

Modelo Uniforme

- Exemplo: Uma rifa tem 100 bilhetes numerados de 1 a 100. Tenho 5 bilhetes consecutivos numerados de 21 a 25, e meu colega tem outros 5 bilhetes, com os números 1, 11, 29, 68 e 93. Quem tem maior probabilidade de ser sorteado?
 - espalhar os números é a melhor forma de ganhar o sorteio?
 - assumindo honestidade da rifa, todos os números têm a mesma probabilidade de ocorrência, com $\frac{1}{100}$ para cada um.
 - como eu e meu colega temos 5 bilhetes, temos a mesma probabilidade de ganhar a rifa: $\frac{5}{100} = \frac{1}{20}$
 - assim, a probabilidade de ganhar depende somente da quantidade de bilhetes que se tem na mão, independente da numeração.

Modelo Uniforme

■ Modelo Empírico

- X é uma variável aleatória cujos possíveis valores são representados por $\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$
- X segue o modelo uniforme discreto se atribui a mesma probabilidade $\frac{1}{k}$ a cada um desses possíveis valores
- $P(X = x_j) = \frac{1}{k} \quad \forall 1 \leq j \leq k$
- $E(X) = \sum_{i=1}^k p_i x_i = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i$
- $Var(X) = \sum_{i=1}^k p_i (x_i - E(X))^2 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (x_i - E(X))^2$

Propriedade Geral da Variância

- Definição: $Var(X) = E([X - E(X)]^2)$

$$\begin{aligned}E([X - E(X)]^2) &= E([X - \mu_X]^2) = E(X^2 - 2X\mu_X + \mu_X^2) \\&= E(X^2) - 2\mu_X E(X) + \mu_X^2 = \mu_{X^2} - 2\mu_X \mu_X + \mu_X^2 \\&= \mu_{X^2} - 2\mu_X^2 + \mu_X^2 = \mu_{X^2} - \mu_X^2 \\&= E(X^2) - [E(X)]^2\end{aligned}$$

- Então: $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

Modelo Uniforme

■ Retomando o modelo da uniforme

■ já sabemos que $E(X) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i$

■ portanto $[E(X)]^2 = \frac{1}{k^2} \left(\sum_{i=1}^k x_i \right)^2$

■ $E(X^2) = \sum_{i=1}^k p_i x_i^2 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i^2$

■ finalmente $Var(X) = \frac{1}{k} \left[\sum_{i=1}^k x_i^2 - \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^k x_i \right)^2 \right]$

Modelo Uniforme

- Exemplo: $X =$ resultado obtido no lançamento de um dado honesto

x	1	2	3	4	5	6
$p(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

- $E(X) = \frac{1}{6} \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{21}{6} = 3.5$
- $Var(X) = \frac{1}{6} [(1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36) - \frac{1}{6} \times (21)^2] = \frac{35}{2} = 17.5$

Modelo Uniforme

- Cálculo da f.d.a. de uma variável uniforme discreta:

- $F(x) = P(X \leq x) = \frac{n(x)}{k}$

- $n(x) =$ número de x_i 's tais que $x_i \leq x$

- Retomando o exemplo do dado:

- $F(2) = P(X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{2}{6}$

- $F(2.5) = P(X \leq 2.5) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{2}{6}$

Modelo Bernoulli

- Consideremos um experimento E com espaço de resultados Ω e o evento A .
- Vamos dizer que ocorreu sucesso se o evento A aconteceu. Se A não aconteceu ocorreu fracasso.
- Exemplo: Experimento lançar uma moeda e verificar se cai cara ou coroa. Consideramos como sucesso, a obtenção de cara.
- Este tipo de experimento se chama de ensaio Bernoulli.

Modelo Bernoulli

- Ensaios tipo Bernoulli: estamos interessados na ocorrência de um sucesso ou fracasso.
- Exemplo: uma pessoa é escolhida ao acaso entre os moradores de uma cidade, e é perguntado a ela se concorda com um projeto. As possíveis respostas são apenas "Sim" ou "Não".
- $\Omega = \{\text{Sim}, \text{Não}\}$
- $X = \begin{cases} 1, & \text{evento de interesse ocorre} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$
- $P(X = 1) = P(\text{sucesso}) = p \Rightarrow P(X = 0) = P(\text{fracasso}) = 1 - p$

Modelo Bernoulli

- Forma geral de escrever a probabilidade de uma variável Bernoulli:

$$P(X = x) = p^x(1 - p)^{1-x} \text{ em que } x = 0, 1$$

- $E(X) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$

- $E(X^2) = 0^2 \times (1 - p) + 1^2 \times p = p$

- $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = p - p^2 = p(1 - p)$

- f.d.a.: $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - p, & x \in [0, 1) \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$

Modelo Bernoulli

- Exemplo: lançamos um dado e consideramos como sucesso, a obtenção da face 5. Supondo que o dado é honesto:

x	0	1
$p(x)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

- $P(X = x) = p^x(1 - p)^{1-x} = \left(\frac{1}{6}\right)^x\left(\frac{5}{6}\right)^{1-x}$ em que $x = 0, 1$
- $E(X) = \frac{1}{6}$
- $E(X^2) = \frac{1}{6}$
- $Var(X) = \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{6-1}{36} = \frac{5}{36}$

Modelo Binomial

- Consideremos novamente um experimento E com espaço de resultados Ω e o evento A .
- Vamos dizer que ocorreu sucesso se o evento A aconteceu. Se A não aconteceu ocorreu fracasso.
- Repetimos o experimento n vezes, de forma independente.
- X = Número de sucessos nos n experimentos.
- Exemplo: lançar uma moeda 3 vezes e verificar se cai cara ou coroa. Consideramos como sucesso, a obtenção de cara.
- Os valores possíveis de X são $\{0, 1, 2, 3\}$.

Modelo Binomial

- A repetição de ensaios Bernoulli independentes dá origem a uma variável aleatória Binomial.
- Exemplo: Sabe-se que a eficiência de uma vacina é de 80%. Um grupo de 3 indivíduos é sorteado, dentre a população vacinada, e cada um submetido a testes para averiguar se está imunizado. Nesse caso, consideramos como sucesso, a imunização.

- $X_i = \begin{cases} 1, & \text{indivíduo } i \text{ está imunizado} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

- pelo enunciado, sabe-se que $P(X_i = 1) = p = 0.8$

Modelo Binomial

- Os indivíduos X_1 , X_2 e X_3 são independentes e cada um é uma variável Bernoulli
- Se o interesse está em estudar $X =$ número de indivíduos imunizados no grupo, X poderá assumir valores em $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$
- Note que $X = X_1 + X_2 + X_3$

Modelo Binomial

evento	P(evento)	X
$X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0$	$(0.2)^3$	0
$X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 0$	$0.8 \times (0.2)^2$	1
$X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 0$	$0.8 \times (0.2)^2$	1
$X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 1$	$0.8 \times (0.2)^2$	1
$X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0$	$(0.8)^2 \times 0.2$	2
$X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1$	$(0.8)^2 \times 0.2$	2
$X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 1$	$(0.8)^2 \times 0.2$	2
$X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1$	$(0.8)^3$	3

Modelo Binomial

- Assim, as probabilidades de cada valor possível de X são:

x	0	1	2	3
$p(x)$	$(0.2)^3$	$3 \times 0.8 \times (0.2)^2$	$3 \times (0.8)^2 \times 0.2$	$(0.8)^3$

- E o comportamento de X é completamente determinado pela função

$$P(X = x) = \binom{3}{x} (0.8)^x (0.2)^{3-x}$$

Modelo Binomial

- Modelo Geral: Considere a repetição de n ensaios X_i Bernoulli independentes e todos com a mesma probabilidade de sucesso p . A variável aleatória $X = X_1 + \dots + X_n$ que representa o total de sucessos corresponde ao modelo Binomial com parâmetros n e p .

- A probabilidade de se observar x é dada pela expressão geral

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad \forall x = 0, 1, \dots, n$$

- notação: $X \sim \text{Bin}(n, p)$

Modelo Binomial

- No exemplo da vacina, temos então $n = 3$ e $p = 0.8$
 - $X \sim \text{Bin}(3, 0.8)$
 - $E(X) = 3 \times 0.8$
 - $\text{Var}(X) = 3 \times 0.8 \times 0.2$

Propriedades da Esperança e Variância

- A esperança de uma soma de variáveis aleatórias é a soma das esperanças dessas variáveis

$$X \text{ e } Y \text{ variáveis aleatórias} \Rightarrow E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

- A variância de uma soma de duas variáveis aleatórias independentes é a soma da variância dessas variáveis

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$$

- Lembrando que duas variáveis aleatórias são independentes \Leftrightarrow

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

Modelo Geométrico

- Consideremos novamente um experimento E com espaço de resultados Ω e o evento A .
- Vamos dizer que ocorreu sucesso se o evento A aconteceu.
- Repetimos o experimento até o primeiro sucesso.
- Y = Número de repetições.
- Exemplo: lançar uma moeda repetidas vezes até a primeira cara.
- Os valores possíveis de Y são $\{1, 2, 3, \dots\}$.
- Repetimos um ensaio Bernoulli até o primeiro sucesso ($p = P(\text{sucesso})$).
- Y = Número de ensaios Bernoulli até o primeiro sucesso.

Modelo Geométrico

- $P(Y = 1) = p.$
- $P(Y = 2) = (1 - p)p.$
- $P(Y = k) = (1 - p)^{k-1}p.$
- $Y \sim G(p).$
- $E(Y) = \frac{1}{p}.$
- $V(Y) = \frac{1-p}{p^2}.$
- $P(Y \geq k + m | Y \geq m) = P(Y \geq k).$ (Perda de memória)

Distribuição Hipergeométrica

- População dividida em duas características
- Extrações casuais sem reposição
- Detalhes:
 - N objetos
 - r têm a característica A
 - $N - r$ têm a característica B
 - um grupo de n elementos é escolhido ao acaso, dentre os N possíveis, sem reposição
- Objetivo: calcular a probabilidade de que este grupo de n elementos contenha x elementos com a característica A

Distribuição Hipergeométrica

- Modelo Geral:

$$P(X = x) = \frac{\binom{r}{x} \binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad \text{para todo } 0 \leq x \leq \min\{r, n\}$$

- X registra o número de elementos dentre os n sorteados, que possuem a característica A
- X tem distribuição Hipergeométrica

Distribuição Hipergeométrica

- Notação: $X \sim \text{Hip}(N, n, r)$
- X tem distribuição Hipergeométrica com parâmetros N, n, r , então:
 - $E(X) = \frac{nr}{N}$
 - $\text{Var}(X) = \frac{nr}{N} \left(1 - \frac{r}{N}\right) \frac{(N-n)}{(N-1)}$

Distribuição Hipergeométrica

■ Aplicação: Controle de Qualidade

Suponha um lote com $N = 100$ elementos a ser analisado. São escolhidas $n = 5$ peças sem reposição. Sabendo que neste lote de 100 elementos, $r = 10$ são defeituosos, a probabilidade de não se obter nenhuma peça defeituosa na amostra retirada é:

$$P(X = 0) = \frac{\binom{10}{0} \binom{100-10}{5-0}}{\binom{100}{5}} = \frac{\binom{90}{5}}{\binom{100}{5}} \approx 0.584$$

Distribuição Hipergeométrica

- A probabilidade de se obter pelo menos uma peça defeituosa é:

$$\sum_{i=1}^5 P(X = i) = 1 - P(X = 0) \approx 0.426$$

- $E(X) = \frac{nr}{N} = \frac{5 \times 10}{100}$

- $Var(X) = \frac{nr}{N} \left(1 - \frac{r}{N}\right) \frac{(N-n)}{(N-1)} = \frac{5 \times 10}{100} \left(1 - \frac{10}{100}\right) \frac{(100-10)}{(100-1)} \approx 0.409$

Distribuição de Poisson

- Uma variável aleatória X tem distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda > 0$, se sua função de probabilidade é dada por:

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \quad \forall x = 0, 1, 2, \dots$$

- λ é chamado de taxa de ocorrência
- $E(X) = \text{Var}(X) = \lambda$
- Notação: $X \sim P(\lambda)$

Distribuição de Poisson

- Exemplo: O Comportamento da emissão de partículas radioativas (de alguma fonte) são, em geral, modeladas através de uma distribuição de Poisson, com o valor do parâmetro dependendo da fonte utilizada.

Supondo que o número de partículas α emitidas por minuto é uma variável aleatória seguindo o modelo Poisson com parâmetro $\lambda = 5$, ou seja, a taxa de ocorrência é de 5 emissões a cada minuto, podemos estar interessados em calcular a probabilidade de haver mais de duas emissões por minuto.

Distribuição de Poisson

- $X \sim P(5)$

- $P(X > 2) = \sum_{x=3}^{\infty} \frac{e^{-5}5^x}{x!} = 1 - \sum_{x=0}^2 \frac{e^{-5}5^x}{x!} \approx 0.875$

- $E(X) = \lambda = 5$

- $Var(X) = \lambda = 5$

Distribuição de Poisson

- Considerando a distribuição $Bin(n, p)$, quando temos grandes valores para n e p pequeno (mantendo-se o produto np constante), podemos usar a seguinte aproximação para a probabilidade:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \approx \frac{e^{-np} (np)^x}{x!} \quad \forall x = 0, 1, 2, \dots$$

- Geralmente considera-se o critério $np \leq 7$ para usar essa aproximação

Distribuição de Poisson

■ Exemplo: $X \sim \text{Bin}(100, 0.065)$, deseja-se obter $P(X = 10)$

■ $\lambda = np = 100 \times 0.065 = 6.5 \leq 7$

■ no modelo Binomial:

$$P(X = 10) = \binom{100}{10} (0.065)^{10} (0.935)^{100-10} = 0.055$$

■ no modelo Poisson: $P(X = 10) = \frac{e^{-6.5}(6.5)^{10}}{10!} \approx 0.056$