Cáculo de Probabilidades

- A probabilidade é uma quantidade (função matemática) que pode ser utilizada para se medir a incerteza sobre certos eventos ou características de interesse.
- Tais eventos, em geral, estão associados a experimentos aleatórios.
- Um **experimento aleatório** é um experimento para o qual não se sabe qual será seu resultado, antes de realizá-lo.
- A probabilidade é útil, também, quando existem incertezas associadas à experimentos ou fenômenos de interesse.

Cáculo de Probabilidades

- Distribuição de Frequências
  - Observadas: calculada com base nos valores observados.
  - Modelo teórico: proposto pelo pesquisador (literatura) para representar a distribuição de frequência populacional.
- Distribuições de frequência estão, de alguma forma, associadas as distribuições de probabilidade (conceito que veremos mais adiante).
- Exemplo: estudar as probabilidades de ocorrência das faces de um dado (próximo slide).

Cáculo de Probabilidades

- Procedimento empírico: lançar o dado n vezes e contabilizar o número de vezes (n_i) que a face $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$; ocorre.
  - $f_i = \frac{n_i}{n}$ é a distribuição empírica das probabilidades.
  - Para diferentes repetições desse experimento, a distribuição de frequência apresentará (poderá apresentar) resultados diferentes.
  - No entanto, espera-se que esses resultados, apesar de distintos, sejam semelhantes.

- Procedimento teórico: construir a distribuição de frequências populacionais (probabilidades) através de suposições teóricas (por exemplo: considerando que o dado é não viciado).

Cáculo de Probabilidades

- Suposições:
  - Só podem ocorrer 6 faces (1,2,3,4,5,6).
  - O dado é perfeitamente equilibrado (não - viciado).
  - Então, cada face deve ocorrer o mesmo número de vezes, ou seja $f_i = \dfrac{1}{6}$ e, assim, a respectiva distribuição de probabilidade é dada por:

Face	1	2	3	4	5	6	Total
Freq. Teórica	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

Cáculo de Probabilidades

Todo fenômeno aleatório terá seu modelo probabilístico especificado (uma representação apropriada dele, mas não perfeita), em geral, no momento que estabelecemos:

- Espaço Amostral: conjunto composto por todos os resultados possíveis do experimento (aleatório), denotado por $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ...\}$ (Ω terá essa forma quando for possível enumerar os possíveis resultados).
- Probabilidade: $P(\omega)$, para cada "ponto amostral": ω.
- A chamada $\sigma-$ álgebra : $\mathcal{A}$.

Cáculo de Probabilidades

- Exemplo: lançar uma moeda duas vezes.

  $C = cara$

  $X = coroa$

  - $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$.

    $\omega_1 = (C, C)$; $\omega_2 = (C, X)$; $\omega_3 = (X, C)$; $\omega_4 = (X, X)$
  - considerando que a moeda é honesta: $P(\omega_i) = \dfrac{1}{4}$, $\forall\ i = 1, 2, 3, 4$.
  - seja o evento $A = \{\omega_1, \omega_4\}$ = obter duas faces iguais, então:

$$P(A) = P(\{\omega_1, \omega_4\}) = P(\omega_1) + P(\omega_4) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Cáculo de Probabilidades

Como pode-se observar, através das probabilidades pontuais, é possível calcular a probabilidade de ocorrência de eventos (como o evento A exemplificado) que incluem a ocorrência de vários pontos amostrais.

- Retomando o exemplo do dado:
  - $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, em que $\omega_i =$ face i, $\forall\ i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.
  - $P(\omega_i) = \frac{1}{6}$.
  - Seja o evento:

    $A = \{$a face é um número par$\} = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\} = \{2, 4, 6\}$, então,

    temos que:

$$P(A) = P(\{2\}, \{4\}, \{6\}) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Cáculo de Probabilidades

- Exemplo: uma lâmpada é retirada de um lote e é medido seu tempo de vida (tempo de funcionamento antes de queimar).
  - $\Omega = \{t : \ t \geq 0\}$, ou seja, o espaço amostral são todos os números reais positivos.
  - $A = \{t : \ 0 \leq t \leq 20\}$, o tempo de vida é menor ou igual a 20 horas A é um evento (conjunto) que pode ser considerado como subconjunto de Ω.
  - Esse tipo de espaço amostral é chamado de 'espaço amostral contínuo".
  - Os espaços amostrais apresentados nos exemplos anteriores são chamados de "espaço amostral discreto".

Propriedades: Modelo Teórico (simplificado)

- (Ω, P):
  - Ω é o espaço amostral (conjunto de todos os resultados possíveis).
  - P é a probabilidade em Ω.
  - Seja A é um evento em Ω.
  - $\varnothing$ é um conjunto vazio ou evento impossível.
- Axiomas:
  - $0 \leq P(A) \leq 1$, $\forall$ evento $A \subset \Omega$.
  - $P(\Omega) = 1$.
  - Sejam $E_1, E_2, \ldots$ eventos disjuntos dois a dois, ou seja, $E_i \cup E_j = \emptyset, \forall i \neq j$, então $P\left(\cup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$.

Propriedades: Modelo Teórico (espaço de probabilidade)

- $(\Omega, P, \mathcal{A})$:
  - Ω é o espaço amostral (conjunto de todos os resultados possíveis).
  - $\mathcal{A}$: conjunto com todos os subconjuntos de Ω (classe de conjuntos pois, todos seus elementos são, também, conjuntos). No caso discreto seria o conjunto das partes de Ω, enquanto que no caso contínuo seria a chamada $\sigma-$álgebra de Borel.
  - $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$.
  - Seja A é um evento em Ω.
  - $\varnothing$ é um conjunto vazio ou evento impossível.

Propriedades: Modelo Teórico (espaço de probabilidade)

- Axiomas (são os mesmos da estrutura anterior):
  - $0 \leq P(A) \leq 1$, $\forall$ evento $A \subset \Omega$, $A \in \mathcal{A}$.
  - $P(\Omega) = 1$.
  - Sejam $E_1, E_2, \ldots$ eventos disjuntos dois a dois, ou seja, $E_i \cup E_j = \emptyset, \forall i \neq j$, então $P\left(\uplus_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$.

Exemplos

- No exemplo das duas moedas, temos que:
  - $\Omega = \{(C,C),(C,X),(X,C),(X,X)\} = \{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$.
  - $\mathcal{A} = \Big\{\emptyset, \{(C,C)\}, \{(C,X)\}, \{(X,C)\}, \{(X,X)\}, \{(C,C),(C,X)\},$
    $\{(C,C),(X,C)\}, \{(C,C),(X,X)\}, \{(C,X),(X,C)\}, \{(C,X),(X,X)\},$
    $\{(C,C),(C,X),(X,C)\}, \{(C,C),(C,X),(X,X)\},$
    $\{(C,X),(X,C),(X,X)\}, \{(C,X),(X,C),(X,X)\}, \Omega\Big\}$.
  - $P : P(\omega_i) = \dfrac{1}{4}, P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1.$

Exemplos

- No exemplo da lâmpada, temos que:
  - $\Omega = \{t : \ t \geq 0\} \equiv \mathcal{R}^+$.
  - $\mathcal{A}$: conjunto com todos os subconjuntos de Ω, incluindo os conjuntos $\emptyset$, Ω, valores pontuais e sub intervalos dos $\mathcal{R}^+$.
  - $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ (veremos mais adiante como construir funções (probabilidades) apropriadas).

Propriedades: Modelo Teórico

- Exemplo: Considere a seguinte divisão de alunos matriculados em um dado instituto de matemática, num certo ano:

	Masculino (Ma)	Feminino (Fe)	Total
Mat. Pura (M)	70	40	110
Mat. Aplicada (A)	15	15	30
Estatística (E)	10	20	30
Computação (C)	20	10	30
Total	115	85	200

Propriedades: Modelo Teórico

- Escolhendo um aluno ao acaso (e considerando que cada aluno tem a mesma probabilidade de ser selecionado), definem-se os seguintes eventos:
  - M: estudante da Matemática Pura.
  - A: estudante da Matemática Aplicada.
  - E: estudante da Estatística.
  - C: estudante da Computação.
  - Ma: sexo Masculino.
  - Fe: sexo Feminino.

Propriedades: Modelo Teórico

- Assim,
  - $P(M) = \frac{110}{200} = 0,550.$
  - $P(A) = \frac{30}{200} = 0,150.$
  - $P(E) = \frac{30}{200} = 0,150.$
  - $P(C) = \frac{30}{200} = 0,150.$
  - $P(Ma) = \frac{115}{200} = 0,575.$
  - $P(Fe) = \frac{85}{200} = 0,425.$

Interseção de Eventos

- Utilizando o último exemplo, vamos definir como evento (I), escolher ao acaso um aluno e ele ser estudante de estatística e do sexo masculino, simultaneamente.
- $I = E \cap Ma$, o evento I é uma interseção dos eventos E e Ma.
- $P(E \cap Ma) = \dfrac{10}{200} = 0,05.$

União de Eventos

- Definamos agora como evento (U), escolher ao acaso um aluno e ele ser estudante de estatística ou do sexo masculino (apresentar pelo menos uma dessas características).
- $U = E \cup Ma$, o evento U é uma união dos eventos E e Ma.
- $P(E \cup Ma) = P(E) + P(Ma) - P(E \cap Ma)$

  $$P(E) = \frac{10+20}{200} = 0,150$$

  $$P(Ma) = \frac{70+15+10+20}{200} = 0,575$$

  $$P(E \cap MA) = \frac{10}{200} = 0,050$$

- Então: $P(E \cup Ma) = 0,150 + 0,575 - 0,050 = 0,675$.

União de Eventos

- No caso de eventos mutuamente exclusivos ou disjuntos, a interseção é o conjunto vazio ($\varnothing$).
- $P(M \cap C) = P(\varnothing) = 0.$
- Assim:

$$P(M \cup C) = P(M) + P(C) - P(M \cap C) = P(M) + P(C) = \frac{140}{200} = 0,700$$

Evento Complementar

- Vamos considerar agora apenas o curso em que o aluno está matriculado.
- Então, os eventos M e $\{A \cup E \cup C\}$ são chamados de eventos complementares:
  - $\{M \cap \{A \cup E \cup C\}\} = \varnothing$.
  - $\{M \cup \{A \cup E \cup C\}\} = \Omega$.

Mais resultados

No caso geral, sejam A e B subconjuntos de Ω:

- $A \cap B =$ evento que representa a ocorrência simultânea dos eventos A e B.
- $A \cup B =$ evento que representa a ocorrência de pelo menos um dos eventos A e B.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- se $\{A \cap B\} = \varnothing$, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- A e B são complementares se $A \cap B = \varnothing$ e $A \cup B = \Omega$.
  - como $P(A) + P(B) = 1$, então $P(B) = 1 - P(A)$.
  - B é denotado por $B = A^C$.
- A e B são independentes se e somente $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Equiprobabilidade (espaços amostrais discretos e finitos)

- $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$ finito.
- $P(\omega_i) = \frac{1}{n}, \forall\ i = 1, 2, ..., n.$
- Considere $A = \{\omega_{A1}, ..., \omega_{Am}\}$ evento em Ω com $m \leq n$ pontos amostrais.
- então $P(A) = \frac{m}{n}$.

Equiprobabilidade

- Exemplo: uma moeda honesta é lançada uma única vez.
  - $\Omega = \{C, X\}$.
  - $P(C) = P(X) = \frac{1}{2}$.
  - $A = \{C\}$.
  - então $P(A) = \frac{1}{2}$.

Equiprobabilidade

- Exemplo: uma moeda honesta é lançada duas vezes.
  - $\Omega = \{(C,C),(X,C),(C,X),(X,X)\}$.
  - $P(C,C) = P(X,C) = P(C,X) = P(X,X) = \frac{1}{4}$.
  - $A = \{(X,X),(C,C)\}$.
  - Então $P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.