Probabilidade Condicional

- Seja o experimento que consiste em lançar um dado duas vezes e anotar os dois resultados
- O espaço amostral é dado por $S = \{(i, j) : 1 \leq i \leq 6, 1 \leq j \leq 6\}$
- Sejam os eventos:

  $A = \{$o valor obtido em cada lançamento é menor ou igual a 2$\}$

  $B = \{$a soma dos valores obtidos nos dois lançamentos é 4$\}$
- $P(A) =?$

  $P(B) =?$

Probabilidade Condicional

- Para calcular as probabilidades de A e B:

  $A = \{(1,1);(1,2);(2,1);(2,2)\}$

  $B = \{(1,3);(2,2);(3,1)\}$

- Portanto, assumindo equiprobabilidade em S, e sabendo que o total de resultados possíveis em S é 36, temos que:

  $P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

  $P(B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

- Além disso, A e B têm o ponto $(2,2)$ em comum, portanto:

  $P(A \cap B) = \frac{1}{36}$

Probabilidade Condicional

- Suponha agora, a seguinte situação: o experimento é programado e uma "informação de última hora" é recebida, informando que em cada um dos lançamentos, o número a observar será menor ou igual a 2, ou seja, A é a "informação de última hora"
- Assumindo a potencial ocorrência de A, qual a probabilidade de B acontecer?

  $P(B|A) = P(\text{B ocorrer dado que A ocorre})$
- B agora está sendo observado em um espaço amostral diferente de S, está sendo observado no espaço de A

Probabilidade Condicional

- Considerando então que A agora é nosso espaço amostral, e assumindo equiprobabilidade em A:
  {B ocorrer dado que A ocorre} $= \{(2,2)\}$
- Portanto, $P(B|A) = \frac{1}{4}$
- Note que: $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{(1/36)}{(1/9)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$
- Consequentemente:
  $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)\,P(B|A)$
- Portanto, para calcular a probabilidade condicional, basta conhecer a probabilidade dos eventos, e não necessariamente seus espaços amostrais.

Exemplos

- Exemplo 1: relembrando a tabela de alunos

	Masculino (Ma)	Feminino (Fe)	Total
Mat. Pura (M)	70	40	110
Mat. Aplicada (A)	15	15	30
Estatística (E)	10	20	30
Computação (C)	20	10	30
Total	115	85	200

Exemplos

- $P\left(Fe|E\right) = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$
- Sabendo:

  $P\left(E \cap Fe\right) = \frac{20}{200}$

  $P\left(E\right) = \frac{30}{200}$

  $\Rightarrow P\left(Fe|E\right) = \frac{P(E \cap Fe)}{P(E)} = \frac{(20/200)}{(30/200)} = \frac{20}{200} \times \frac{200}{30} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

Exemplos

- Exemplo 2: Uma urna contém 2 bolas brancas (B) e 3 vermelhas (V). Suponha que sorteamos duas bolas ao acaso **sem reposição**.
  - a primeira retirada tem as seguintes probabilidades: $P(B) = \frac{2}{5}$ e $P(V) = \frac{3}{5}$
  - a segunda retirada terá probabilidades diferentes, de acordo com o que foi selecionado na primeira, portanto, terá as seguintes probabilidades: $P(B|B) = \frac{1}{4}$, $P(B|V) = \frac{2}{4}$, $P(V|B) = \frac{3}{4}$ e $P(V|V) = \frac{2}{4}$

Exemplos

- e as probabilidades conjuntas da primeira e segunda retirada:

$$P(B,B) = P(B)\,P(B|B) = \tfrac{2}{5} \times \tfrac{1}{4} = \tfrac{2}{20}$$
$$P(B,V) = P(B)\,P(V|B) = \tfrac{2}{5} \times \tfrac{3}{4} = \tfrac{6}{20}$$
$$P(V,B) = P(V)\,P(B|V) = \tfrac{3}{5} \times \tfrac{2}{4} = \tfrac{6}{20}$$
$$P(V,V) = P(V)\,P(V|V) = \tfrac{3}{5} \times \tfrac{2}{4} = \tfrac{6}{20}$$

Exemplos

- Exemplo 3: Uma urna contém 2 bolas brancas (B) e 3 vermelhas (V). Suponha que sorteamos duas bolas ao acaso **com reposição**. Nesse caso, as retiradas são independentes, ou seja, a primeira retirada não influencia nas possibilidades de resultados da segunda retirada.
  - a primeira retirada tem as seguintes probabilidades: $P(B) = \frac{2}{5}$ e $P(V) = \frac{3}{5}$
  - a primeira retirada tem as seguintes probabilidades: $P(B|B) = \frac{2}{5}$, $P(B|V) = \frac{2}{5}$, $P(V|B) = \frac{3}{5}$ e $P(V|V) = \frac{3}{5}$

Exemplos

- Note que $P(B|*) = P(B)$ e $P(V|*) = P(V)$
- Portanto:

$$P(B,B) = P(B)P(B|B) = P(B)P(B) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$$
$$P(B,V) = P(B)P(V|B) = P(B)P(V) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$$
$$P(V,B) = P(V)P(B|V) = P(V)P(B) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$$
$$P(V,V) = P(V)P(V|V) = P(V)P(V) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$$

Exemplos

- Exemplo: Seja a mesma urna com 2 bolas brancas (B) e 3 vermelhas (V). Suponha que sorteamos agora três bolas ao acaso **sem reposição**.
  - temos então na primeira retirada, $P(B) = \frac{2}{5}$ e $P(V) = \frac{3}{5}$
  - na segunda retirada, $P(B|B) = \frac{1}{4}$, $P(B|V) = \frac{2}{4}$, $P(V|B) = \frac{3}{4}$ e $P(V|V) = \frac{2}{4}$
  - na terceira retirada, $P(B|B,B) = 0$, $P(V|B,B) = 1$, $P(B|B,V) = \frac{1}{3}$, $P(V|B,V) = \frac{2}{3}$, $P(B|V,B) = \frac{1}{3}$, $P(V|V,B) = \frac{2}{3}$, $P(B|V,V) = \frac{2}{3}$ e $P(V|V,V) = \frac{1}{3}$

Exemplos

- Portanto, por exemplo:

$$P(B,B,V) = P(B)\,P(B|B)\,P(V|B,B) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{10}$$

$$P(B,V,B) = P(B)\,P(V|B)\,P(B|B,V) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{10}$$

- E no caso geral, dados os eventos A, B e C:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)\,P(B|A)\,P(C|A \cap B)$$

Independência de Eventos

- Em geral, dois eventos A e B são considerados independentes, se:
  - $P(A|B) = P(A)$
  - ou $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Teorema de Bayes

- Exemplo de motivação: temos 5 urnas, cada uma com 6 bolas.
  - duas urnas são do tipo C_1, que contém 3 bolas brancas (B)
  - duas urnas são do tipo C_2, que contém 2 bolas brancas (B)
  - uma urna é do tipo C_3, que contém as 6 bolas brancas (B)
- Escolhemos ao acaso uma urna, e dela retiramos uma bola. Qual a probabilidade da urna escolhida ter sido do tipo C_3, dado que a bola sorteada é branca?

  $P\left(C_3|B\right) = ?$

Teorema de Bayes

- Pela descrição das urnas, sabemos que:

  $P(B|C_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

  $P(B|C_2) = \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

  $P(B|C_3) = \frac{6}{6} = 1$

- Note que $P(C_3|B) = \frac{P(C_3 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|C_3)P(C_3)}{P(B)}$
- $P(B) =?$
- $B = (B \cap C_1) \cup (B \cap C_2) \cup (B \cap C_3)$

Teorema de Bayes

- C_1, C_2 e C_3 são eventos mutuamente exclusivos
- $C_1 \cup C_2 \cup C_3 = \Omega$
- $B = (B \cap C_1) \cup (B \cap C_2) \cup (B \cap C_3)$ é uma união disjunta, então

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap C_1) + P(B \cap C_2) + P(B \cap C_3) \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \times 1 = \frac{8}{15} \end{aligned}$$

- Finalmente: $P(C_3|B) = \frac{P(C_3 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|C_3)P(C_3)}{P(B)} = \frac{1 \times (1/5)}{(8/15)} = \frac{3}{8}$

Teorema de Bayes

- Em geral, se $\{C_1, C_2, ..., C_n\}$ é uma partição do espaço amostral Ω, de forma que:
  - $C_i \cap C_j = \emptyset$, $\forall\ i \neq j$
  - $\Omega = C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_n$
- Considerando o evento A, podemos determinar $P(A|C_j)$ e $P(C_j)$ para todo $j = 1, ..., n$.

  Assim, é possível calcular $P(C_j|A)$, uma vez que:

  $P(C_j|A) = \frac{P(C_j)P(A|C_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(C_i)P(A|C_i)}$, $\forall\ j = 1, ..., n$

Teorema de Bayes

- Retomando o exemplo das 5 urnas, essas formam então uma partição do espaço $\Omega = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, e o evento A é a retirada de uma bola branca.