# Metodologia para tomada de decisões

- **Exemplo** Se nosso objetivo é estimar o valor desconhecido da proporção $p$ de indivíduos que possuem um determinado atributo, tomamos como base o número de portadores $X = x$ desse atributo em uma amostra casual simples de tamanho $n$. O objetivo é verificar se $X = x$ dá suporte à rejeição ou não acerca de alguma hipótese sobre $p$.

# Metodologia para tomada de decisões

- **Exemplo 1:** Achamos que uma moeda não é honesta. Observamos 65 caras em 100 lançamentos. Podemos afirmar que os dados suportam nossa opinião?
- **Exemplo 2:** A diretoria de uma distribuidora de TV a cabo acredita que com a reengenharia de seu sistema de cabeamento, a proporção de assinantes satisfeitos com o serviço é agora maior do que os 82% existentes anteriormente. Se uma pesquisa com 300 assinantes revela que 251 deles estão satisfeitos com a distribuidora, a diretoria pode dizer que esses dados dão suporte à sua opinião?

# Metodologia

- **Exemplo 3:** Se em uma amostra casual simples de 2100 intervenções cirúrgicas feitas em 1997, apenas 181 são cirurgias cardio-vasculares, é possível dizer que os dados suportam a conjectura (do centro nacional de estatísticas médicas) de que menos de 10% das cirurgias realizadas em 1997 foram cardio-vasculares?

# Metodologia

- Se nosso objetivo é estimar o valor desconhecido da proporção $p$ de indivíduos em uma população, que possui um determinado atributo, consideramos a variável aleatória $X$ que representa o número total de de portadores do atributo, em uma amostra casual simples de tamanho $n$.
- O objetivo é determinar se o valor $x$ de $X$, observado na amostra, dá ou não suporte à uma hipótese referida ao valor de $p$.

# Metodologia

- Portanto, quando estamos interessados em estudar uma proporção p, baseamos nossa inferência em:
  - $X \sim \text{binomial}(n, p)$
  - $E(X) = np$
  - $Var(X) = np(1-p)$
- E para valores apropriados de $n$ e $p$ (ou $n$ muito grande):
  - $\dfrac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \dfrac{\widehat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \approx N(0, 1)$

# Metodologia

- Relativo ao exemplo 1:
  - O que aconteceria em 100 lançamentos se a moeda fosse honesta ($p = \frac{1}{2}$)?
    - O número esperado de caras nos 100 lançamentos será 50
  - Comparado com essa expectativa, o que foi observado?
    - Observamos um desvio de $|65 - 50| = 15$ unidades em relação ao número esperado de caras

# Metodologia

- Relativo ao exemplo 1:
  - Se a moeda for honesta, um desvio como o observado será pouco ou muito provável?

    • Se a moeda fosse honesta, teríamos que:

    $p - valor = P(|X - 50| \geq 15) \simeq P(|Z| \geq 3) \simeq 0,0027$

    • Podemos usar o $p - valor$ para medir a magnitude da evidência contida nos dados contra a hipótese de honestidade da moeda.

# Metodologia

- Relativo ao exemplo 1:
  - Como decidir se a evidência $p - valor$ é forte para rejeitar a suposição de honestidade da moeda?

    • Escolhemos um valor $\alpha$ (nível de significância-relacionado à probabilidade de se cometer o erro do tipo I)

    • Se $p - valor \leq \alpha$, reconhecemos na amostra evidência suficiente para rejeitar a honestidade da moeda (rejeitar $H_0$).
  - $H_0 : p = \frac{1}{2} \quad vs \quad H_1 : p \neq \frac{1}{2}$

    • para $\alpha \geq 0,0027$, rejeitamos $H_0$ com nível de significância $\alpha$

# Hipóteses Alternativas Unilaterais e Bilaterias

- **Exemplo 1:** $H_0 : p = \frac{1}{2} \quad vs \quad H_1 : p \neq \frac{1}{2}$
- **Exemplo 2:** $H_0 : p = 0,82 \quad vs \quad H_1 : p > 0,82$
- **Exemplo 3:** $H_0 : p = 0,1 \quad vs \quad H_1 : p < 0,1$

**Hipótese Bilateral:** Quando desejamos detectar desvios em qualquer direção desde o valor da hipótese nula.

# Hipóteses Alternativas Unilaterais e Bilaterias

- Relativo ao exemplo 2:
  - $X =$ número de clientes satisfeitos
  - Sob $H_0$ verdadeira:
    - $X \sim \text{binomial}(300, 0.82)$
    - $E(X) = 300 \times 0,82$
    - $Var(X) = 300 \times 0,82 \times 0,18$
  - $p - valor = P(X - 300 \times 0,82 \geq 251 - 300 \times 0,82) \simeq P(Z \geq 0,7514) \simeq 0,2266$, onde $Z \sim N(0,1)$
  - Logo, para $\alpha \geq 0,2266$, rejeitamos $H_0$

**Observação:** os valores usuais de $\alpha$ são 0,01, 0,05 e 0,1.

# Teste de Proporções

- $H_0 : p = p_0 \quad vs \quad H_1 : p \neq p_0$

  $H_0 : p = p_0 \quad vs \quad H_1 : p > p_0$

  $H_0 : p = p_0 \quad vs \quad H_1 : p < p_0$
- Procedimento
  - escolha $\alpha$ (nível de significância) - limite máximo de probabilidade de cometer erro tipo I.
  - selecione uma amostra casual simples da população e determine o número $x$ de indivíduos portadores do atributo.
  - determine o $p-valor$. ou força de evidência contida nos dados.
  - se $p-valor \leq \alpha$, rejeita-se $H_0$.

# Cálculo do $p - valor$

- $H_1 : p \neq p_0$
  - $X \sim Bin(n, p)$

    $$p - valor = P(|X - np_0| \geq |x - np_0|)$$

    $$p - valor = 1 - P(np_0 - |x - np_0| < X < np_0 + |x - np_0|)$$

  - usando TCL $(Z \sim N(0,1))$

    $$p - valor = P(|X - np_0| \geq |x - np_0|)$$

    $$p - valor \simeq P\left(|Z| \geq \frac{|x - np_0|}{\sqrt{np_0(1 - p_0)}}\right)$$

    $$p - valor \simeq 2\left[1 - \Phi\left(\frac{|x - np_0|}{\sqrt{np_0(1 - p_0)}}\right)\right]$$

# Cálculo do $p - valor$

- $H_1 : p > p_0$
  - $X \sim Bin(n, p)$

    $$p - valor = P(X \geq x)$$

  - usando TCL $(Z \sim N(0, 1))$

    $$p - valor = P(X - np_0 \geq x - np_0)$$

    $$p - valor \simeq P\left(Z \geq \frac{x - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}\right)$$

    $$p - valor \simeq 1 - \Phi\left(\frac{x - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}\right)$$

# Cálculo do $p - valor$

- $H_1 : p < p_0$
  - $X \sim Bin(n, p)$

    $$p - valor = P(X \leq x)$$
  - usando TCL $(Z \sim N(0, 1))$

    $$p - valor = P(X - np_0 \leq x - np_0)$$

    $$p - valor \simeq P\left(Z \leq \frac{x - np_0}{\sqrt{np_0(1 - p_0)}}\right)$$

    $$p - valor \simeq \Phi\left(\frac{x - np_0}{\sqrt{np_0(1 - p_0)}}\right)$$

# Cálculo do $p - valor$

- **Observação:** As hipóteses para o exemplo 3 são:

  $H_0 : p = 0,1 \quad vs \quad H_1 : p < 0,1$

- Nesse tipo de situação, é suficiente calcular $p - valor$ considerando o valor $(p = 0.1)$, por isso:

  $H_0 : p \geq 0.1 \quad vs \quad H_1 : p < 0,1$

  é equivalente a testar

  $H_0 : p = 0,1 \quad vs \quad H_1 : p < 0,1$

- Comentário análogo vale quando as hipóteses forem

  $H_0 : p = 0,1 \quad vs \quad H_1 : p > 0,1.$