ME 705A - Inferência Bayesiana
Primeiro semestre de 2012
Prova II
Data: 16/05/2012

OBS: A menos que o contrário seja mencionado, nos exercícios você deve considerar uma amostra aleatória $X_1|\theta, ..., X_n|\theta$ de $X|\theta$.

OBS: A menos que o contrário seja mencionado, esperança, variância, vício e erro quadrático médio do estimador Bayesiano devem ser calculados sob a ótica frequentista.

Nome: ______________________________ RA: ________________

**Leia atentamente as instruções abaixo:**

- **Coloque seu nome completo e RA em todas as folhas que você recebeu, inclusive nesta.**
- **Utilize somente um dos lados de cada folha.**
- **Leia atentamente cada uma das questões.**
- **Enuncie, claramente, todos os resultados que você utilizar.**
- **Justifique, adequadamente, seus desenvolvimentos, sem, no entanto, escrever excessivamente.**
- **O(a) aluno(a) só poderá sair da sala após as 16h30, mesmo que já tenha finalizado a prova. Após a saída do(a) primeiro(a) aluno(a) não será permitido a entrada de nenhum(a) outro(a) aluno(a).**
- **Não é permitdo empréstimo de material.**
- **Celulares deverão permanecer desligados.**
- **Não serão dirimidas dúvidas de quaisquer natureza, após os 20 minutos iniciais.**
- **Resolva a prova, preferencialmente, à caneta, e procure ser organizado(a). Se fizer à lápis, destaque, à caneta, sua resposta.**
- **O(a) aluno(a) deverá portar sua carteira de estudante e apresentá-la, quando for solicitada sua assinatura.**
- **Contestações a respeito da nota, só serão consideradas se estiverem por escrito.**
- **A nota do aluno(a) será $\frac{NP}{NT} \times 10$, em que NP é o número de pontos obtidos na prova e NT é o numero total de pontos da prova.**
- **Os resultados numéricos finais devem ser apresentados com duas casas decimais, apenas.**
- **A prova terá duração de 120 minutos, das 16h às 18h, improrrogáveis.**

Faça uma excelente Prova!!

1. Seja uma amostra aleatória de tamanho $n$ de $X|\theta \sim U_{[0,\theta]}, \theta > 0$. Responda os itens:

   a) Prove que a família conjugada natural para o modelo é a distribuição de Pareto. Use a notação do formulário, denotando os hiperparâmetros por $(a, b)$ e considere que $y_n > b$, em que $y_n = \max\{x_1, ..., x_n\}$ ($y_n$ é o máximo da amostra observada) (50 pontos).
   b) Encontre a distribuição a posteriori de $\theta$ com base na priori encontrada no item a) (50 pontos).
   c) Obtenha os estimadores EAP, MdAP e MAP de $\theta$, suas esperanças e suas variâncias (simplifique o máximo possível). OBS: Você pode usar o fato de que a fdp de $Y_n|\theta$ é dada por $p(y|\theta) = n\frac{y^{n-1}}{\theta^n}\mathbb{1}_{[0,\theta]}(y)$ (100 pontos).
   d) Encontre um intervalo de credibilidade $\gamma$ (simétrico) usando a distribuição a posteriori encontrada no item b). Para $n = 15, y_n = 13, \gamma = 0,95, a = b = 1$, encontre o referido intervalo(100 pontos).
   e) Encontre a distribuição preditiva à posteriori para uma única observação (100 pontos).
   f) Encontre o fator de Bayes para testar $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$, $\theta_0 > 0$ conhecido (50 pontos).

2. Considere uma amostra aleatória de tamanho $n$ da seguinte distribuição:

$$p(x|\theta) = \theta x^{\theta-1}\mathbb{1}_{(0,1)}(x), \theta > 0$$

   Responda os itens:

   a) Assuma a priori que $p(\theta) \propto e^{-\theta}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(\theta)$. Encontre a posteriori e prove que ela é própria (100 pontos).
   b) Considere as hipóteses $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta \neq \theta_0$, $\theta_0 > 0$ conhecido. Suponha a seguinte priori:

$$p(\theta) = \left[\alpha\mathbb{1}_{\{\theta_0\}}(\theta) + (1-\alpha)p_1(\theta)\mathbb{1}_{\Theta_1}(\theta)\right], \Theta_1 = (0, \infty) - \theta_0,$$

   em que $p_1(\theta) \propto e^{-\theta}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(\theta)$. Encontre $O(H_1, H_0), O(H_1, H_0|\boldsymbol{x})$ e $B(\boldsymbol{x})$ (200 pontos).
   c) Suponha $\theta_0 = 2$, $n = 9, \sum_{i=1}^{n} \ln x_i = -2,24$ no item b). Qual sua conclusão a respeito das hipóteses, usando o fator de Bayes? Justifique, adequadamente, sua resposta. Escolha o valor de $\alpha$ que lhe parecer mais adequado, justificando sua escolha (100 pontos).

3. Considere uma única observação da distribuição Binomial-Poisson, ou seja:

$$p(x, y|\gamma, \phi) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \gamma^x(1-\gamma)^{y-x}e^{-\phi}\frac{\phi^y}{y!}\mathbb{1}_{\{0,1,2,...\}}(y)\mathbb{1}_{\{0,1,...,y\}}(x), \gamma \in (0, 1), \phi \in \mathcal{R}^+$$

   $(\gamma, \phi)$ desconhecidos. Responda os itens:

   a) Determine a família conjugada natural para o o modelo(100 pontos).
   b) Obtenha a priori de Jeffreys. Verifique se ela é própria(150 pontos).
   c) Obtenha as posterioris conjunta e marginais, sob a priori de Jeffreys e verifique se elas (as três) são próprias(150 pontos).

d) Considere as hipóteses $H_0 : \gamma = \gamma_0$ vs $H_1 : \gamma \neq \gamma_0$, $\gamma_0 \in (0,1)$ conhecido. Suponha a seguinte priori:

$$p(\gamma,\phi) = h(\gamma)g(\phi) = \left[\alpha \mathbb{1}_{\{\gamma_0\}}(\gamma) + (1-\alpha)h_1(\gamma)\mathbb{1}_{\Theta_1}(\gamma)\right] e^{-\phi}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(\phi), \Theta_1 = (0,1) - \gamma_0,$$

em que $h_1(\gamma) \propto 1$, (note que $h_1(.)$ é própria). Encontre $O(H_1,H_0), O(H_1,H_0|x,y)$ e $B(x,y)$(150 pontos).

e) Suponha $\gamma_0 = 0,8$, $x = 3$ e $y = 7$ no item d). Qual sua conclusão a respeito das hipóteses, usando o fator de Bayes? Justifique, adequadamente, sua resposta. Escolha o valor de $\alpha$ que lhe parecer mais adequado, justificando sua escolha(50 pontos).

Formulário

1. Se $X|\theta \sim U_{[0,\theta]}, \theta > 0$, então $p(x|\theta) = \frac{1}{\theta}\mathbb{1}_{(0,\theta)}(x)$, $\mathcal{E}(X|\theta) = \frac{\theta}{2}$, $\mathcal{V}(X|\theta) = \frac{\theta^2}{12}$.
2. Se $X|\theta \sim$ Pareto$(a,b), a,b > 0$, então $p(x|a,b) = a\frac{b^a}{x^{a+1}}\mathbb{1}_{(b,\infty)}(x)$, $\mathcal{E}(X|a,b) = \frac{ab}{a-1}$, Moda$(X|a,b) = b$, Mediana$(X|a,b) = b2^{1/a}$, $\mathcal{V}(X|a,b) = \frac{b^2 a}{(a-1)^2(a-2)}$.
3. Se $X|(m,\theta) \sim$ Binomial$(m,\theta), m \in \{0,1,...\}, \theta \in (0,1)$, então $p(x|m,\theta) = \begin{pmatrix} m \\ x \end{pmatrix} \theta^x(1-\theta)^{m-x}\mathbb{1}_{\{0,1,2,...,m\}}(x)$, $\mathcal{E}(X|\theta) = m\theta$, $\mathcal{V}(X|\theta) = m\theta(1-\theta)$.
4. Se $X|\lambda \sim$ Poisson$(\lambda), \lambda > 0$, $p(x|\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}\mathbb{1}_{\{0,1,2,...\}}(x)$, $\mathcal{E}(X|\lambda) = \lambda$, $\mathcal{V}(X|\lambda) = \lambda$.
5. Se $X|(r,\theta) \sim$ gama$(r,\theta), r > 0, \theta > 0$, então $p(x|r,\theta) = \frac{1}{\theta^r\Gamma(r)}e^{-\frac{x}{\theta}}x^{r-1}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x), \mathcal{E}(X|r,\theta) = r\theta$, Moda$(X|r,\theta) = (r-1)\theta, \mathcal{V}(X|r,\theta) = r\theta^2$.
6. Se $X|(a,b) \sim$ beta$(a,b), a > 0, b > 0$, então $p(x|a,b) = \frac{1}{\beta(a,b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathbb{1}_{(0,1)}(x), \beta(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$, $\mathcal{E}(X|a,b) = \frac{a}{a+b}$, Moda$(X|a,b) = \frac{a-1}{a+b-2}, \mathcal{V}(X|a,b) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$.
7. $\Gamma(r) = \int_0^\infty x^{r-1}e^{-x}dx$, $\Gamma(r) = (r-1)\Gamma(r-1)$. Se r for inteiro $\Gamma(r) = (r-1)!$

Teste de Hipóteses Bayesianos

- Fórmulas gerais:
  $O(H_1,H_0) = \frac{P(H_1)}{P(H_0)}$, $O(H_1,H_0|\boldsymbol{x}) = \frac{P(H_1|\boldsymbol{x})}{P(H_0|\boldsymbol{x})}$, $B(\boldsymbol{x}) = \frac{O(H_1,H_0|\boldsymbol{x})}{O(H_1,H_0)}$.
- Para hipóteses $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$, basta usar as funções distribuição acumulada e de sobrevivência, apropriadas.
- Para hipóteses $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta \neq \theta_0, \theta \in \Theta$, temos

  (Um único parâmetro)

  Priori $p(\theta) = [\alpha\mathbb{1}_{\{\theta_0\}}(\theta) + (1-\alpha)p_1(\theta)\mathbb{1}_{\Theta_1}(\theta)], \Theta_1 = \Theta - \theta_0$, $p_1(.)$ é uma fdp em $\Theta_1$

$O(H_1,H_0)=\frac{1-\alpha}{\alpha}$, $O(H_1,H_0|\boldsymbol{x})=\frac{p_1(\boldsymbol{x})}{p(\boldsymbol{x}|\theta_0)}\frac{1-\alpha}{\alpha}$, $B(\boldsymbol{x})=\frac{p_1(\boldsymbol{x})}{p(\boldsymbol{x}|\theta_0)}$. $p_1(\boldsymbol{x})=\int_{\Theta_1}p(\boldsymbol{x}|\theta)p_1(\theta)d\theta$, $p(\boldsymbol{x}|\theta)$ é a verossimilhança.

(Dois parâmetros $(\theta,\phi)$)

Priori $p(\theta,\phi)=h(\theta)g(\phi)=[\alpha\mathbb{1}_{\{\theta_0\}}(\theta)+(1-\alpha)p_1(\theta)\mathbb{1}_{\Theta_1}(\theta)]g(\phi), \Theta_1=\Theta_\theta-\theta_0$, $p_1(.)$ é uma fdp em $\Theta_1$ e $g(\phi)$ é uma fdp em $\Theta_\phi$.

$O(H_1,H_0)=\frac{1-\alpha}{\alpha}$, $O(H_1,H_0|\boldsymbol{x})=\frac{p_1(\boldsymbol{x})}{p(\boldsymbol{x}|\theta_0)}\frac{1-\alpha}{\alpha}$, $B(\boldsymbol{x})=\frac{p_1(\boldsymbol{x})}{p(\boldsymbol{x}|\theta_0)}$, $p_1(\boldsymbol{x})=\int_{\Theta_1}p(\boldsymbol{x}|\theta)p_1(\theta)d\theta$,

$p(\boldsymbol{x}|\theta)=\int_{\Theta_\phi}p(\boldsymbol{x}|\theta,\phi)g(\phi)d\phi$ é a verossimilhança marginal.

8. Fator de Bayes

| Valor | Evidência a favor de $H_1$ |
|---|---|
| $<1$ | Contra |
| $[1;3)$ | Leve |
| $[3;10)$ | Moderada |
| $[10;30)$ | Forte |
| $[30;100)$ | Muito forte |
| $\geq 100$ | Decisiva |