

# Variáveis Aleatórias Contínuas

- Variáveis aleatórias contínuas: vamos considerar agora, quantidades (variáveis) para as quais não é possível associar uma tabela de probabilidades pontuais ou frequências
  - tempo de duração de uma chamada telefônica
  - tempo de vida de uma lâmpada
  - altura das pessoas
- Para esses tipos de quantidades para as quais não podemos associar frequências pontuais tais que a soma de todas elas seja igual a 1, surge o conceito de "função de densidade de probabilidade" (f.d.p.).

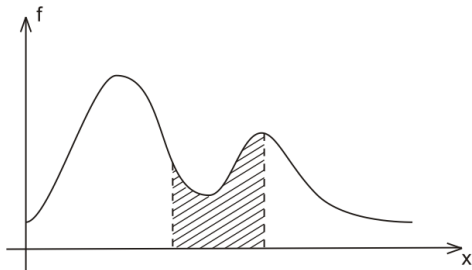
# Variáveis Aleatórias Contínuas

- Definição: a função de densidade de probabilidade de uma v.a.  $X$  é uma função  $f$  que verifica:
  - $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
  - $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$  ( $f$  é integrável)
- Toda v.a.  $X$  para a qual seja possível associar uma f.d.p. será chamada de v.a. contínua.

# Variáveis Aleatórias Contínuas

- A probabilidade de que uma v.a.  $X$  contínua pertença a um intervalo da reta  $(a,b]$ ,  $a < b$  é dada por:

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$



# Variáveis Aleatórias Contínuas

- Notação: se  $X$  for uma v.a. contínua com função de densidade de probabilidade  $f$ , no lugar de  $f$  denotaremos  $f_X$
- À probabilidade de que uma v.a.  $X$  contínua pertença ao intervalo da reta  $(-\infty, x]$  daremos o nome de função de distribuição acumulada (f.d.a.), e a denotaremos por  $F_X$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(u)du = P(X \leq x)$$

# Variáveis Aleatórias Contínuas

- Exemplo:  $X$  v.a. contínua com f.d.p.:

$$f_X(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Pela definição de f.d.p.:

- $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

- $\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 x dx + \int_1^2 (2 - x) dx = 1$

- Podemos também calcular  $P(0 < X \leq 0.8) = \int_0^{0.8} x dx = 0.32$

# Variáveis Aleatórias Contínuas

- Propriedade: toda v.a.  $X$  contínua (ou seja, que possui  $f_X$  como f.d.p.) tem probabilidade pontual nula:  $P(X = x) = 0$
- Resumindo:  $F(x) = P(X \leq x)$ 
  - caso discreto:  $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$
  - caso contínuo:  $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du$

# Variáveis Aleatórias Contínuas

- Definição: seja  $X$  uma v.a. contínua com densidade  $f_X$ , dizemos que  $X$  possui esperança finita se:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) dx < \infty$$

- Nesse caso, definimos:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

# Variáveis Aleatórias Contínuas

- Definição: seja  $X$  uma v.a. contínua com densidade  $f_X$ , se a quantidade  $E(|X|^k) < \infty$ ,  $k \geq 1$ , definimos por **momento** de ordem  $k$  da v.a. o valor  $E(X^k)$

- caso discreto:  $E(X^k) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i^k P(X = x_i)$

- caso contínuo:  $E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_X(x) dx$



# Variáveis Aleatórias Contínuas

■ Exercício: Para a função  $f_X$ , calcular

■  $E(X^2)$

■  $E(X^3)$

$$f_X(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

# Variáveis Aleatórias Contínuas

- Definição: seja  $X$  v.a. com valor esperado  $E(X)$ ,  $E(X^2) < \infty$ , definimos por variância, a quantidade:

$$\text{Var}(X) = E([X - E(X)]^2)$$

- E definimos como desvio padrão:

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

- Note que assim como no caso discreto, ambas as quantidades oferecem medidas de dispersão da variável  $X$  em relação ao valor esperado  $E(X)$ .

# Variáveis Aleatórias Contínuas

■ Exemplo:

$$f_X(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 x(2-x) dx = 1$$

$$\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X)]^2 f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} [x - 1]^2 f_X(x) dx = \frac{1}{6}$$