

# Teste de Hipótese

- **Motivação:** Um medicamento que existe na indústria farmacêutica produz o efeito desejado em 60% dos casos em que é aplicado. Com o objetivo de incrementar essa porcentagem, o laboratório lança um novo medicamento elaborado com técnicas avançadas e afirma: “O novo medicamento é melhor que o já existente”.

# Teste de Hipótese

- Se o novo medicamento produz o efeito desejado em 90% dos casos (em uma amostra) nos quais foi utilizado:
  - a afirmação do laboratório tem fundamento?
  - para decidir se a afirmação tem fundamento, baseamos nosso estudo na informação contida numa amostra aleatória de usuários do produto.
  - vamos supor que o medicamento novo não pode ser pior que o já existente.

# Teste de Hipótese

- Decisão: Estratégia de Decisão
  - Seja  $\theta$  o parâmetro ou a quantidade de interesse,  $\theta$  permite fazer alguma inferência relativa ao problema
  - $\theta \in \omega$  (espaço paramétrico)
  - Suponha que  $\omega \doteq \omega_1 \cup \omega_2$  (união disjunta)
  - Teste:  $H_0 : \theta \in \omega_1$  vs  $H_1 : \theta \in \omega_2$

# Teste de Hipótese

- Convenção:
  - $H_0$ : hipótese nula; a afirmação referida ao possível valor de  $\theta$ , contra a qual procuramos evidência.
  - $H_1$ : hipótese alternativa; a afirmação referida ao possível valor de  $\theta$ , que intuímos seja verdadeira.

# Teste de Hipótese

- No exemplo de motivação:  $H_0 : \theta = 0.6$  vs  $H_1 : \theta = 0.9$
- Definimos o conjunto de decisões  $A = \{a : a = a_1 \text{ ou } a = a_2\}$ :
  - $a_1 =$  aceitar  $H_0$  (e rejeitar  $H_1$ )
  - $a_2 =$  rejeitar  $H_0$  (e aceitar  $H_1$ )
  - $a$  ( $= a_1$  ou  $= a_2$ ) será a decisão tomada a partir da observação da amostra.

# Regra de Decisão

- A amostra  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  pertence ao espaço amostral  $S$
- $S$  pode ser colocado como  $S = S_1 \cup S_2$  de forma que  $\mathbf{X} \in S_1$  ou  $\mathbf{X} \in S_2$
- Regra:
  - se  $\mathbf{X} \in S_1$ , então  $a = a_1$  (aceita  $H_0$ )
  - se  $\mathbf{X} \in S_2$ , então  $a = a_2$  (rejeita  $H_0$ )

# Regra de Decisão

- Exemplo: Seja  $X$  uma observação proveniente da Normal  $N(\mu, 1)$ 
  - $\mu$  desconhecida
  - Teste:  $H_0 : \theta = 0$  vs  $H_1 : \theta \neq 0$ 
    - se  $X > \frac{1}{2}$  ou  $X < -\frac{1}{2}$  ( $S_2$ ), então  $a = a_2$  (rejeita  $H_0$ )
    - se  $X \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ , então  $a = a_1$  (aceita  $H_0$ )
  - $S_2$  é chamada região de rejeição de  $H_0$ , ou região crítica do teste.

# Risco de Decisão

- Erro tipo I = {rejeitar  $H_0$  |  $H_0$  é verdadeira}
- Erro tipo II = {aceitar  $H_0$  |  $H_0$  é falsa}

	$a_1$ (aceitar $H_0$ )	$a_2$ (rejeitar $H_0$ )
$H_0$ verdadeira	—	erro tipo I
$H_0$ falsa	erro tipo II	—



# Risco de Decisão

- Erros no exemplo de motivação:

$$H_0 : \theta = 0.6 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta = 0.9$$

- Erro tipo I = {rejeitar  $H_0$  |  $H_0$  é verdadeira} =  $\{\theta = 0.9 | \theta = 0.6\}$
- Erro tipo II = {aceitar  $H_0$  |  $H_0$  é falsa} =  $\{\theta = 0.6 | \theta = 0.9\}$
- Deseja-se controlar  $P(\text{erro tipo I})$  e  $P(\text{erro tipo II})$

# Risco de Decisão

- Montando o teste no exemplo de motivação:

$$H_0 : \theta = 0.6 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta = 0.9$$

- Seja  $X$  = número de pacientes para os quais o novo medicamento produz o efeito desejado
- $n = 10$  o tamanho da amostra
- $X \sim \text{Bin}(10, \theta)$

# Risco de Decisão

- Se  $H_0$  é verdadeira:  $X \sim \text{Bin}(10, 0.6)$ ;  $E(X) = 6$
- Se  $H_0$  é falsa:  $X \sim \text{Bin}(10, 0.9)$ ;  $E(X) = 9$
- Vamos considerar a seguinte região de rejeição:  $S_2 = \{8, 9, 10\}$
- Lembrando que  $X$  pode assumir os valores  $0, 1, 2, \dots, 10$
- A região crítica  $S_2$  determina as probabilidades de cometer os erros tipo I e II.

# Risco de Decisão

$$\begin{aligned}P(\text{erro tipo I}) &= P(\text{rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é verdadeira}) \\&= P(X \in S_2 | \theta = 0.6) \\&= P(8 \leq X \leq 10 | \theta = 0.6) \\&= \sum_{x=8}^{10} P(X = x | \theta = 0.6) \\&\approx 0.1672\end{aligned}$$

# Risco de Decisão

$$\begin{aligned}P(\text{erro tipo II}) &= P(\text{aceitar } H_0 | H_0 \text{ é falsa}) \\&= P(0 \leq X \leq 7 | \theta = 0.9) \\&= \sum_{x=0}^7 P(X = x | \theta = 0.9) \\&\approx 0.0702\end{aligned}$$

# Risco de Decisão

- Observando a relação entre os erros tipo I e II, e  $S_2$ :

$$H_0 : \theta = 0.6 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta = 0.9$$

$S_2$	P(erro tipo I)	P(erro tipo II)
{8, 9, 10}	0.1672	0.0702
{9, 10}	0.0463	0.2639
{10}	0.0060	0.6513

# Risco de Decisão

- À medida que procuramos diminuir a probabilidade de cometer erro tipo I, diminuimos a região  $S_2$ , aumentando a probabilidade de cometer erro tipo II.
- Optamos então por controlar o erro tipo I (considerado mais grave, mas isso depende da situação).