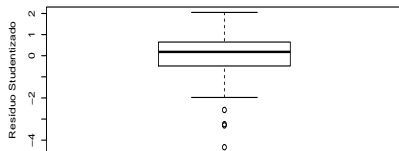
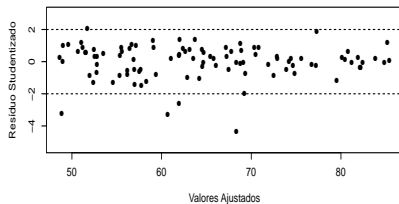
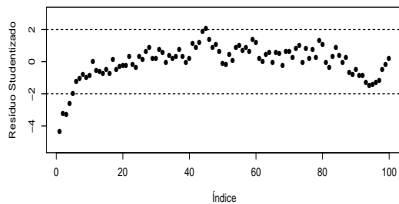
- Modelo 4 (M4): M1 com  $\xi_1 \sim N_{50}(\mathbf{0}, \Sigma_1)$  e  $\xi_2 \sim N_{50}(\mathbf{0}, \Sigma_2)$ , em que  $\xi_1 = (\xi_1, \dots, \xi_{50})'$  e  $\xi_2 = (\xi_{51}, \dots, \xi_{100})'$ .

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 4 & 3.2 & \dots & 3.2 \\ 3.2 & 4 & \dots & 3.2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 3.2 & 3.2 & \dots & 4 \end{bmatrix}; \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 4 & 3.6 & \dots & 3.6 \\ 3.6 & 4 & \dots & 3.6 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 3.6 & 3.6 & \dots & 4 \end{bmatrix}$$

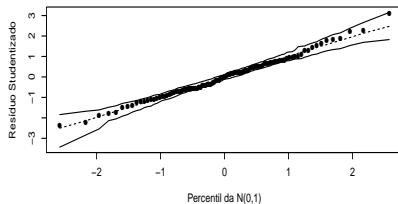
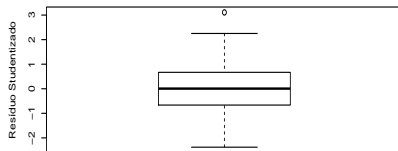
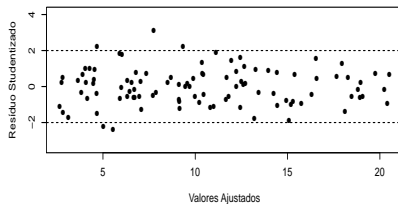
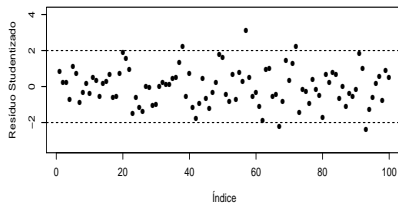
# Modelo 1



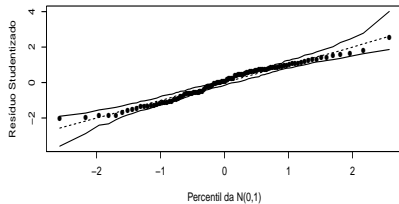
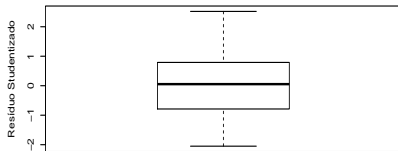
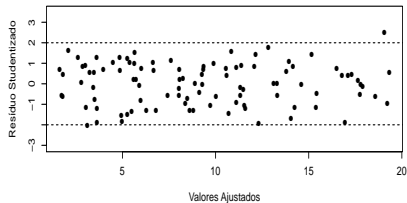
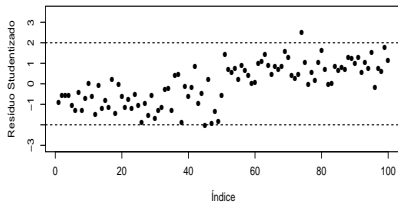
# Modelo 2



# Modelo 3



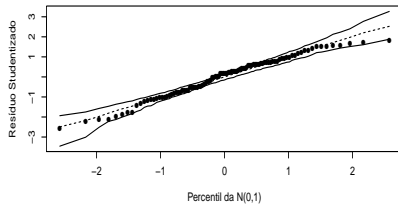
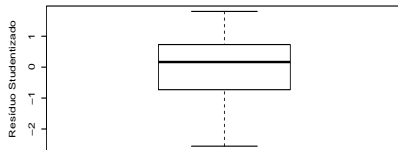
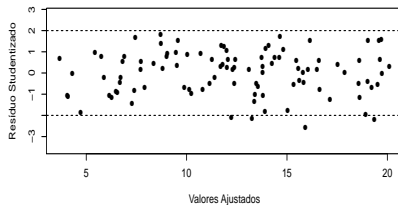
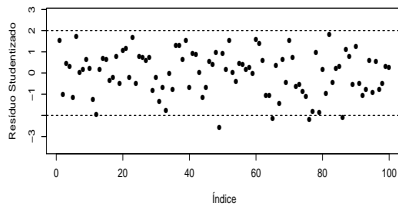
# Modelo 4



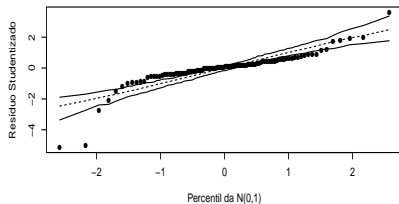
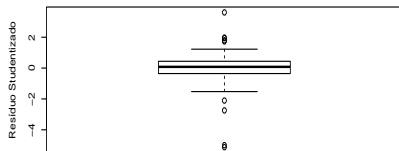
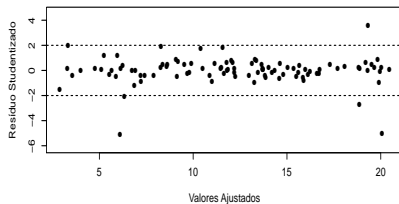
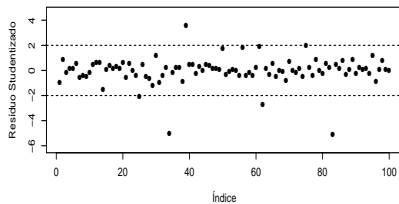
# Ausência de normalidade

- Modelo 1 (M1):  $Y_i = 1 + 2x_i + \xi_i, i = 1, 2, \dots, 100, x_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} U(1, 10)$  e  $\xi \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(0, 4)$ .
- Modelo 2 (M2): M1 com  $\xi_i \stackrel{ind.}{\sim} t_{(4)}$  (caudas pesadas).
- Modelo 3 (M3): M1 com  $\xi_i \stackrel{ind.}{\sim} NA(0, 2, 20)$  (assimetria positiva).
- Modelo 4 (M4): M1 com  $\xi_i \stackrel{ind.}{\sim} NA(0, 2, -20)$  (assimetria negativa).
- OBS:  $NA(\mu, \psi, \lambda)$  representa uma distribuição normal assimétrica (na parametrização usual) com parâmetro de localização  $\mu$ , de dispersão  $\psi$  e de assimetria  $\lambda$ .

# Modelo 1

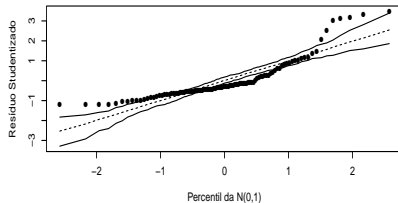
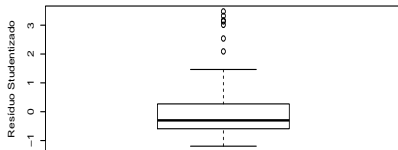
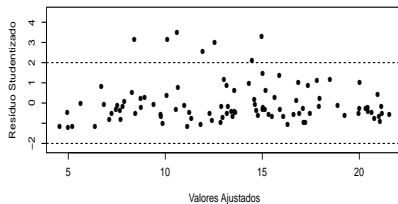
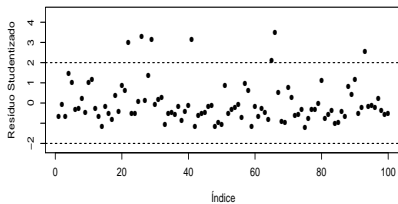


# Modelo 2





# Modelo 3



# Modelo 4

