1. Questão 1

   (a) Temos que:

$$L(\theta) = \frac{1}{\theta^n}\prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{(0,\theta)}(x_i) = \frac{1}{\theta^n}\mathbb{1}_{(0,\theta)}(y_n)\mathbb{1}_{(0,y_n)}(y_1) \propto \frac{1}{\theta^n}\mathbb{1}_{[y_n,\infty)}(\theta),$$

   que corresponde ao núcleo uma distribuição $Pareto(n-1, y_n)$. Logo a família conjugada de prioris para o modelo $U[0,\theta]$ é a distribuição Pareto(a,b).

   (b) Temos que:

$$p(\theta|\boldsymbol{x}) \propto \frac{1}{\theta^n}\mathbb{1}_{[y_n,\infty)}\frac{1}{\theta^{a+1}}\mathbb{1}_{[b,\infty)}(\theta) = \frac{1}{\theta^{n+a+1}}\mathbb{1}_{[max\{b,y_n\},\infty)}(\theta)$$

   Logo, $\theta|\boldsymbol{x} \sim Pareto(a^* = n+a, b^* = max\{b, y_n\})$ e, além disso, $\widehat{\theta}_{EAP} = \dfrac{(n+a)max\{b, Y_n\}}{n+a-1}$

   (c) Temos que: $\widehat{\theta}_{EAP} = \dfrac{(n+1)Y_n}{n}$ e $\widehat{\theta}_{MV} = Y_n$. Além disso:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(Y_n|\theta) &= \frac{n}{n+1}\theta; \mathcal{B}(Y_n|\theta) = \frac{-\theta}{n+1} \\
\mathcal{V}(Y_n|\theta) &= \frac{n}{n+2}\theta^2 - \frac{n^2}{(n+1)^2}\theta^2 = \frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2}\left(n^2+2n+1-n^2-2n\right) \\
&= \frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2} \\
\mathcal{EQM}(Y_n|\theta) &= \frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2} + \frac{\theta^2}{(n+1)^2} = \frac{\theta^2}{(n+2)(n+1)^2}(2n+2) = \frac{2\theta^2}{(n+2)(n+1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(\widehat{\theta}_{EAP}|\theta) &= \frac{n+1}{n}\frac{n}{n+1}\theta = \theta; \mathcal{B}(\widehat{\theta}_{EAP}) = 0; \\
\mathcal{V}(\widehat{\theta}_{EAP}|\theta) &= \frac{(n+1)^2}{n^2}\frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2} = \frac{\theta^2}{n(n+2)} = \mathcal{EQM}(\widehat{\theta}_{EAP}|\theta)
\end{aligned}$$

   Por outro lado, temos que:

$$\frac{\mathcal{EQM}(\widehat{\theta}_{EAP}|\theta)}{\mathcal{EQM}(Y_n|\theta)} = \frac{\frac{\theta^2}{n(n+2)}}{\frac{2\theta^2}{(n+2)(n+1)}} = \frac{n+1}{2n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}$$

Logo, o $\widehat{\theta}_{EAP}|\theta$ é assintoticamente melhor do que o $\widehat{\theta}_{MV}$ Além disso

$$\frac{\mathcal{EQM}(\widehat{\theta}_{EAP}|\theta)}{\mathcal{EQM}(Y_n|\theta)} < 1 \leftrightarrow n+1 < 2n \leftrightarrow n > 1$$

Portanto, $\widehat{\theta}_{EAP}$ é melhor do que $\widehat{\theta}_{MV}$, $\forall n$

(d) Temos que (IC_B simétrico):

$$\begin{aligned} P(q_1 \leq \theta \leq q_2|\boldsymbol{x}) &= \gamma \\ \to P(\theta \leq q_1|\boldsymbol{x}) = F(q_1|\boldsymbol{x}) &= \frac{1-\gamma}{2}; P(\theta \geq q_2|\boldsymbol{x}) = S(q_2|\boldsymbol{x}) = \frac{1-\gamma}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(q_1|\boldsymbol{x}) &= 1 - \left(\frac{b^*}{q_1}\right)^{a^*} = \frac{1-\gamma}{2} \to q_1 = \left(\frac{1+\gamma}{2}\right)^{-1/a^*} b^* = \left(\frac{2}{1+\gamma}\right)^{1/a^*} b^* \\ S(q_2|\boldsymbol{x}) &= \left(\frac{b^*}{q_2}\right)^{a^*} = \frac{1-\gamma}{2} \to q_2 = \left(\frac{1-\gamma}{2}\right)^{-1/a^*} b^* = \left(\frac{2}{1-\gamma}\right)^{1/a^*} b^* \end{aligned}$$

Logo $IC_B(\theta;\gamma) = \left[\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)^{-1/a^*} b^*; \left(\frac{1-\gamma}{2}\right)^{-1/a^*} b^*\right]$

(e) Temos que:

$$\begin{aligned} O(H_1, H_0) &= \frac{S(\theta_0)}{F(\theta_0)} = \frac{\left(\frac{b}{\theta_0}\right)^a}{1-\left(\frac{b}{\theta_0}\right)^a}; O(H_1, H_0|\boldsymbol{x}) = \frac{\left(\frac{b^*}{\theta_0}\right)^{a^*}}{1-\left(\frac{b^*}{\theta_0}\right)^{a^*}} \\ B(\boldsymbol{x}) &= \frac{\left(\frac{b^*}{\theta_0}\right)^{a^*}\left[1-\left(\frac{b}{\theta_0}\right)^a\right]}{\left(\frac{b}{\theta_0}\right)^a\left[1-\left(\frac{b^*}{\theta_0}\right)^{a^*}\right]} \end{aligned}$$

2. Questão 2

   (a) Temos que:

$$p(x, y|\phi) = p(y|x, \phi)p(x)$$

em que: $p(x) = \begin{pmatrix} x+r-1 \\ x \end{pmatrix} \theta^r \, (1-\theta)^x \, \mathbb{1}_{\{0,1,2,\ldots\}}(x)$ e $p(y|x, \phi) = \begin{pmatrix} y+x-1 \\ y \end{pmatrix} \phi^x \, (1-\phi)^y \, \mathbb{1}_{\{0,1,2,\ldots\}}(y)$ que, de acordo com o formulário, $X \sim BN(r, \theta)$ e $Y|X = x \sim BN(x, \phi)$.

   (b) Temos que (em que $c = constante$):

$$\begin{aligned}
l(\phi) &= x \ln \phi + y \ln(1-\phi) + c \to S(\phi) = \frac{x}{\phi} - \frac{y}{1-\phi} \\
H(\phi) &= -\frac{x}{\phi^2} - \frac{y}{(1-\phi)^2} \\
I(\phi) &= \frac{r(1-\theta)}{\theta\phi^2} + \frac{r(1-\theta)}{(1-\phi)\phi\theta} = \frac{r(1-\theta)}{\theta}\left[\frac{1-\phi+\phi}{\phi^2(1-\phi)}\right] = \frac{r(1-\theta)}{\theta}\left[\frac{1}{\phi^2(1-\phi)}\right]
\end{aligned}$$

Logo

$$p^J(\theta) \propto \phi^{-1}(1-\phi)^{-1/2}\mathbb{1}_{(0,1)}(\phi)$$

   (c) Temos que:

$$p(\phi|x, y) \propto \phi^{x-1}(1-\phi)^{y-1/2}\mathbb{1}_{(0,1)}(\phi)$$

Logo $\phi|(x, y) \sim Beta(x, y + 1/2)$

   (d) Pelo formulário e itens anteriores, temos que:

$$\begin{aligned}
p(x, y|\phi_0) &= \begin{pmatrix} x+r-1 \\ x \end{pmatrix} \theta^r \, (1-\theta)^x \begin{pmatrix} y+x-1 \\ y \end{pmatrix} \phi_0^x \, (1-\phi_0)^y \\
p_1(x, y) &= \begin{pmatrix} x+r-1 \\ x \end{pmatrix} \theta^r \, (1-\theta)^x \begin{pmatrix} y+x-1 \\ y \end{pmatrix} \beta(x+1, y+1)
\end{aligned}$$

Assim

$$B(x,y) = \frac{\beta(x+1, y+1)}{\phi_0^x (1-\phi_0)^y}$$

3. Questão 3

   (a) Neste caso, vemos que: 1) A três cadeias se misturarem bem, 2) Os histogramas, as densidades suavizadas e os gráficos de violino das três cadeias, para cada parâmetro são bem parecidas entre si 3) E ACF's são bem próximas de zero (se não iguais à zero), a partir dos lag 1. Assim conclui-se que os algoritmo convergiu de forma satisfatória.

   (b) Podemos ver que as proporções preditas estão próximas das proporções observadas, bem como os respectivos intervalos de credibilidade simétricos as contem. Além disso, as distribuições preditas, das proporções, pelo modelo acompanham bem a distribuição observadas, acomodando este de modo a indicar um bom ajuste.

   (c) Pela significância do parâmetro β_1 e o sinal positivo da respectiva estimativa, concluímos que a quanto maior a idade, maior tende a ser a probabilidade de uma menina varsoviana apresentar menarca