Modelo Uniforme

- Dizemos que uma v.a. X tem distribuição uniforme no intervalo $[a, b]$, $a < b$ se sua f.d.p., f_X, é dada por:

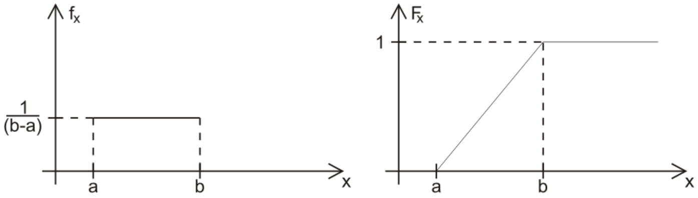
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Notação: $X \sim U[a, b]$ ou $X \sim U(a, b)$
- Cálculo da f.d.a.:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \int_a^x \frac{1}{b-a} dt = \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

Modelo Uniforme

- Gráficos da f.d.p. e f.d.a.



Modelo Uniforme

- Cálculo da $E(X)$:

$$E(X) = \int_a^b x \frac{1}{(b-a)} dx = \frac{(b+a)}{2}$$

- Cálculo da $Var(X)$:

$$E(X^2) = \int_a^b x^2 \frac{1}{(b-a)} dx = \frac{(a^2+ab+b^2)}{3}$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{(a^2+ab+b^2)}{3} - \frac{(b+a)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Modelo Uniforme

- Exemplo: A temperatura T de destilação do petróleo é crucial na determinação da qualidade final do produto. Vamos assumir que T é uma v.a. com distribuição $U[150^\circ, 300^\circ]$.

Modelo Exponencial

- Dizemos que uma v.a. X possui distribuição exponencial com parâmetro λ ($\lambda > 0$) se a f.d.p. f_X é dada por:

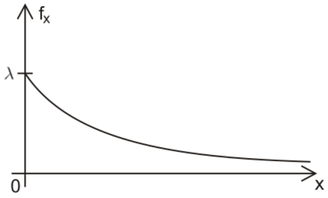
$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Notação: $X \sim \exp(\lambda)$
- Cálculo da f.d.a.:

$$F_X(x) = \begin{cases} \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Modelo Exponencial

- Gráfico da f.d.p.



Modelo Exponencial

- Introduzindo a função gamma:

$$\Gamma(u) = \int_0^{\infty} t^{u-1} e^{-t} dt, \quad u > 0$$

- Propriedades:
  - $\Gamma(u+1) = u\Gamma(u)$
  - $\Gamma(n) = (n-1)! \;\; \forall \; n \in \mathbb{N}$
  - $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$
- Essa função tem um papel importante na modelagem estatística e auxilia nos cálculos da esperança e variância de diversos modelos probabilísticos.

Modelo Exponencial

- Cálculo da $E(X)$ (resolver a integral):

$$E(X) = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

- Cálculo da $Var(X)$ (resolver a integral):

$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2\lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Modelo Exponencial

- Exemplo: O tempo de vida (em horas) de um transistor é uma v.a. T com distribuição $exp(\lambda)$ em que $\lambda = \frac{1}{500}$.
  - $E(T) = 500$ horas.
  - $P(T \geq 500) = \int_{500}^{\infty} f_T(t)dt = 0,3678$. (EXERCÍCIO - verificar)

Modelo Normal

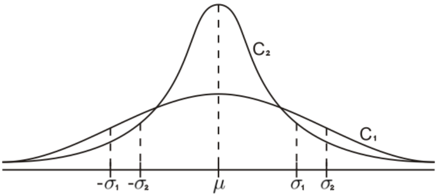
- Dizemos que uma v.a. X possui distribuição normal com parâmetros μ e σ^2, $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma^2 > 0$, se a f.d.p. f_X é dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \qquad -\infty < x < \infty$$

- Notação: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
- Devido à impossibilidade de calcular a f.d.a. analiticamente, recorre-se à tabela da **Normal Padrão** ($N(0,1)$) (`http://www.ime.unicamp.br/~cnaber/tabela_normal.pdf`)

Modelo Normal

- Gráfico da f.d.p.



$E(X) = \mu$: representa o ponto de simetria (média) de f_X.

$Var(X) = \sigma^2$: representa a dispersão (variância) de f_X.

Modelo Normal

Afirmação: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ se, e somente se $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

- Φ denota a f.d.a. da Normal padrão:

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{x^2}{2}\right)} dx$$

- Temos, que se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então:

$$F_X(a) = P(X \leq a) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Modelo Normal

- Exercitando o uso da tabela da Normal:
  - $\Phi(0,2) = 0,5793$
  - $\Phi(0,45) = 0,6736$
  - $\Phi(1,98) = 0,9761$
  - $\Phi(-0,45) = 1 - \Phi(0,45) = 0,3264$

Modelo Normal

Exemplos

- $Z \sim N(0,1)$
- $Y \sim N(4,2^2)$
  - $F_Y(6) = P(Y \leq 6) = P\left(\frac{Y-4}{2} \leq \frac{6-4}{2}\right) = P(Z \leq 1) = \Phi(1) = 0,8413$
  - $P(2 < Y \leq 6) = P\left(\frac{2-4}{2} < \frac{Y-4}{2} \leq \frac{6-4}{2}\right) = P(-1 < Z \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) - [1 - \Phi(1)] = 2\Phi(1) - 1 = 2(0,8413) - 1 = 0,6826$

Modelo Normal

- Valor Esperado (trasnformação de variáveis + função gama):

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx = \mu$$

- Variância (trasnformação de variáveis + função gama):

$$\begin{aligned} Var(X) &= E([X - E(X)]^2) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx = \sigma^2 \end{aligned}$$

Modelo Normal

- Exemplo: As alturas dos indivíduos de uma população têm distribuição Normal com média $\mu = 170cm$ e desvio padrão $\sigma = 5cm$, ou seja, $X \sim N(170, 5^2)$, calcule: $P(X \leq 182)$, $P(X \geq 167)$, $P(165 \leq X \leq 178)$, $P(X > x) = 0,8754$
- Temos que

$$P(X \leq 182) = P\left(Z \leq \frac{182 - 170}{5}\right) = P(Z \leq 2,4) = 0,9918$$

$$P(X \geq 167) = 1 - P\left(Z \leq \frac{167 - 170}{5}\right) = 1 - P(Z \leq 2,4) = 0,7257$$

Modelo Normal

- Continuando

$$\begin{aligned} P(165 \leq X \leq 178) &= P\left(X \leq 178\right) - P\left(X \leq 178\right) \\ &= P\left(Z \leq \frac{178-170}{5}\right) - P\left(Z \leq \frac{165-170}{5}\right) \\ &= 0,9452 - 0,1587 = 0,7866 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X > x) &= 0,8754 \rightarrow P(X \leq x) = 0,1246 \rightarrow P(Z \leq z) = 0,1246 \\ &\rightarrow z = -1,15 \rightarrow x = -1,15 \times \sigma + \mu = 164,25 \end{aligned}$$

Modelo Qui-Quadrado

- Dizemos que uma v.a X tem distribuição qui-quadrado com k graus de liberdade, se sua f.d.p, f_X, é dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} x^{(k/2)-1} e^{-x/2}; x > 0, k > 0.$$

- Notação: $X \sim \mathcal{X}^2_{(k)}$.

Modelo Qui-Quadrado

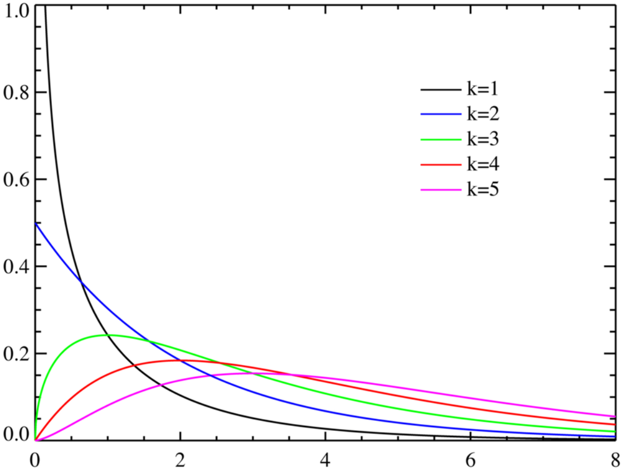


Figura: f.d.p para diferentes valores de k.

Modelo Qui-Quadrado

- Valor esperado:

$$E(X) = k$$

- Variância:

$$Var(X) = 2k$$

- **Afirmações:** Se $X \sim N(0,1)$, então $X^2 \sim \mathcal{X}^2_{(1)}$.

$$\text{Se } X_i \overset{\text{iid}}{\sim} N(0,1), \text{ então } \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \mathcal{X}^2_{(n)}. \text{ (iid :}$$

independentes e identicamente distribuídas).

Modelo Qui-Quadrado

- Exercitando o uso da tabela da qui-quadrado:
  - Se $X \sim \mathcal{X}^2_{(10)}$, $P(X > 2,558) = 0,99$ e $P(X > 18,307) = 0,05$
  - Se $X \sim \mathcal{X}^2_{(30)}$, $P(X > 40,256) = 0,10$
  - Se $X \sim \mathcal{X}^2_{(5)}$, qual o valor de x_0 cuja $P(X \leq x_0) = 0,975$?

    R. $x_0 = 12,833$
  - Se $X \sim \mathcal{X}^2_{(3)}$, qual o valor de x_0 cuja $P(X < x_0) = 0,95$?

    R. $x_0 = 7,815$

Modelo t-Student

- Dizemos que uma v.a X tem distribuição t-Student com ν graus de liberdade, se sua f.d.p, f_X, é dada por:

$$f_X(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{(\nu+1)/2} \quad ; x \in (-\infty, \infty), \nu > 0.$$

- Notação: $X \sim t_{(\nu)}$.

Modelo t-Student

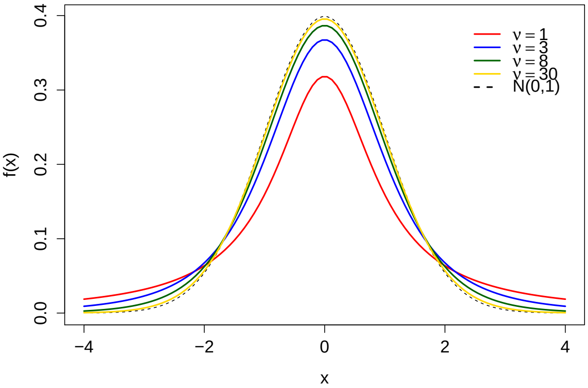


Figura: f.d.p para diferentes valores de ν.

Modelo t-Student

- Valor esperado:

$$E(X) = 0$$

- Variância:

$$Var(X) = \frac{\nu}{\nu - 2}, \nu > 2$$

- **Afirmação:** Se $Z \sim N(0,1)$ e $V \sim \mathcal{X}^2_{(\nu)}$, $Z \perp V$, então

$$Y = \frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{k}}} \sim t_{(\nu)}$$

Modelo t-Student

- Exercitando o uso da tabela da t-Student:

  - Se $X \sim t_{(6)}$, $P(X > 2,447) = 0,025$ e
    $P(-1,943 < X < 1,943) = 0,90$

  - Se $X \sim t_{(11)}$, qual o valor de x_0 cuja $P(X < x_0) = 0,75$?
    R. $x_0 = 0,697$

  - Se $X \sim t_{(20)}$, qual o valor de x_0 cuja $P(X > x_0) = 0,10$?
    R. $x_0 = 1,325$

Modelo F de Snedecor

- Dizemos que uma v.a X tem distribuição F de Snedecor com m e n graus de liberdade se sua f.d.p, f_X, é dada por:

$$f_X(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} x^{\frac{m}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left[\left(\frac{m}{n}\right)x+1\right]^{\frac{m+n}{2}}}; x > 0, m, n > 0.$$

- Notação: $X \sim \mathcal{F}(m, n)$.

Modelo F de Snedecor

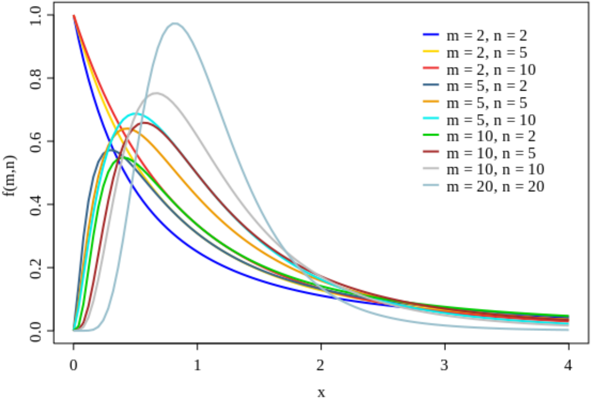


Figura: f.d.p para diferentes valores de m e n.

Modelo F de Snedecor

- Valor esperado:

$$E(X) = \frac{n}{n-2}, n > 2$$

- Variância:

$$Var(X) = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}, n > 4$$

- **Afirmação:** Se $Y_1 \sim \mathcal{X}^2_{(m)}$ e $Y_2 \sim \mathcal{X}^2_{(n)}$, $Y_1 \perp Y_2$, então

$$W = \frac{Y_1/m}{Y_2/n} \sim \mathcal{F}(m, n)$$

Modelo F de Snedecor

- **Observação:** Em geral, as tabelas contém apenas os quantis da cauda superior ($\mathcal{F}(\alpha, m, n)$, $P(X \leq \mathcal{F}(\alpha, m, n)) = \alpha$, $X \sim \mathcal{F}(\alpha, m, n)$, para $\alpha \geq 0,90$). Os quantis da cauda inferior $\mathcal{F}(1 - \alpha, m, n)$ podem ser obtidos a partir da seguinte relação:

$$\mathcal{F}(1 - \alpha, m, n) = \frac{1}{\mathcal{F}(\alpha, n, m)}.$$

Modelo F de Snedecor

- Exercitando com a tabela da F de Snedecor:

  - Se $X \sim \mathcal{F}(5,7)$, $P(X > 3,97) = 0,05$ ou então $P(X \leq 3,97) = 0,95$

  - Se $X \sim \mathcal{F}(3,8)$, $P(X < 7,59) = 0,99$

  - Se $X \sim \mathcal{F}(5,7)$, qual o valor de f_0 cuja $P(X < f_0) = 0,05$?
    R. $0,05 = P(\mathcal{F}(5,7) < f_0) = P[1/\mathcal{F}(7,5) < f_0] = P[\mathcal{F}(7,5) > 1/f_0]$.
    Consultando a tabela, obtemos que $1/f_0 = 4,88$ e, portanto, $f_0 = 0,205$.