Análise Combinatória e Probabilidade

Notas de Aula da Professora Verónica González-López, digitadas por Beatriz Cuyabano, Pós-Graduação IMECC/UNICAMP, com modificações do Prof. Caio Azevedo

Introdução e Motivação

- Para espaços amostrais equiprobabilísticos (aqui) uma das formas para se calcular a probabilidade de um evento, digamos A, passa por saber os números de elementos de $\Omega\,(n(\Omega))$ (espaço amostral) e do próprio conjunto $A\,(n(\Omega))$, de modo que:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}.$$

Introdução e Motivação

- Como veremos adiante no curso, ainda que não estejamos lidando com um espaço amostral equiprobabilístico, o cálculo de $n(\Omega)$ e de $n(A), \forall A \in \Omega$, permitirá o cálculo de probabilidades de interesse e/ou da obtenção de distribuições de probabilidade ligadas à variáveis aleatórias discretas.
- Como, muitas vezes, pode ser impossível (inviável) enumerar (escrever) todos os elementos dos conjuntos de interesse, é importante ter uma ferramenta que permita a obtenção de tais quantidades, sem passar pelo processo de enumeração.

Análise Combinatória

- Essencialmente, lida com o cálculo do número de elementos de um conjunto (finito), sem enumerá-los.
- Baseia-se em dois princípios:
  - **Princípio multiplicativo**: Se uma tarefa pode ser executada em duas etapas, sendo que a primeira pode ser feita de n maneiras distintas, e a segunda de m maneiras diferentes, dada que a primeira fora feita, então a tarefa completa pode ser feita de $n \times m$ maneiras diferentes.
  - **Princípio aditivo**: Sejam A e B dois subconjuntos disjuntos ($A \cap B = \emptyset$) de Ω, então $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.

Análise Combinatória

- De uma forma geral, temos que
  - **Princípio multiplicativo**: Se uma tarefa pode ser executada em n etapas, sendo que a primeira pode ser feita de k_1 formas diferentes, a segunda de k_2 maneiras diferentes, dada que a primeira fora feita, a $r-$ ésima etapa pode ser feita de k_r maneiras diferentes, dado que as $r-1$ anteriores foram feitas, então a tarefa completa pode ser feita de $\prod_{i=1}^{n} k_i$ maneiras diferentes.
  - **Princípio aditivo**: Sejam $A_i, i = 1, ..., n$ n subconjuntos disjuntos $(A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j)$ de Ω, então $n\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} n(A_i)$.

Definições

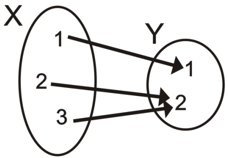
- População (ζ): conjunto de objetos (elementos) que possuem pelo menos uma característica comum.
- Amostra: uma amostra de tamanho $n < N$ de um conjunto ζ que possui N elementos, é um subconjunto de ζ.
    - Ordenada: se os elementos da amostra foram ordenados, ou seja, duas (ou mais) amostras com os mesmos elementos, mas em ordens diferentes serão consideradas como amostras diferentes.
    - Não ordenada: não importa a ordem dos elementos, as amostras serão iguais.

Exemplo

- Consideremos uma pesquisa para estudar os salários dos 500 funcionários de uma companhia. Seleciona-se uma amostra de 36 indivíduos. A população é formada pelos 500 salários correspondentes aos 500 funcionários. Consequentemente, a amostra será formada pelos 36 salários dos 36 funcionários selecionados.
- Objetivo: estudar a distribuição dos salários na amostra, esperando que a mesma reflita a distribuição de todos os salários.

Seleção de Amostras

- Consideremos dois conjuntos:
  - $X = \{1, 2, ..., n\}$.
  - $Y = \{1, 2, ..., m\}$.
  - Por exemplo: $X = \{1, 2, 3\}$ e $Y = \{1, 2\}$



Seleção de Amostras

- No diagrama, as aplicações exemplificadas são:
  - $f(1) = 1$.
  - $f(2) = 2$.
  - $f(3) = 2$.
- Quantas aplicações são possíveis no total?
  - O Objeto "1" em X possui duas possibilidades em Y.
  - O Objeto "2" em X possui duas possibilidades em Y.
  - O Objeto "3" em X possui duas possibilidades em Y.
  - Portanto, pelo princípio multiplicativo, $2 \times 2 \times 2 =$ é o número total de aplicações entre X e Y.

Seleção de Amostras

- No caso geral, para $X = \{1, 2, ..., n\}$ e $Y = \{1, 2, ..., m\}$, temos que o total de aplicações entre X e Y é igual m^n.
- Note que são permitidas as associações de pontos diferentes no domínio (X) ao mesmo ponto da imagem (Y).

Seleção de Amostras

- Considere agora que o interesse é em aplicações $1:1$
- $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ (um dado elemento na imagem corresponde a um único elemento no domínio)
- $X = \{1, 2, ..., n\} \quad \xrightarrow{f} \quad Y = \{1, 2, ..., m\}, \; m \geq n$
  - O objeto "1" em X possui m possibilidades em Y.
  - O objeto "2" em X possui $(m-1)$ possibilidades em Y.
  - $\vdots$
  - O objeto "n" em X possui $(m-(n-1))$ possibilidades em Y.
  - Portanto, pelo princípio multiplicativo, o número total de aplicações $1:1$ entre X e Y é igual a $m(m-1)...(m-(n-1))$.

Seleção de Amostras

- Lema: o número de amostras ordenadas *com reposição*, de tamanho n, tiradas de um conjunto com N elementos é N^n (número de aplicações $= N^n$)
- Lema: o número de amostras ordenadas *sem reposição*, de tamanho n tiradas de um conjunto com N elementos é $N(N-1)...(N-(n-1))$ (número de aplicações $1:1 = N(N-1)...(N-(n-1))$)

Análise Combinatória

- Seja X um conjunto finito com m elementos e $n \leq m$.
- Desejamos saber quantos subconjuntos com n elementos tem X
  - Exemplo: $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Quantos subconjuntos com 3 elementos há em X?

$\{1,2,3\}*_1$	$\{2,1,3\}*_1$	$\{3,1,2\}*_1$	$\{4,1,2\}*_2$
$\{1,2,4\}*_2$	$\{2,1,4\}*_2$	$\{3,1,4\}*_3$	$\{4,1,3\}*_3$
$\{1,3,2\}*_1$	$\{2,3,1\}*_1$	$\{3,2,1\}*_1$	$\{4,2,1\}*_2$
$\{1,3,4\}*_3$	$\{2,3,4\}*_4$	$\{3,2,4\}*_4$	$\{4,2,3\}*_4$
$\{1,4,2\}*_2$	$\{2,4,1\}*_2$	$\{3,4,1\}*_3$	$\{4,3,1\}*_3$
$\{1,4,3\}*_3$	$\{2,4,3\}*_4$	$\{3,4,2\}*_4$	$\{4,3,2\}*_4$

Análise Combinatória

- Observe que os subconjuntos marcados com $(*_1, *_2, *_3, *_4)$ possuem os mesmos elementos, apenas com outra ordem:
- Assim, o total de subconjuntos com 3 elementos de um conjunto com 4 elementos é dado por $\dfrac{4!}{3!1!} = 4$.

Análise Combinatória

- Resumo

Repetição	**Ordenação**	**número de amostras possíveis**
Sim	Importa	N^n
Sim	Não importa	–
Não	Importa	$\dfrac{N!}{(N-n)!}$
Não	Não importa	$\dfrac{N!}{(N-n)!n!}$

Análise Combinatória

- No caso geral, o número total de subconjuntos com n elementos de um conjunto com $m \geq n$ é dado por

$$\frac{m!}{n!(m-n)!}.$$

- Lema: o número de amostras não ordenadas de tamanho n tiradas de um conjunto com N elementos é igual a

$$\frac{N!}{n!(N-n)!}.$$

Análise Combinatória

- Exemplo: Uma comissão formada por 3 estudantes tem que ser selecionada numa classe de 20 alunos, para organizar os jogos olímpicos. De quantas formas diferentes pode ser selecionada essa comissão?

$$\frac{20!}{3!17!} = \frac{20 \times 19 \times 18}{6} = 1140.$$

Análise Combinatória

- Exemplo: Um ônibus possui 10 assentos disponíveis. De quantas formas 7 passageiros podem ocupar os assentos?

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 604800.$$

- Exemplo: Quantos números de 4 dígitos podemos formar com os dígitos 1,2,3,4,5,6?

$$6^4 = 1296.$$

Determinando Amostras e Calculando Probabilidades

- Exemplo: (E) Desejamos formar números de 4 dígitos com os dígitos 1,2,3,4,5,6.
  - Total $(n(\Omega))$: 6^4 amostras
  - Evento de interesse (A) - os dois primeiros dígitos são, necessariamente, iguais entre si, e os dois últimos, diferentes desses primeiros: $6 \times 1 \times 5 \times 5$ amostras
  - Qual a probabilidade de escolher um número ao acaso (formado por 4 dígitos) e este possuir os dois primeiros dígitos necessariamente iguais entre si, e os dois últimos, diferentes desses primeiros:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{6 \times 1 \times 5 \times 5}{6^4} = \frac{5 \times 5}{6^3} = \frac{25}{216} \approx 0,12.$$

Cont.

- Evento de interesse (B) - os dois primeiros dígitos são iguais entre si, e os dois últimos, diferentes desses primeiros: $n(B) = 6 \times 1 \times 5 \times 5$ amostras.
- Evento de interesse (C) - os dois primeiros dígitos são diferentes entre si, e os dois últimos, diferentes desses primeiros: $n(C) = 6 \times 5 \times 4 \times 4$ amostras.
- Qual a probabilidade de escolher um número ao acaso (formado por 4 dígitos), e este possuir os dois primeiros dígitos iguais ou não entre si, e os dois últimos, diferentes desses primeiros?

Cont.

- Primeiramente, note que $B \cap C = \emptyset$. Assim, temos que:

$$
\begin{aligned}
P(B \cup C) &= P(B) + P(C) - P(B \cap C) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} + \frac{n(C)}{n(\Omega)} - 0 \\
&= \frac{6 \times 1 \times 5 \times 5}{6^4} + \frac{6 \times 5 \times 4 \times 4}{6^4} \\
&= \frac{25 + 80}{216} = \frac{105}{216} \approx 0,49
\end{aligned}
$$

Cont.

- Outra forma:

$$
\begin{aligned}
P(B \cup C) &= \frac{n(B \cup C)}{n(\Omega)} = \frac{n(B) + n(C)}{n(\Omega)} \\
&= \frac{6 \times 1 \times 5 \times 5 + 6 \times 5 \times 4 \times 4}{6^4} \\
&= \frac{25 + 80}{216} = \frac{105}{216} \approx 0,49
\end{aligned}
$$