1. Questão 1

   (a) Temos que:

   $$L(\theta) \propto (1-\theta)^{n\overline{x}}\theta^{nr},$$

   que se assemelha ao núcleo de uma distribuição $beta(nr+1, n\overline{x}+1)$. Assim, a família de distribuições conjugadas à priori é a $beta(a,b)$.

   (b) Do item anterior, temos que:

   $$\begin{aligned} \ln L(\theta) &= c + n\overline{x}\ln(1-\theta) + nr\ln\theta; S(\theta) = -\frac{n\overline{x}}{1-\theta} + \frac{nr}{\theta}; H(\theta) = -\frac{n\overline{x}}{(1-\theta)^2} - \frac{nr}{\theta^2} \\ I(\theta) &= \frac{nr}{\theta(1-\theta)} + \frac{nr}{\theta^2} = \frac{nr}{\theta^2(1-\theta)}(\theta + 1 - \theta) = \frac{nr}{\theta^2(1-\theta)}, \end{aligned}$$

   logo $p^J(\theta) \propto \theta^{-1}(1-\theta)^{-1/2}\mathbb{1}_{(0,1)}(\theta)$, que corresponde à um caso limite de uma $beta(a,b)$, quando $a \to 0$ e $b = 1/2$.

   (c) Temos que

   $$p_1(\theta|\boldsymbol{x}) \propto \theta^{nr+a-1}(1-\theta)^{n\overline{x}+b-1}\mathbb{1}_{(0,1)}(\theta),$$

   que corresponde ao núcleo de uma distribuição $beta(nr+a, n\overline{x}+b)$, assim $\theta|\boldsymbol{x} \sim beta(nr+a, n\overline{x}+b)$ e $\widehat{\theta}_{EAP} = \dfrac{nr+a}{n(r+\overline{X})+a+b}$.

   (d) Temos que

   $$p_2(\theta|\boldsymbol{x}) \propto \theta^{nr-1}(1-\theta)^{n\overline{x}-1/2}\mathbb{1}_{(0,1)}(\theta),$$

   que corresponde ao núcleo de uma distribuição $beta(nr, n\overline{x}+1/2)$, assim $\theta|\boldsymbol{x} \sim beta(nr, n\overline{x}+1/2)$ e $\widehat{\theta}_{EAP} = \dfrac{nr}{n(r+\overline{X})+1/2}$.

   (e) Temos que

   $$DP_1(\theta|\boldsymbol{x}) = \frac{\sqrt{(nr+1)(n\overline{x}+1)}}{[n(r+\overline{x})+2](\sqrt{n(r+\overline{x})+3})}; DP_2(\theta|\boldsymbol{x}) = \frac{\sqrt{(nr)(n\overline{x}+1/2)}}{[n(r+\overline{x})+1/2](\sqrt{n(r+\overline{x})+3/2})},$$

   Por outro lado, temos para n suficientemente grande, que $nr+1 \approx nr$; $n\overline{x}+1 \approx n\overline{x}+1/2$; $n(r+\overline{x})+2 \approx n(r+\overline{x})+1/2$; $n(r+\overline{x})+3 \approx n(r+\overline{x})+3/2$.
   Logo, para n suficientemente grande, $DP_1(\theta|\boldsymbol{x}) \approx DP_2(\theta|\boldsymbol{x})$.

2. Questão 2)

   (a) Temos que:

$$L(\boldsymbol{\theta}) \propto \gamma^x(1-\gamma)^{y-x}e^{-\phi}\phi^y = L_1(\gamma)L_2(\phi),$$

   em que $L_1(\gamma) = \gamma^x(1-\gamma)^{y-x}$ e $L_2(\phi) = e^{-\phi}\phi^y$, logo a verossimilhança é separável.

   (b) Do item a), temos que a verossimilhança é decomponível no produto do núcleo de uma $beta(x-1, y-x-1)$ e de uma $gama(y+1, 1)$. Logo, a família conjugada de prioris é o produto de uma distribuição $beta(a, b)$ com uma distribuição $gama(c, d)$.

   (c) Temos que:

$$\begin{aligned} p(x, y|\gamma, \phi) &= \binom{y}{x}\gamma^x(1-\gamma)^{y-x}\frac{e^{-\phi}\phi^y}{y!}\mathbb{1}_{\{0,1,2,\ldots\}}(y)\mathbb{1}_{\{0,1,\ldots,y\}}(x) \\ &= p(x|y,\gamma)p(y|\phi), \end{aligned}$$

   em que $p(x|y,\gamma) = \binom{y}{x}\gamma^x(1-\gamma)^{y-x}\mathbb{1}_{\{0,1,\ldots,y\}}(x)$ e $p(y|\phi) = \frac{e^{-\phi}\phi^y}{y!}\mathbb{1}_{\{0,1,2,\ldots\}}(y)$ que correspondem, respectivamente, às distribuições $binomial(y, \gamma)$ e $Poisson(\phi)$. Logo, $X|(Y = y, \gamma) \sim binomial(y, \gamma)$ e $Y|\phi \sim Poisson(\phi)$. Portanto, $\mathcal{E}(X) = \mathcal{E}(\mathcal{E}(X|Y, \gamma, \phi)) = \gamma\mathcal{E}(Y|\phi, \gamma) = \gamma\phi$ e $\mathcal{E}(Y|\phi) = \phi$. Por outro lado, para o cálculo da priori de Jeffreys, note que, do item a), temos que:

$$\begin{aligned} l(\boldsymbol{\theta}) &= c + x\ln\gamma + (y-x)\ln(1-\gamma) - \phi + y\ln\phi; S(\gamma) = \frac{x}{\gamma} - \frac{y-x}{1-\gamma}; S(\phi) = -1 + \frac{y}{\phi} \\ H(\gamma,\gamma) &= -\frac{x}{\gamma^2} - \frac{y-x}{(1-\gamma)^2}; H(\phi,\phi) = -\frac{y}{\phi^2}; H(\gamma,\phi) = 0 \\ I(\gamma,\gamma) &= \frac{\phi}{\gamma} + \frac{\phi}{1-\gamma} = \frac{\phi}{\gamma(1-\gamma)}; I(\phi,\phi) = \frac{1}{\phi}; I(\gamma,\phi) = 0. \end{aligned}$$

   Portanto $p^J(\boldsymbol{\theta}) = \sqrt{\gamma^{-1}(1-\gamma)^{-1}} = \gamma^{-1/2}(1-\gamma)^{-1/2}\mathbb{1}_{\mathcal{R}^+}(\phi)\mathbb{1}_{(0,1)}(\gamma)$. Note que $\int_0^1 \left[\int_{\mathcal{R}^+} p^J(\boldsymbol{\theta})d\phi\right] d\gamma = \infty$ logo, a priori de Jeffreys é imprópria.

   (d) Dos itens a) e c), temos que:

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{\theta}|x, y) &\propto \gamma^x(1-\gamma)^{y-x}e^{-\phi}\phi^y\gamma^{-1/2}(1-\gamma)^{-1/2}\mathbb{1}_{\mathcal{R}^+}(\phi)\mathbb{1}_{(0,1)}(\gamma) \\ &= \gamma^{x-1/2}(1-\gamma)^{y-x-1/2}\mathbb{1}_{(0,1)}(\gamma)e^{-\phi}\phi^y\mathbb{1}_{\mathcal{R}^+}(\phi), \end{aligned}$$

   que equivale ao produto do núcleo de uma distribuição $beta(x+1/2, y-x+1/2)$ e de uma distribuição $gama(y+1, 1)$. Assim, a posteriori conjunta é própria. Além disso, $\gamma|(x, y) \sim \beta(x+1/2, y-x+1/2)$ e $\phi|(x, y) \sim gama(y+1, 1)$. Logo, as posteriores marginais são próprias.

3. Questão 3

(a) Temos que

$$L(\sigma^2) \propto (\sigma^2)^{-n} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right\},$$

a qual corresponde ao núcleo de uma distribuição $IG(n-1, \sum_{i=1}^{n} x_i^2/2)$. Logo, a distribuição $IG(a,b)$ é a família conjugada de prioris para o modelo em questão.
Por outro lado, temos que:

$$\begin{aligned} p(\sigma^2|\boldsymbol{x}) &\propto (\sigma^2)^{-n} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right\} (\sigma^2)^{-(a+1)} \exp\left\{-\frac{b}{\sigma^2}\right\} \mathbb{1}_{\mathcal{R}^+}(\sigma^2) \\ &\propto (\sigma^2)^{-(n+a+1)} \exp\left\{-\frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\right)\right\}. \end{aligned}$$

Assim, $\sigma^2|\boldsymbol{x} \sim IG(a^*, b^*)$, em que $a^* = n + a$ e $b^* = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b$.

(b) Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} \widetilde{\mu}_{EAP} = \mathcal{E}(\mu|\boldsymbol{x}) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty \frac{(b^*)^{a^*}}{\Gamma(a^*)} (\sigma^2)^{-(a^*-1/2+1)} e^{-\frac{b^*}{\sigma^2}} d\sigma^2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(b^*)^{a^*}}{\Gamma(a^*)} \int_0^\infty (\sigma^2)^{-(a^*-1/2+1)} e^{-\frac{b^*}{\sigma^2}} d\sigma^2 \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(b^*)^{a^*}}{\Gamma(a^*)} \frac{\Gamma(a^*-1/2)}{(b^*)^{a^*-1/2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\Gamma(a^*-1/2)}{\Gamma(a^*)} (b^*)^{1/2} \end{aligned}$$

Assim, para os valores específicos, temos que $a^* = 45,01$ e $b^* = 146.543.948,51$:

$$\widetilde{\mu}_{EAP} \approx 0,80 \times \frac{\Gamma(44,51)}{\Gamma(45,01)} \times (146.543.948,51)^{1/2} \approx 1451,83$$

OBS: eventualmente, aceitarei mais de um tipo de arredondamento.

(c) Seja $\theta = 2b^*(\sigma^2)^{-1}$, então $\theta|\boldsymbol{x} \sim \chi^2_{(2a^*)}$. Assim:

$$P(q_1 < \theta < q_2|\boldsymbol{x}) = \gamma \leftrightarrow P\left(\frac{q_1}{2b^*} < (\sigma^2)^{-1} < \frac{q_2}{2b^*}|\boldsymbol{x}\right) = \gamma \leftrightarrow P\left(\sqrt{\frac{2b^*}{q_2}} < \sigma < \sqrt{\frac{2b^*}{q_1}}|\boldsymbol{x}\right) = \gamma$$

Logo $IC(\sigma;\gamma) = \left[\sqrt{\frac{2b^*}{q_2}}; \sqrt{\frac{2b^*}{q_1}}\right]$ e $IC(\mu;\gamma) = \left[\sqrt{\frac{4b^*}{\pi q_2}}; \sqrt{\frac{4b^*}{\pi q_1}}\right]$. Nesse caso, temos que $q_1 = 65,647$ e $q_2 = 118,136$, $4b^*/\pi = 186.585.550$. Portanto $LI = 1.256,75$ e $LS = 1.685,90$, ou seja, $IC(\mu;0,95) = [1.256,75; 1.685,90]$. A conjectura do gerente não se sustenta.