1. Questão 1. Defina os seguintes eventos:

   - E: Pedro escreve a carta.
   - C: O correio não perde a carta.
   - Ca: O carteiro entrega a carta.
   - Ma: Mariana recebe a carta.

   O enunciado pede $P(\overline{E}|\overline{Ma})$. Com efeito, temos que:

$$P(\overline{E}|\overline{Ma}) = \frac{P(\overline{E} \cap \overline{Ma})}{P(\overline{Ma})} = \frac{P(\overline{E})P(\overline{Ma}|\overline{E})}{1 - P(Ma)} = \frac{\frac{3}{10} \times 1}{1 - P(Ma)}$$

   Por outro lado, temos que

$$P(Ma) = P(E \cap C \cap Ca) = P(E)P(C|E)P(Ca|E, C) = \frac{7}{10} \times \frac{9}{10} \times \frac{8}{10} = \frac{504}{1000}$$

   Logo, temos que:

$$P(\overline{E}|\overline{Ma}) = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{496}{1000}} = \frac{300}{496}$$

2. Questão 2.

a) Temos que $n(\Omega) = 8 \times 7 \times 6 = 336$. Seja o evento A: termos uma comissão formada por exatamente três alunos da Estatística. Assim, temos que:

$$n(A) = 5 \times 4 \times 3 = 60 \rightarrow P(A) = \frac{60}{336}$$

b) Seja o evento B: termos uma comissão formada por exatamente um aluno da Estatística e dois da Física. Assim, temos que:

$$n(B) = \binom{5}{1} \times \binom{3}{2} \times 3 \times 2 \times 1 = 5 \times 3 \times 3 \times 2 \times 1 = 90 \rightarrow P(A) = \frac{90}{336}$$

c) Seja o evento C: termos uma comissão formada por pelo menos um aluno da Física. Note que $C = \cup_{i=1}^{3} B_i$, em que $B_i, i = 1, 2, 3$, é o evento a Comissão é formada por um aluno de Física. Assim, temos que:

$$\begin{aligned}
n(B_1) &= \binom{3}{1} \times \binom{5}{2} \times 3 \times 2 \times 1 = 3 \times 10 \times 3 \times 2 \times 1 = 180 \\
n(B_2) &= \binom{3}{2} \times \binom{5}{1} \times 3 \times 2 \times 1 = 3 \times 5 \times 3 \times 2 \times 1 = 90 \\
n(B_3) &= \binom{3}{3} \times \binom{5}{0} \times 3 \times 2 \times 1 = 1 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1 = 6
\end{aligned}$$

Logo, $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{\sum_{i=1}^{3} n(B_i)}{n(\Omega)} = \dfrac{276}{336}$

3. Questão 3.

a) Temos a seguinte árvore de probabilidades.
Defina os eventos $Ui, i = 1, 2$ a i-ésima urna é selecionada, iV, iB, a i-ésima bola selecionada é vermelha, branca, respectivamente. Assim, temos que:

$$\begin{aligned}
P(2B) &= P(UI \cap 1B \cap 2B) + P(UI \cap 1V \cap 2B) + P(UII \cap 1B \cap 2B) + P(UII \cap 1V \cap 2B) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times 0 + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{3+2+4}{24} \\
&= \frac{9}{24} = \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

b) Temos que:

$$P(UI|1V) = \frac{P(UI \cap 1V)}{P(1V)} = \frac{P(UI)P(1V|UI)}{P(1V)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}}{P(1V)} = \frac{\frac{3}{8}}{P(1V)},$$

mas,

$$\begin{aligned}
P(1V) &= P(UI \cap 1V) + P(UII \cap 1V) = P(UI)P(1V|UI) + P(UII)P(1V|UII) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3+2}{8} = \frac{5}{8}
\end{aligned}$$

Logo

$$P(UI|1B) = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{5}{8}} = \frac{3}{5}$$

c) Temos que:

$$\begin{aligned}
P(1B2B) &= P(UI \cap 1B \cap 2B) + P(UII \cap 1B \cap 2B) \\
&= P(UI)P(1B|UI)P(2B|UI, 1B) + P(UII)P(1B|UII)P(2B|UII, 1B) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \times 0 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

4. Questão 4. Temos que (lembrando que $(A \cap A = A)$)
   Ida (assumimos que $P(A \cap A) = P(A)P(A)$)

$$\begin{aligned} P(A \cap A) &= P(A)P(A) \to P(A) = P^2(A) \to P(A) - P^2(A) = 0 \\ &\to P(A) = 0 \text{ ou } P(A) = 1 \end{aligned}$$

   Volta (assumimos que $P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$)

$$P(A \cap A) = P(A)P(A) \leftrightarrow P(A) = P^2(A),$$

   e a igualdade acima se verifica se $P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$.