Questão 1) item a)

Temos que

Ignorando o termo de Y_1 temos que:

$$
\begin{aligned}
L(\mu) &= \prod_{i=2}^{n} f_{Y_t|Y_{t-1}}(y_i|y_{i-1}) \\
&= \left\{ \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{(n-1)/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=2}^{n}\left(y_t-\mu-\phi(y_{t-1}-\mu)\right)^2\right\}\right\} \\
l(\mu) &= -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=2}^{n}\left(y_t-\mu-\phi(y_{t-1}-\mu)\right)^2 + c(\phi,\sigma^2) \\
S(\mu)=\frac{\partial l(\mu)}{\partial\mu} &= -\frac{(\phi-1)}{\sigma^2}\sum_{t=2}^{n}\left(y_t-\mu-\phi(y_{t-1}-\mu)\right) \\
H(\mu)=\frac{\partial^2 l(\mu)}{\partial\mu^2} &= -\frac{(\phi-1)}{\sigma^2}\sum_{t=2}^{n}(\phi-1) = -(n-1)\frac{(\phi-1)^2}{\sigma^2} < 0,
\end{aligned}
$$

Por outro lado, temos que:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial l(\mu)}{\partial\mu}|_{\mu=\widetilde{\mu}} &= 0 \\
\frac{(1-\phi)}{\sigma^2}\sum_{t=2}^{n}\left(y_t-\mu-\phi(y_{t-1}-\widetilde{\mu})\right) &= 0 \\
\sum_{t=2}^{n}\left(y_t-\mu-\phi(y_{t-1}-\widetilde{\mu})\right) &= 0 \\
\sum_{t=2}^{n} y_t-(n-1)\widetilde{\mu}-\phi\sum_{t=2}^{n} y_{t-1}+\phi(n-1)\widetilde{\mu} &= 0 \\
-(n-1)\widetilde{\mu}+\phi(n-1)\widetilde{\mu} &= -\sum_{t=2}^{n} y_t+\phi\sum_{t=2}^{n} y_{t-1} \\
-\widetilde{\mu}\left((n-1)(1-\phi)\right) &= -\sum_{t=2}^{n} y_t+\phi\sum_{t=2}^{n} y_{t-1} \\
\widetilde{\mu} &= \frac{\sum_{t=2}^{n} y_t-\phi\sum_{t=2}^{n} y_{t-1}}{(n-1)(1-\phi)}
\end{aligned}
$$

Não ignorando o termo de Y_1

$$
\begin{aligned}
L(\mu) &= f_{Y_1}(y_1)\prod_{i=2}^{n} f_{Y_t|Y_{t-1}}(y_i|y_{i-1}) \\
&= \frac{\sqrt{1-\phi^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{(1-\phi^2)(y_1-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}\left\{ \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{(n-1)/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=2}^{n}\left(y_t-\mu-\phi(y_{t-1}-\mu)\right)^2\right\}\right\} \\
l(\mu) &= -\frac{(1-\phi^2)(y_1-\mu)^2}{2\sigma^2}-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=2}^{n}\left(y_t-\mu-\phi(y_{t-1}-\mu)\right)^2 + c(\phi,\sigma^2) \\
S(\mu)=\frac{\partial l(\mu)}{\partial\mu} &= \frac{(1-\phi^2)(y_1-\mu)}{\sigma^2}-\frac{(\phi-1)}{\sigma^2}\sum_{t=2}^{n}\left(y_t-\mu-\phi(y_{t-1}-\mu)\right) \\
H(\mu)=\frac{\partial^2 l(\mu)}{\partial\mu^2} &= -\frac{1-\phi^2}{\sigma^2}-\frac{(\phi-1)}{\sigma^2}\sum_{t=2}^{n}(\phi-1) = -\frac{1-\phi^2}{\sigma^2}-(n-1)\frac{(\phi-1)^2}{\sigma^2} < 0,
\end{aligned}
$$

Por outro lado, temos que:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial l(\mu)}{\partial \mu}|_{\mu=\widetilde{\mu}} &= 0 \\
-\frac{(1-\phi)(1+\phi)(y_1-\widetilde{\mu})}{\sigma^2} + \frac{(1-\phi)}{\sigma^2}\sum_{t=2}^{n}(y_t-\mu-\phi(y_{t-1}-\widetilde{\mu})) &= 0 \\
-(1+\phi)(y_1-\widetilde{\mu}) + \sum_{t=2}^{n}(y_t-\mu-\phi(y_{t-1}-\widetilde{\mu})) &= 0 \\
-(1+\phi)y_1+(1+\phi)\widetilde{\mu}+\sum_{t=2}^{n}y_t-(n-1)\widetilde{\mu}-\phi\sum_{t=2}^{n}y_{t-1}+\phi(n-1)\widetilde{\mu} &= 0 \\
(1+\phi)\widetilde{\mu}-(n-1)\widetilde{\mu}+\phi(n-1)\widetilde{\mu} &= (1+\phi)y_1-\sum_{t=2}^{n}y_t+\phi\sum_{t=2}^{n}y_{t-1} \\
\widetilde{\mu}\,(1+\phi-(n-1)(1-\phi)) &= (1+\phi)y_1-\sum_{t=2}^{n}y_t+\phi\sum_{t=2}^{n}y_{t-1} \\
\widetilde{\mu} &= \frac{(1+\phi)y_1-\sum_{t=2}^{n}y_t+\phi\sum_{t=2}^{n}y_{t-1}}{(1+\phi-(n-1)(1-\phi))}
\end{aligned}
$$

Além disso, temos que $H(\widetilde{\mu})<0$ logo,

$$\widehat{\mu} = \frac{\sum_{t=2}^{n}Y_t-\phi\sum_{t=2}^{n}Y_{t-1}}{(n-1)(1-\phi)}$$

$$\widehat{\mu} = \frac{(1+\phi)y_1-\sum_{t=2}^{n}Y_t+\phi\sum_{t=2}^{n}Y_{t-1}}{(1+\phi-(n-1)(1-\phi))}$$

é o emv de μ.

Questão 1) item b)

Sabendo que $\{Y_t\}$ é estacionário e, assim, temos que $E(Y_t)=\mu$ e, assim:

$$\mathcal{E}(\widehat{\mu}) = \frac{\sum_{t=2}^{n}\mathcal{E}(Y_t)-\phi\sum_{t=2}^{n}\mathcal{E}(y_{t-1})}{(n-1)(1-\phi)} = \frac{(n-1)\mu-\phi(n-1)\mu}{(n-1)(1-\phi)} = \mu$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}(\widehat{\mu}) &= \frac{(1+\phi)\mathcal{E}(Y_1)-\sum_{t=2}^{n}\mathcal{E}(Y_t)+\phi\sum_{t=2}^{n}\mathcal{E}(Y_{t-1})}{(1+\phi-(n-1)(1-\phi))} \\
&= \frac{(1+\phi)\mu-(n-1)\mu+\mu\phi(n-1)}{(1+\phi-(n-1)(1-\phi))} \\
&= \frac{\mu\,(1+\phi-(n-1)(1-\phi))}{(1+\phi-(n-1)(1-\phi))} = \mu
\end{aligned}
$$

Questão 2) item a)

A série parece ser estacionária: pela ausência de tendência (Fig. 1); nota-se um decaimento exponencial das auto-correlações (AC) (Fig. 2) e que as três primeiras ACs parciais são significativas (Fig.3), logo um modelo apropriado seria o AR(3) (estacionário e causal) de média μ:

$$Y_t = \mu + \phi_1 (Y_{t-1} - \mu) + \phi_2 (Y_{t-2} - \mu) + \phi_3 (Y_{t-3} - \mu) + \epsilon_t, \epsilon_t \sim RB(0, \sigma^2). \tag{1}$$

Da equação (1) defina $X_t = Y_t - \mu$ em que $E(X_t) = 0$, logo temos que:

$$\begin{aligned} X_t &= \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \phi_3 X_{t-3} + \epsilon_t \\ X_t X_t &= \phi_1 X_{t-1} X_t + \phi_2 X_{t-2} X_t + \phi_3 X_{t-3} X_t + \epsilon_t X_t \\ E(X_t^2) &= \phi_1 E(X_{t-1} X_t) + \phi_2 E(X_{t-2} X_t) + \phi_3 E(X_{t-3} X_t) + E(\epsilon_t^2) \\ Var(X_t) &= \phi_1 E(X_{t-1} X_t) + \phi_2 E(X_{t-2} X_t) + \phi_3 E(X_{t-3} X_t) + \sigma^2, \end{aligned}$$

e além disso para $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} X_t X_{t-k} &= \phi_1 X_{t-1} X_{t-k} + \phi_2 X_{t-2} X_{t-k} + \phi_3 X_{t-3} X_{t-k} + \epsilon_t X_{t-k} \\ E(X_t X_{t-k}) &= \phi_1 E(X_{t-1} X_{t-k}) + \phi_2 E(X_{t-2} X_{t-k}) + \phi_3 E(X_{t-3} X_{t-k}) + E(\epsilon_t \epsilon_{t-k}) \\ \gamma(k) &= \phi_1 \gamma(k-1) + \phi_2 \gamma(k-1) + \phi_3 \gamma(k-3), \end{aligned}$$

logo, as interpretações dos parâmetros são: μ é a média ddo processo, σ^2 é um parâmetro de dispersão, e (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) influenciam o sinal e a magnitude das autocovariâncias/autocorrelações.

Questão 2) item b)

O modelo parece estar bem ajustado. Os resíduos parecem ter comportamento de RB segundo o teste de Ljung-Box e FAC, além disso, a suposição de normalidade dos erros parece estar satisfeita. Não há, aparentemente, outliers, nem auto-correlações significativas.

Questão 2) item c)

Sim, pois, de acordo com a análise descritiva, uma estrutura AR(3) parece ser razoável. Além disso, o modelo proposto supõe que os resíduos sejam ruído branco Gaussiano. Pelo comportamento dos resíduos, descrito no item c) desta questão, o modelo ajustado parece corresponder ao modelo proposto.

Questão 2) item d)

O modelo AR(3) apresentou os menores AIC, AICc e BIC, teve um bom diagnóstico. Além disso, através da Figura 4 e sua FAC e FACP teórica correspondem ao comportamento amostral visto nas Figuras 2 e 3. Logo, a escolha desse modelo é compatível.

Questão 3) item a)

Pelas Figuras 5, 6 e 7 temos indícios de que a ST é estacionária (ausência de tendência e variabilidade constante). O comportamento da FAC (decaimento exponencial) e da FACP (somente duas auto-correlações parciais significativas) indica que que um modelo AR(2) pode ser apropriado. Sim, o modelo sugerido parece razoável.

Questão 3) item b)

O modelo parece estar bem ajustado. Os resíduos parecem ter comportamento de RB segundo o teste de Ljung-Box e FAC, além disso, a suposição de normalidade dos erros parece estar satisfeita. Há pouquíssimas observações que poderiam ser outliers e somente uma ACF significativa. Entretanto, o ajuste poderia melhorar com a utilização de um modelo mais apropriado.

Questão 3) item c)

Do ponto de vista preditivo, o modelo se ajustou razoavelmente, pois apesar da ST observada ser adequadamente predita pelo modelo, a previsão para uma janela futura, aparentemente, acompanha a trajetória média ST com intervalos de confiança grandes, ou seja, temos uma predição futura com pouca precisão.

Questão 3) item d)

No caso do modelo AR(2), sabemos que se $|z| \neq 1$, o qual é raiz de $\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2$, então o modelo é estacionário. Como, $\widetilde{\phi}_1 = 0,43$ e $\widetilde{\phi}_2 = 0,44$, temos que:

$$\Delta = \phi_1^2 + 4\phi_2 = 1,9449$$

e

$$z = \frac{-(\phi_1 \pm \sqrt{\Delta})}{2 \times 0,44} = \frac{-(0,43 \pm \sqrt{1,9449})}{2 * 0,44} = \frac{0,43 \pm 1,3946}{2 * 0,44}; z_1 = 1,0961, z_2 = -2,0734$$

Assim, como $|z_i| > 1$, i =1,2, o modelo ajustado indica estacionaridade e causalidade.