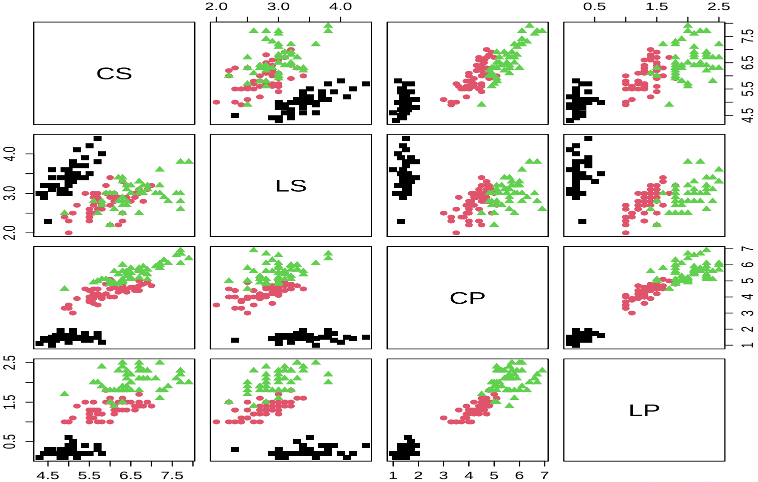
Análise de componentes principais: parte 2

Prof. Caio Azevedo

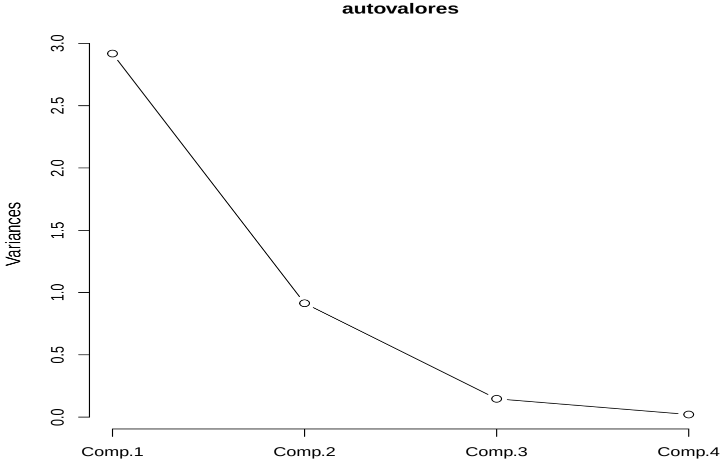
Exemplo 1: dados da íris “de Fisher”

- Recapitulando: quatro variáveis, três grupos, 50 observações por grupo.
- Objetivos: caracterizar os grupos em relação à essas quatro variáveis e compará-los.
- Utilizaremos a análise de componentes principais (usando a matriz de correlações) para esse fim.
- Denotaremos por “grupo” os tipo de iris (setosa, versicolor e virginica).

Matriz de dispersão: ■ - S, ● - Ver, ▲ - Vir



Scree-plot



autovalores
Variances
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
Comp.1
Comp.2
Comp.3
Comp.4

Resultados da ACP

- Variâncias de cada componente:

$\widetilde{\lambda}_1 = 2,91, \widetilde{\lambda}_2 = 0,91, \widetilde{\lambda}_3 = 0,15, \widetilde{\lambda}_4 = 0,02.$

- Variância explicada

	Comp. 1	**Comp. 2**	**Comp. 3**	**Comp. 4**
PVE (%)	72,96	22,85	3,67	0,51
PVEA (%)	72,96	95,81	99,48	100,00

Resultados da ACP

- Componentes principais

	Comp. 1(Y_1)	**Comp. 2 (Y_2)**
CS (Z_1)	0,52 (0,89)	-0,37 (0,37)
LS (Z_2)	-0,27 (-0,46)	-0,92 (0,88)
CP (Z_3)	0,58 (0,99)	-0,02 (0,02)
LP (Z_4)	0,56 (0,96)	-0,07 (0,07)

- Primeira componente (CP1): constrate entre as variáveis CS, CP e LP e a variável LS.
- Segunda componente (CP2): é uma média ponderada entre as variáveis CS e LS.

Equações das componentes

- Para $i = 1, 2, ..., 150$ (flores)

$$
\begin{aligned}
Y_{1i} &= 0,52Z_{i1} - 0,27Z_{i2} + 0,58Z_{i3} + 0,56Z_{i4} \\
Y_{2i} &= -0,37Z_{1i} - 0,92Z_{2i}
\end{aligned}
$$

Interpretações

- Valores positivos para CP1 e CP2:
  - Valores acima da média (CS, CP, LP) e abaixo da média (LS).
- Valores negativos para CP1 e CP2:
  - Valores abaixo da média (CS, CP, LP) e acima da média (LS).
- Valores positivos para CP1 e negativos CP2:
  - Valores acima da média (CS, CP, LP,LS) .
- Valores negativos para CP1 e positivos para CP2:
  - Valores abaixo da média (CS, CP, LP, LS).

Dispersão entre as duas primeiras componentes, por grupo

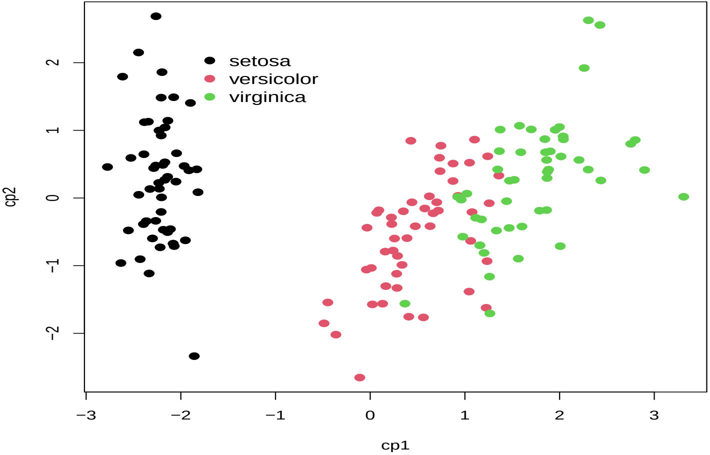
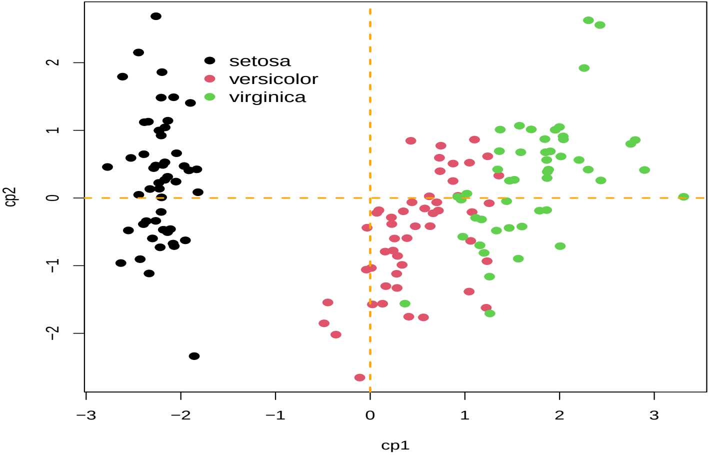
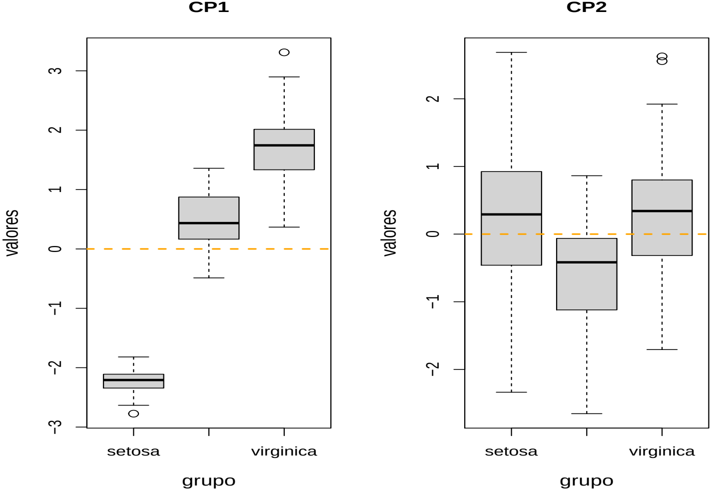


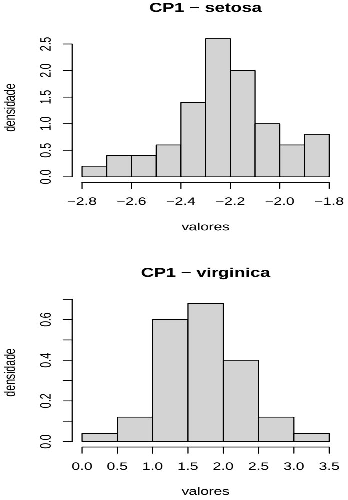
Gráfico anterior, com divisão de quadrantes



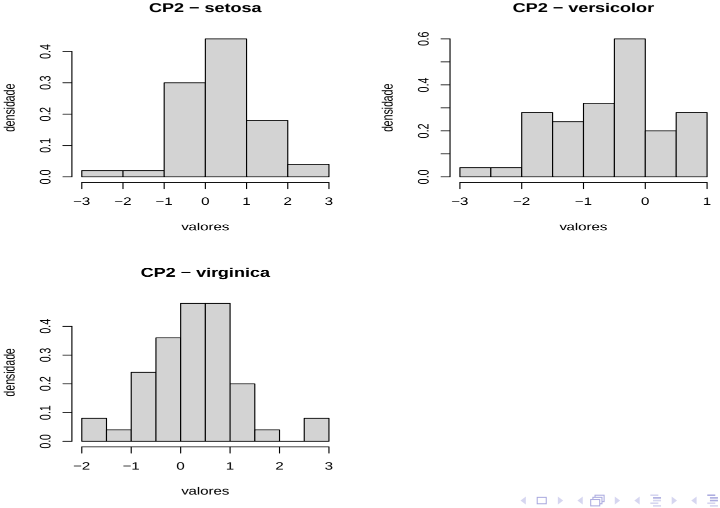
Box plots das duas CP's



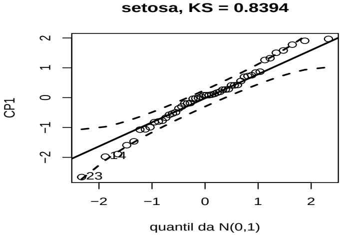
Histogramas da CP1

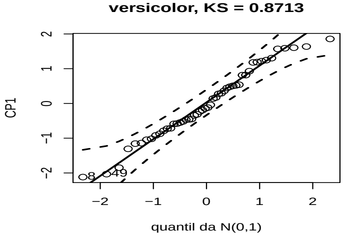


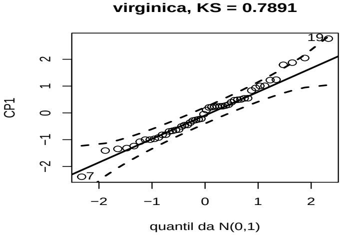
Histogramas da CP2



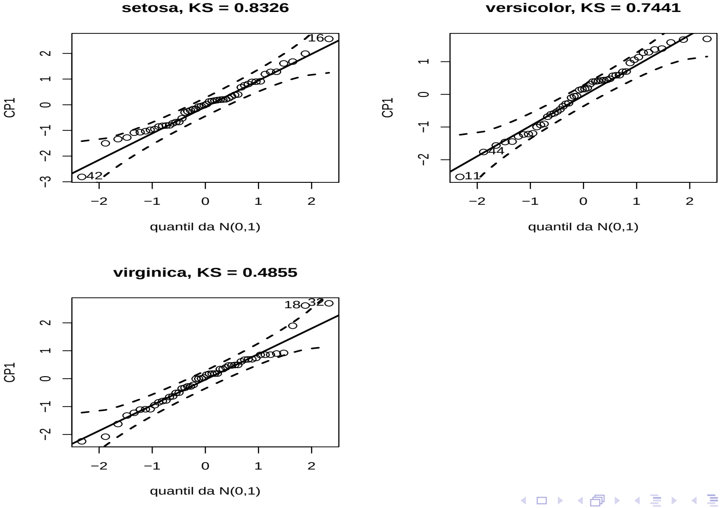
QQplot para CP1



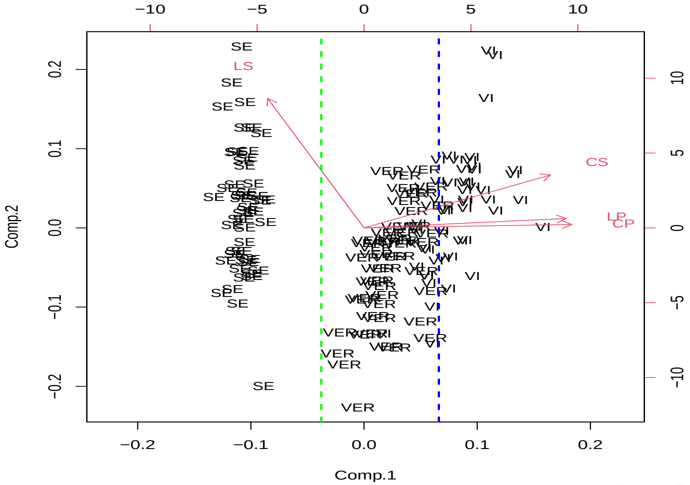




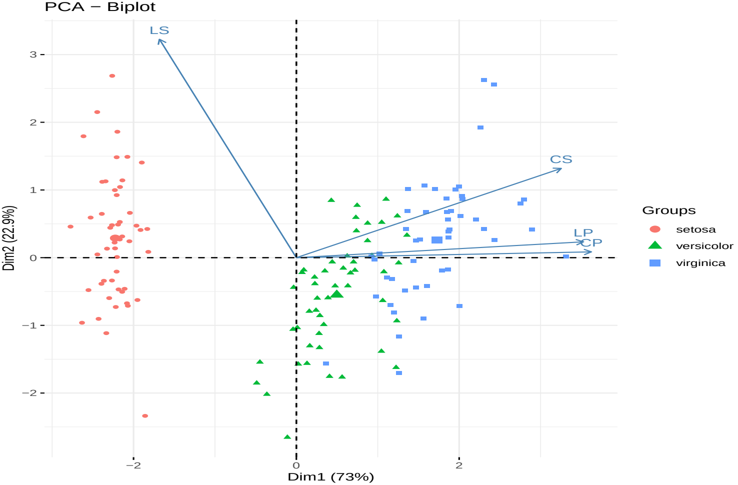
QQplot para CP2



Biplot: duas componentes principais



Biplot: duas componentes principais



Comparação de grupos via modelos lineares

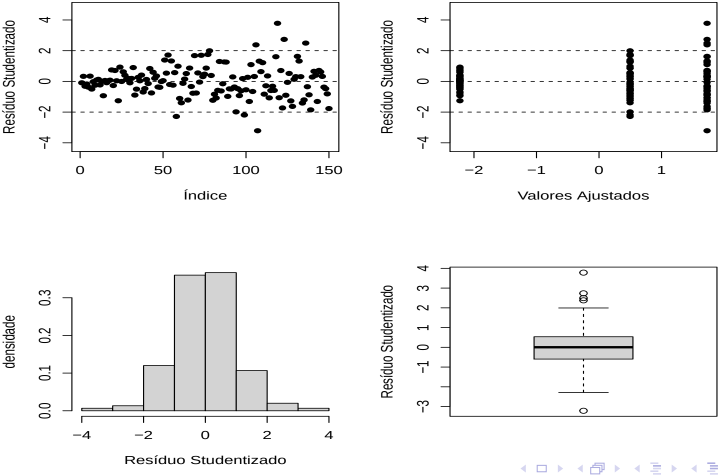
$$Y_{ijk} = \mu_k + \alpha_{ik} + \xi_{ijk},$$

$i = 1, 2, 3$ (tipo de iris, setosa, versicolor, virginica), $j = 1, ..., n_i$,

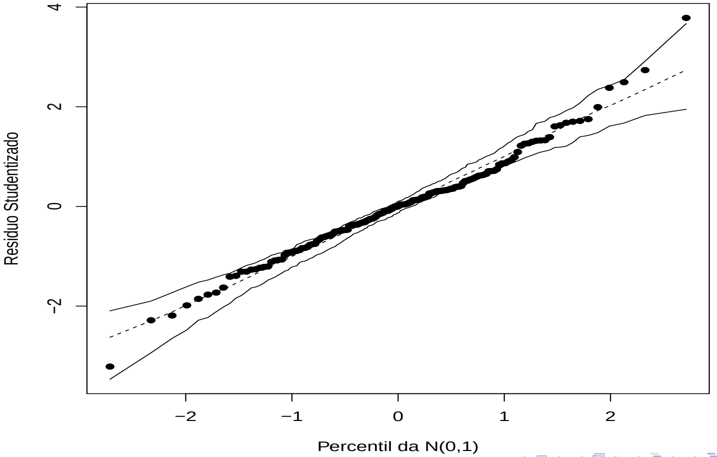
$n_i = 50, \forall i$, $k = 1, 2$ (componente principal), $\xi_{ijk} \overset{i.i.d}{\sim} N(0, \sigma_k^2)$

- Y_{ijk} : valor da componente principal k, da planta j, do tipo de íris i.
- μ_k : média da componente principal k do grupo de referência (setosa).
- α_{ik} : incremento na média da componente principal k, do grupo i, em relação ao grupo de referência.
- Utilizou-se o resíduo "studentizado" (veja aqui), para verificar a qualidade de ajuste do modelo.

Componente 1: gráficos de diagnóstico



Componente 1: QQ-plot com envelopes



Componente 1

Parâmetro	Estimativa	EP	Estat.t	p-valor
μ_1	-2,22	0,06	-35,65	$< 0{,}0001$
α_{21}	2,72	0,09	30,83	$< 0{,}0001$
α_{31}	3,95	0,09	44,79	$< 0{,}0001$

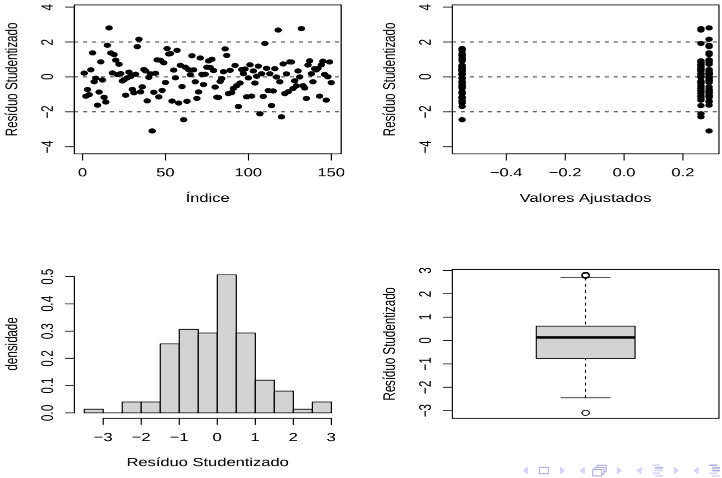
Há diferença entre o primeiro grupo e os outros dois. Vamos agora testar a igualdade entre as médias dos dois outros grupos através de testes do tipo $\boldsymbol{C}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{M}$ (veja mais aqui).

Componente 1

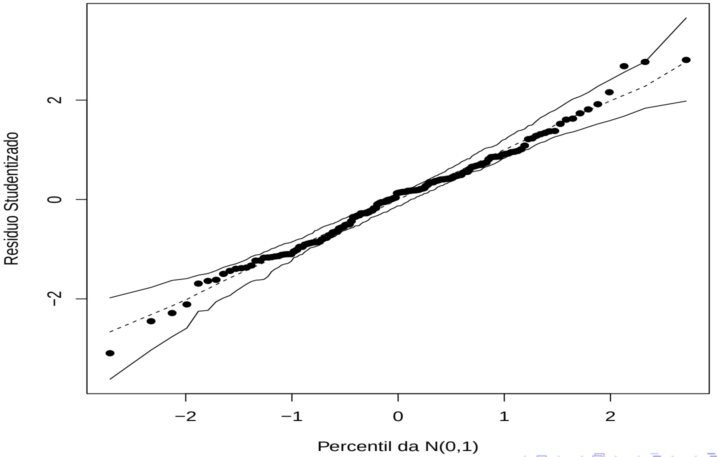
- Teste: $\alpha_{21} = \alpha_{31}$ vs $\alpha_{21} \neq \alpha_{31}$, $f_c = 194,83\,(< 0,0001)$.
- Médias preditas pelo modelo.

grupo	Estimativa	EP	IC(95%)
setosa	-2,22	0,06	[-2,35 ; -2,10]
versicolor	0,50	0,06	[0,37 ; 0,62]
virginica	1,73	0,06	[1,60 ; 1,85]

Componente 2: gráficos de diagnóstico



Componente 2: QQ-plot com envelopes

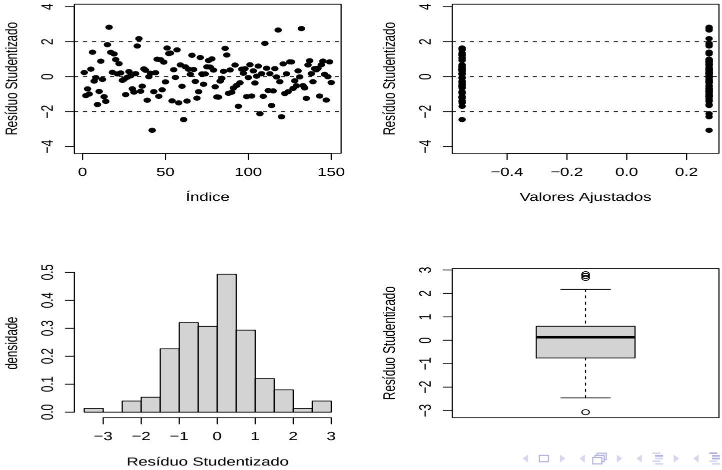


Componente 2

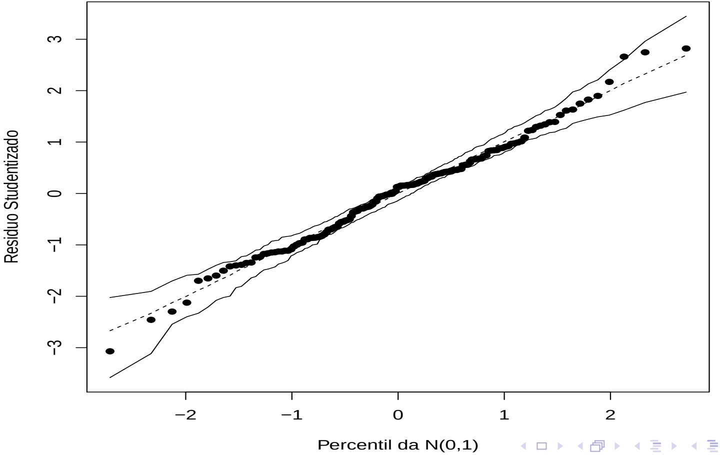
Parâmetro	Estimativa	EP	Estat.t	p-valor
μ_2	0,2889	0,1247	-2,32	0,0219
α_{22}	-0,8391	0,1764	4,76	$<$0,0001
α_{32}	-0,0277	0,1764	0,16	0,8755

Há diferença entre o primeiro grupo e o segundo e uma equivalência entre aquele e o terceiro. Vamos ajustar um modelo reduzido ($\alpha_{32} = 0$).

Componente 2: gráficos de diagnóstico



Componente 2: QQ-plot com envelopes



Componente 2

- Estimativa dos parâmetros.

Parâmetro	Estimativa	EP	Estat.t	p-valor
μ_2	0,2751	0,0879	-3,13	0,0021
α_{22}	-0,8253	0,1523	5,42	$<$0,0001

- Médias preditas pelo modelo.

grupo	Estimativa	EP	IC(95%)
setosa/virginica	0,28	0,09	[-0,45 ; -0,10]
versicolor	-0,55	0,12	[0,30 ; 0,80]