ME 705A - Inferência Bayesiana
Primeiro semestre de 2012
Prova I
Data: 04/04/2012

OBS: A menos que o contrário seja mencionado, nos exercícios você deve considerar uma amostra aleatória $X_1|\theta, ..., X_n|\theta$ de $X|\theta$.

OBS: A menos que o contrário seja mencionado, esperança, variância e erro quadrático médio do estimador Bayesiano devem ser calculados sob a ótica frequentista.

Nome: ______________________________ RA: ____________________

Leia atentamente as instruções abaixo:

- **Coloque seu nome completo e RA em todas as folhas que você recebeu, inclusive nesta.**
- **Utilize somente um dos lados de cada folha.**
- **Leia atentamente cada uma das questões.**
- **Enuncie, claramente, todos os resultados que você utilizar.**
- **Justifique, adequadamente, seus desenvolvimentos, sem, no entanto, escrever excessivamente.**
- **O(a) aluno(a) só poderá sair da sala após as 16h30, mesmo que já tenha finalizado a prova. Após a saída do(a) primeiro(a) aluno(a) não será permitido a entrada de nenhum(a) outro(a) aluno(a).**
- **Não é permitdo empréstimo de material.**
- **Não serão dirimidas dúvidas de quaisquer natureza, após os 20 minutos iniciais.**
- **Resolva a prova, preferencialmente, à caneta, e procure ser organizado(a). Se fizer à lápis, destaque, à caneta, sua resposta.**
- **O(a) aluno(a) deverá portar sua carteira de estudante e apresentá-la, quando for solicitada sua assinatura.**
- **Contestações a respeito da nota, só serão consideradas se estiverem por escrito.**
- **A nota do aluno(a) será $\frac{NP}{NT} \times 10$, em que NP é o número de pontos obtidos na prova e NT é o numero total de pontos da prova.**
- **Os resultados numéricos finais devem ser apresentados com duas casas decimais, apenas.**
- **A prova terá duração de 120 minutos, das 16h às 18h, improrrogáveis.**

Faça uma excelente Prova!!

1. Seja uma amostra aleatória de tamanho n de $X|\lambda \sim$ Poisson$(\lambda), \lambda > 0$. Considere que $p(\lambda) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} e^{-\lambda b} \lambda^{a-1} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(\lambda)$, (a, b) conhecidos. Responda os itens:

   a) Obtenha a distribuição a posteriori, ou seja, $p(\lambda|\boldsymbol{x})$.

   b) Obtenha a esperança (EAP) e a moda (MAP) a posteriori, ou seja, $\widehat{\lambda}_{EAP}$ e $\widehat{\lambda}_{MAP}$. Calcule suas variâncias e seus erros quadráticos médios frequentistas.

   c) Obtenha o estimador de máxima verossimilhança de λ, provando que é ponto de máximo.

   d) Compare os erros-quadráticos médios frequentistas (EQM) do MAP e do estimador de máxima verossimilhança, quando $a = 1$ e $b = 1$. Considere que $n \approx (n + 1)$. Qual deles você utilizaria para estimar θ usando como critério o EQM? Justifique, adequadamente, sua resposta.

   e) Obtenha a priori de Jeffreys e verifique se ela é própria. Verifique, também se a posteriori é própria.

2. Seja uma amostra aleatória de tamanho n de $X|\theta \sim$ Bernoulli$(\theta), \theta \in (0, 1)$. Responda os itens:

   a) Determine a família conjugada natural para o o modelo em questão. Denote por a e b seus hiperparâmetros.

   b) Obtenha a distribuição a posteriori de θ com base na priori encontrada no item a).

   c) Obtenha os estimadores EAP e MAP de θ, ou seja $\widehat{\theta}_{EAP}$ e $\widehat{\theta}_{MAP}$, bem como a variância a posteriori $VAP(\theta)$. O que ocorre com o VAP quando $n \to \infty$?

   d) Para $a = b = 1$ obtenha as variâncias e os erros quadráticos médios frequentistas dos dois estimadores obtidos no item c). Qual deles você utilizaria para estimar θ usando como critério o EQM, para θ próximo à 1/2? Neste caso (a=b=1), o estimador MAP coincide com qual estimador? Isto era esperado? Justifique, adequadamente, suas respostas.

   e) Obtenha a priori de Jeffrey e verifique se ela é própria. Verifique, também se a posteriori é própria.

3. Considere uma única observação da distribuição de $X|\theta$ dada por

$$p(x|\theta) = \theta^2 \mathbb{1}_{\{-1\}}(x) + 2\theta(1-\theta)\mathbb{1}_{\{0\}}(x) + (1-\theta)^2 \mathbb{1}_{\{1\}}(x), \theta \in \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$$

   O pesquisador interessado em estimar θ, com base em experiências passadas, acredita que, à priori, tem-se que:
   $p(\theta) = \frac{1}{2} \mathbb{1}_{\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}}(\theta)$. Responda os itens:

   a) Ache a distribuição a posteriori de θ para $x = -1, x = 0$ e $x = 1$.

   b) Encontre o EAP e o VAP de θ, para $x = -1$.

   c) Considere que o valor observado foi igual à -1. Qual seria o valor mais provável de θ?.

   d) No problema em questão, é melhor utilizar o EAP ou o MAP como estimador de θ? Justifique, adequadamente, sua resposta.

Formulário

1. Se $X \sim \text{Bernoulli}(\theta), \theta \in (0,1)$, então $p(x|\theta) = \theta^x(1-\theta)^{1-x}\mathbb{1}_{\{0,1\}}(X)$, $\mathcal{E}(X) = \theta, \mathcal{V}(X) = \theta(1-\theta)$.

2. Se $X \sim \text{Poisson}(\lambda), \lambda > 0$, $p(x|\theta) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}\mathbb{1}_{\{0,1,2,\ldots\}}(x)$, $\mathcal{E}(X) = \lambda$, $\mathcal{V}(X) = \lambda$.

3. Se $X \sim \text{gama}(r,\theta), r > 0, \theta > 0$, então $p(x|r,\theta) = \frac{1}{\theta^r\Gamma(r)}e^{-\frac{x}{\theta}}x^{r-1}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x), \mathcal{E}(X) = r\theta, \text{Moda}(X) = (r-1)\theta, \mathcal{V}(X) = r\theta^2$.

4. Se $X \sim \text{beta}(a,b), a > 0, b > 0$, então $p(x|a,b) = \frac{1}{\beta(a,b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathbb{1}_{(0,1)}(x), \beta(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$, $\mathcal{E}(X) = \frac{a}{a+b}, \text{Moda}(X) = \frac{a-1}{a+b-2}, \mathcal{V}(X) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$.

5. $\Gamma(r) = \int_0^\infty x^{r-1}e^{-x}dx$, $\Gamma(r) = (r-1)\Gamma(r-1)$.