

# Teoria de Resposta ao Item

## Modelos multidimensionais

Caio L. N. Azevedo, IMECC/Unicamp



## Aspectos Gerais

- ▶ Os itens de um teste podem medir mais de um tipo de conhecimento.
- ▶ Exemplo: itens de matemática que expõe uma situação problema: interpretação de textos e matemática.
- ▶ Estrutura semelhante à de um modelo de análise fatorial.
- ▶ SAEB.



# Análise fatorial

- ▶ Modelo de resposta ao item:

$$Y_{1j} = -b_1 + a_{11}\theta_{j1} + a_{12}\theta_{jM} + \dots + a_{1M}\theta_{jM} + \xi_{1j}$$

$$Y_{2j} = -b_2 + a_{21}\theta_{j1} + a_{22}\theta_{jM} + \dots + a_{2M}\theta_{jM} + \xi_{2j}$$

$$\vdots = \quad \quad \quad \vdots$$

$$Y_{lj} = -b_l + a_{l1}\theta_{j1} + a_{l2}\theta_{jM} + \dots + a_{lM}\theta_{jM} + \xi_{lj}$$



► **Modelo multidimensional compensatório de 2 parâmetros :**

Seja  $Y_{ij}$  a resposta do indivíduo  $j$  ao item  $i$ .

$$Y_{ij} | (\theta_j, \zeta_i) \sim \text{Bernoulli}(p_{ij}),$$

$$p_{ij} = P(Y_{ij} = 1 | \theta_j, \zeta_i) = \frac{1}{1 + e^{-(\mathbf{a}_i' \theta_j + d_i)}}$$

- $\theta_j = (\theta_{j1}, \dots, \theta_{jM})'$ .
- $\theta_{jm}$ : traço latente do indivíduo  $j$  relacionado à dimensão  $m$ .
- $\zeta_i = (\mathbf{a}_i, d_i)'$ .
- $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{iM})'$ , vetor de parâmetros relacionados à discriminação do item  $i$ .
- $d_i$ : parâmetro relacionado à dificuldade do item  $i$ .



► **Modelo multidimensional compensatório de 2 parâmetros :**

Seja  $Y_{ij}$  a resposta do indivíduo  $j$  ao item  $i$ .

$$Y_{ij} | (\theta_j, \zeta_i) \sim \text{Bernoulli}(p_{ij}),$$

$$p_{ij} = P(Y_{ij} = 1 | \theta_j, \zeta_i) = \frac{1}{1 + e^{-(\mathbf{a}'_i \theta_j + d_i)}}$$

- $\theta_j = (\theta_{j1}, \dots, \theta_{jM})'$ .
- $\theta_{jm}$ : traço latente do indivíduo  $j$  relacionado à dimensão  $m$ .
- $\zeta_i = (\mathbf{a}_i, d_i)'$ .
- $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{iM})'$ , vetor de parâmetros relacionados à discriminação do item  $i$ .
- $d_i$ : parâmetro relacionado à dificuldade do item  $i$ .



► **Modelo multidimensional compensatório de 2 parâmetros :**

Seja  $Y_{ij}$  a resposta do indivíduo  $j$  ao item  $i$ .

$$Y_{ij} | (\theta_j, \zeta_i) \sim \text{Bernoulli}(p_{ij}),$$

$$p_{ij} = P(Y_{ij} = 1 | \theta_j, \zeta_i) = \frac{1}{1 + e^{-(\mathbf{a}'_i \theta_j + d_i)}}$$

- $\theta_j = (\theta_{j1}, \dots, \theta_{jM})'$ .
- $\theta_{jm}$ : traço latente do indivíduo  $j$  relacionado à dimensão  $m$ .
- $\zeta_i = (\mathbf{a}_i, d_i)'$ .
- $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{iM})'$ , vetor de parâmetros relacionados à discriminação do item  $i$ .
- $d_i$ : parâmetro relacionado à dificuldade do item  $i$ .



► **Modelo multidimensional compensatório de 2 parâmetros :**

Seja  $Y_{ij}$  a resposta do indivíduo  $j$  ao item  $i$ .

$$Y_{ij} | (\theta_j, \zeta_i) \sim \text{Bernoulli}(p_{ij}),$$

$$p_{ij} = P(Y_{ij} = 1 | \theta_j, \zeta_i) = \frac{1}{1 + e^{-(\mathbf{a}'_i \theta_j + d_i)}}$$

- $\theta_j = (\theta_{j1}, \dots, \theta_{jM})'$ .
- $\theta_{jm}$ : traço latente do indivíduo  $j$  relacionado à dimensão  $m$ .
- $\zeta_i = (\mathbf{a}_i, d_i)'$ .
- $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{iM})'$ , vetor de parâmetros relacionados à discriminação do item  $i$ .
- $d_i$ : parâmetro relacionado à dificuldade do item  $i$ .

► **Modelo multidimensional compensatório de 2 parâmetros :**

Seja  $Y_{ij}$  a resposta do indivíduo  $j$  ao item  $i$ .

$$Y_{ij} | (\theta_j, \zeta_i) \sim \text{Bernoulli}(p_{ij}),$$

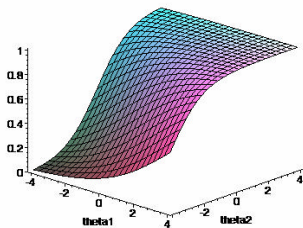
$$p_{ij} = P(Y_{ij} = 1 | \theta_j, \zeta_i) = \frac{1}{1 + e^{-(\mathbf{a}'_i \theta_j + d_i)}}$$

- $\theta_j = (\theta_{j1}, \dots, \theta_{jM})'$ .
- $\theta_{jm}$ : traço latente do indivíduo  $j$  relacionado à dimensão  $m$ .
- $\zeta_i = (\mathbf{a}_i, d_i)'$ .
- $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{iM})'$ , vetor de parâmetros relacionados à discriminação do item  $i$ .
- $d_i$ : parâmetro relacionado à dificuldade do item  $i$ .

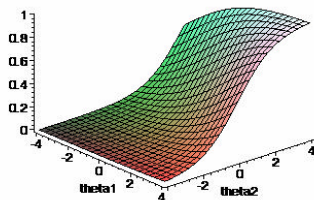




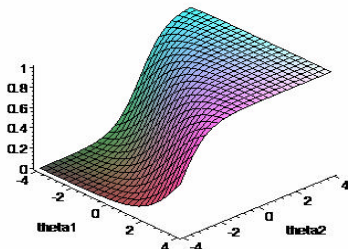
$$a_1 = 0,5; a_2 = 1; d = 2$$



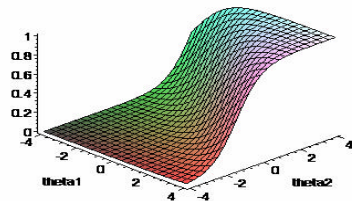
$$a_1 = 0,5; a_2 = 1; d = -2$$



$$a_1 = 1; a_2 = 1,5; d = 2$$



$$a_1 = 1; a_2 = 1,5; d = -2$$





- ▶ Existe uma inclinação associada á cada dimensão do traço latente.
- ▶ Resumir toda informação em único parâmetro.
- ▶ Dificuldade multidimensional:  $DIFICM_i = -\frac{d_i}{\sum_{m=1}^M a_{im}^2}$
- ▶ Discriminação multidimensional ( $DISCM_i$ ) =  $\sqrt{\sum_{m=1}^M a_{im}^2}$ .

► Suposições:

- Probabilidade de resposta correta aumenta monotonicamente com o aumento de pelo menos um dos traços letentes.
- Um item está localizado (posicionado) em un único ponto do espaço multidimensional (dificuldade no caso unidimensional).
- Utiliza-se o ponto que em que o item possui maior poder de discriminação (maior informação sobre os indivíduos).
- Interpretação: De uma forma geral, semelhante ao caso unidimensional

Item	$a_{i1}$	$a_{i2}$	$d_i$	$DIFICM_i$
1	1,69	0,21	0,58	-0,34
2	1,30	0,14	-0,41	0,31
3	0,10	1,85	1,50	-0,81

► Suposições:

- Probabilidade de resposta correta aumenta monotonicamente com o aumento de pelo menos um dos traços letentes.
- Um item está localizado (posicionado) em un único ponto do espaço multidimensional (dificuldade no caso unidimensional).
- Utiliza-se o ponto que em que o item possui maior poder de discriminação (maior informação sobre os indivíduos).
- Interpretação: De uma forma geral, semelhante ao caso unidimensional

Item	$a_{i1}$	$a_{i2}$	$d_i$	$DIFICM_i$
1	1,69	0,21	0,58	-0,34
2	1,30	0,14	-0,41	0,31
3	0,10	1,85	1,50	-0,81

► Suposições:

- Probabilidade de resposta correta aumenta monotonicamente com o aumento de pelo menos um dos traços letentes.
- Um item está localizado (posicionado) em un único ponto do espaço multidimensional (dificuldade no caso unidimensional).
- Utiliza-se o ponto que em que o item possui maior poder de discriminação (maior informação sobre os indivíduos).
- Interpretação: De uma forma geral, semelhante ao caso unidimensional

Item	$a_{i1}$	$a_{i2}$	$d_i$	$DIFICM_i$
1	1,69	0,21	0,58	-0,34
2	1,30	0,14	-0,41	0,31
3	0,10	1,85	1,50	-0,81

► Suposições:

- Probabilidade de resposta correta aumenta monotonicamente com o aumento de pelo menos um dos traços letentes.
- Um item está localizado (posicionado) em un único ponto do espaço multidimensional (dificuldade no caso unidimensional).
- Utiliza-se o ponto que em que o item possui maior poder de discriminação (maior informação sobre os indivíduos).
- Interpretação: De uma forma geral, semelhante ao caso unidimensional

Item	$a_{i1}$	$a_{i2}$	$d_i$	$DIFICM_i$
1	1,69	0,21	0,58	-0,34
2	1,30	0,14	-0,41	0,31
3	0,10	1,85	1,50	-0,81



## ▶ Suposições:

- ▶ Está relacionada com a inclinação da superfície de resposta ao item.
- ▶ Importante se estabelecer uma direção para a qual se pretende medir a discriminação.
- ▶ É estabelecida a partir do ponto onde a inclinação na direção indicada pelo DIFICM.
- ▶ No exemplo a seguir o item 2 discrimina melhor indivíduos que diferem na segunda dimensão enquanto que o item discrimina melhor indivíduos que diferem na primeira dimensão.



▶ Suposições:

- ▶ Está relacionada com a inclinação da superfície de resposta ao item.
- ▶ Importante se estabelecer uma direção para a qual se pretende medir a discriminação.
- ▶ É estabelecida a partir do ponto onde a inclinação na direção indicada pelo DIFICM.
- ▶ No exemplo a seguir o item 2 discrimina melhor indivíduos que diferem na segunda dimensão enquanto que o item discrimina melhor indivíduos que diferem na primeira dimensão.





### ▶ Suposições:

- ▶ Está relacionada com a inclinação da superfície de resposta ao item.
- ▶ Importante se estabelecer uma direção para a qual se pretende medir a discriminação.
- ▶ É estabelecida a partir do ponto onde a inclinação na direção indicada pelo DIFICM.
- ▶ No exemplo a seguir o item 2 discrimina melhor indivíduos que diferem na segunda dimensão enquanto que o item discrimina melhor indivíduos que diferem na primeira dimensão.



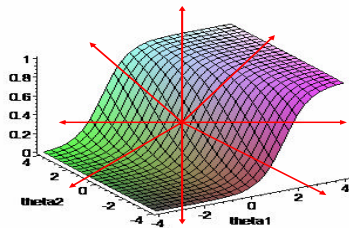
### ▶ Suposições:

- ▶ Está relacionada com a inclinação da superfície de resposta ao item.
- ▶ Importante se estabelecer uma direção para a qual se pretende medir a discriminação.
- ▶ É estabelecida a partir do ponto onde a inclinação na direção indicada pelo DIFICM.
- ▶ No exemplo a seguir o item 2 discrimina melhor indivíduos que diferem na segunda dimensão enquanto que o item discrimina melhor indivíduos que diferem na primeira dimensão.

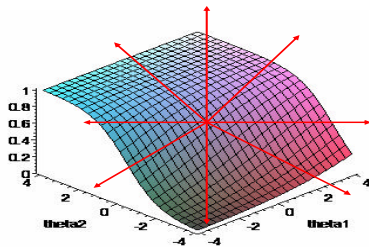


## Parâmetro de discriminação

$$a_1 = 1,9; a_2 = 0,7; d = 0$$



$$a_1 = 0,4; a_2 = 1,2; d = 2$$



- ▶ É suficiente restringir os traços latentes?
- ▶ Exemplo  $\theta_j \sim N_M(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ . Modelo de análise fatorial ortogonal.
- ▶ Os parâmetros  $\mathbf{a}_i$  podem permutar de sinal com os traços latentes, sem mudar a distribuição dos traços latentes (acima). Processo de estimação se encarrega dessa restrição?
- ▶ Em princípio, sim.
- ▶ Tópico em aberto.

- ▶ É suficiente restringir os traços latentes?
- ▶ Exemplo  $\theta_j \sim N_M(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ . Modelo de análise fatorial ortogonal.
- ▶ Os parâmetros  $\mathbf{a}_i$  podem permutar de sinal com os traços latentes, sem mudar a distribuição dos traços latentes (acima). Processo de estimação se encarrega dessa restrição?
- ▶ Em princípio, sim.
- ▶ Tópico em aberto.

- ▶ É suficiente restringir os traços latentes?
- ▶ Exemplo  $\theta_j \sim N_M(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ . Modelo de análise fatorial ortogonal.
- ▶ Os parâmetros  $\mathbf{a}_i$  podem permutar de sinal com os traços latentes, sem mudar a distribuição dos traços latentes (acima). Processo de estimação se encarrega dessa restrição?
- ▶ Em princípio, sim.
- ▶ Tópico em aberto.

- ▶ É suficiente restringir os traços latentes?
- ▶ Exemplo  $\theta_j \sim N_M(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ . Modelo de análise fatorial ortogonal.
- ▶ Os parâmetros  $\mathbf{a}_i$  podem permutar de sinal com os traços latentes, sem mudar a distribuição dos traços latentes (acima). Processo de estimação se encarrega dessa restrição?
- ▶ Em princípio, sim.
- ▶ Tópico em aberto.

- ▶ É suficiente restringir os traços latentes?
- ▶ Exemplo  $\theta_j \sim N_M(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ . Modelo de análise fatorial ortogonal.
- ▶ Os parâmetros  $\mathbf{a}_i$  podem permutar de sinal com os traços latentes, sem mudar a distribuição dos traços latentes (acima). Processo de estimação se encarrega dessa restrição?
- ▶ Em princípio, sim.
- ▶ Tópico em aberto.





- ▶ Se um conjunto de parâmetros é conhecido.
  - ▶ Máxima verossimilhança.
  - ▶ Métodos bayesianos.
- ▶ Todos os parâmetros desconhecidos.



- ▶ Se um conjunto de parâmetros é conhecido.
  - ▶ Máxima verossimilhança.
  - ▶ Métodos bayesianos.
- ▶ Todos os parâmetros desconhecidos.



- ▶ Se um conjunto de parâmetros é conhecido.
  - ▶ Máxima verossimilhança.
  - ▶ Métodos bayesianos.
- ▶ Todos os parâmetros desconhecidos.
  - ▶ Máxima verossimilhança marginal.
  - ▶ Integrais multidimensionais ( $M$ ): quadratura adaptativa.
  - ▶ Espaço  $M$  ( $M+1$ ) equações para alguns métodos.



- ▶ Se um conjunto de parâmetros é conhecido.
  - ▶ Máxima verossimilhança.
  - ▶ Métodos bayesianos.
- ▶ Todos os parâmetros desconhecidos.
  - ▶ Máxima verossimilhança marginal.
  - ▶ Integrais multidimensionais (M): quadratura adaptativa.
  - ▶ Passo M: (M+1) equações para serem resolvidas.



- ▶ Se um conjunto de parâmetros é conhecido.
  - ▶ Máxima verossimilhança.
  - ▶ Métodos bayesianos.
- ▶ Todos os parâmetros desconhecidos.
  - ▶ Máxima verossimilhança marginal.
  - ▶ Integrais multidimensionais ( $M$ ): quadratura adaptativa.
  - ▶ Passo  $M$ : ( $M+1$ ) equações para serem resolvidas.



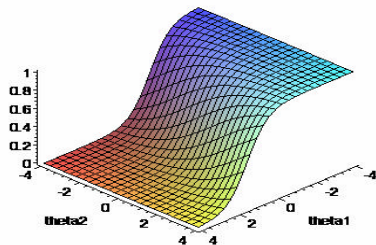
- ▶ Se um conjunto de parâmetros é conhecido.
  - ▶ Máxima verossimilhança.
  - ▶ Métodos bayesianos.
- ▶ Todos os parâmetros desconhecidos.
  - ▶ Máxima verossimilhança marginal.
  - ▶ Integrais multidimensionais ( $M$ ): quadratura adaptativa.
  - ▶ Passos  $M$ :  $(M+1)$  equações para serem resolvidas.



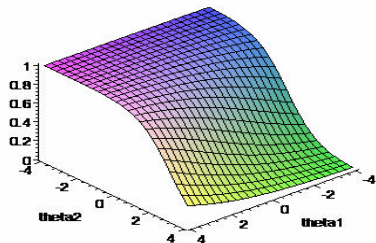
- ▶ Se um conjunto de parâmetros é conhecido.
  - ▶ Máxima verossimilhança.
  - ▶ Métodos bayesianos.
- ▶ Todos os parâmetros desconhecidos.
  - ▶ Máxima verossimilhança marginal.
  - ▶ Integrais multidimensionais ( $M$ ): quadratura adaptativa.
  - ▶ Passos  $M$ :  $(M+1)$  equações para serem resolvidas.



$$a_1 = -1,9; a_2 = 0,7 ; d = 0$$



$$a_1 = 0,4; a_2 = -1,2 ; d = 0$$







- ▶ Programa Testfact.
  - ▶ Modelos compensatórios (parâmetro  $c$  deve ser estimado antecipadamente).
  - ▶ MVM, MMAP, EAP e MAP implementados.
  - ▶ Teste para a escolha do número de dimensões do modelo.
- ▶ Pacto MCMCpack (R).



- ▶ Programa Testfact.
  - ▶ Modelos compensatórios (parâmetro  $c$  deve ser estimado antecipadamente).
    - ▶ MVM, MMAP, EAP e MAP implementados.
    - ▶ Teste para a escolha do número de dimensões do modelo.
  - ▶ Pacto MCMCpack (R).



- ▶ Programa Testfact.
  - ▶ Modelos compensatórios (parâmetro  $c$  deve ser estimado antecipadamente).
  - ▶ MVM, MMAP, EAP e MAP implementados.
    - ▶ Teste para a escolha do número de dimensões do modelo.
- ▶ Pacto MCMCpack (R).



- ▶ Programa Testfact.
  - ▶ Modelos compensatórios (parâmetro  $c$  deve ser estimado antecipadamente).
  - ▶ MVM, MMAP, EAP e MAP implementados.
  - ▶ Teste para a escolha do número de dimensões do modelo.
- ▶ Pacto MCMCpack (R).
  - ▶ Modelos compensatórios (não permite o ajuste do modelo de 3 parâmetros).
  - ▶ Baseado em métodos de MCMC.
  - ▶ Grandeza problemática: alta relação de número de dimensões do modelo para o tamanho da amostra.



- ▶ Programa Testfact.
  - ▶ Modelos compensatórios (parâmetro  $c$  deve ser estimado antecipadamente).
  - ▶ MVM, MMAP, EAP e MAP implementados.
  - ▶ Teste para a escolha do número de dimensões do modelo.
- ▶ Pacto MCMCpack (R).
  - ▶ Modelos compensatórios (não permite o ajuste do modelo de 3 parâmetros).
  - ▶ Baseado em métodos de MCMC.
  - ▶ Contorna problemas com relação ao número de dimensões do modelo.



- ▶ Programa Testfact.
  - ▶ Modelos compensatórios (parâmetro  $c$  deve ser estimado antecipadamente).
  - ▶ MVM, MMAP, EAP e MAP implementados.
  - ▶ Teste para a escolha do número de dimensões do modelo.
- ▶ Pacto MCMCpack (R).
  - ▶ Modelos compensatórios (não permite o ajuste do modelo de 3 parâmetros).
  - ▶ Baseado em métodos de MCMC.
  - ▶ Contorna problemas com relação ao número de dimensões do modelo.



- ▶ Programa Testfact.
  - ▶ Modelos compensatórios (parâmetro  $c$  deve ser estimado antecipadamente).
  - ▶ MVM, MMAP, EAP e MAP implementados.
  - ▶ Teste para a escolha do número de dimensões do modelo.
- ▶ Pacto MCMCpack (R).
  - ▶ Modelos compensatórios (não permite o ajuste do modelo de 3 parâmetros).
  - ▶ Baseado em métodos de MCMC.
  - ▶ Contorna problemas com relação ao número de dimensões do modelo.



- ▶ Programa Testfact.
  - ▶ Modelos compensatórios (parâmetro  $c$  deve ser estimado antecipadamente).
  - ▶ MVM, MMAP, EAP e MAP implementados.
  - ▶ Teste para a escolha do número de dimensões do modelo.
- ▶ Pacto MCMCpack (R).
  - ▶ Modelos compensatórios (não permite o ajuste do modelo de 3 parâmetros).
  - ▶ Baseado em métodos de MCMC.
  - ▶ Contorna problemas com relação ao número de dimensões do modelo.





► **Modelo multidimensional compensatório de 3 parâmetros :**

Seja  $Y_{ij}$  a resposta do indivíduo  $j$  ao item  $i$ .

$$Y_{ij} | (\theta_j, \zeta_i) \sim \text{Bernoulli}(p_{ij}),$$

$$p_{ij} = P(Y_{ij} = 1 | \theta_j, \zeta_i) = c_i + (1 - c_i) \frac{1}{1 + e^{-(\mathbf{a}'_i \theta_j + d_i)}}$$

- $\theta_j = (\theta_{j1}, \dots, \theta_{jM})'$ .
- $\theta_{jm}$ : traço latente do indivíduo  $j$  relacionado à dimensão  $m$ .
- $\zeta_i = (\mathbf{a}_i, d_i, c_i)'$ .
- $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{iM})'$ , vetor de parâmetros relacionados à discriminação do item  $i$ .
- $d_i$ : parâmetro relacionado à dificuldade do item  $i$ .
- $c_i$ : probabilidade aproximada de resposta correta ao item  $i$  de indivíduos com níveis baixos de traços latentes.



► **Modelo multidimensional compensatório de 3 parâmetros :**

Seja  $Y_{ij}$  a resposta do indivíduo  $j$  ao item  $i$ .

$$Y_{ij} | (\theta_j, \zeta_i) \sim \text{Bernoulli}(p_{ij}),$$

$$p_{ij} = P(Y_{ij} = 1 | \theta_j, \zeta_i) = c_i + (1 - c_i) \frac{1}{1 + e^{-(\mathbf{a}_i' \theta_j + d_i)}}$$

- $\theta_j = (\theta_{j1}, \dots, \theta_{jM})'$ .
- $\theta_{jm}$ : traço latente do indivíduo  $j$  relacionado à dimensão  $m$ .
- $\zeta_i = (\mathbf{a}_i, d_i, c_i)'$ .
- $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{iM})'$ , vetor de parâmetros relacionados à discriminação do item  $i$ .
- $d_i$ : parâmetro relacionado à dificuldade do item  $i$ .
- $c_i$ : probabilidade aproximada de resposta correta ao item  $i$  de indivíduos com níveis baixos de traços latentes.



► **Modelo multidimensional compensatório de 3 parâmetros :**

Seja  $Y_{ij}$  a resposta do indivíduo  $j$  ao item  $i$ .

$$Y_{ij} | (\theta_j, \zeta_i) \sim \text{Bernoulli}(p_{ij}),$$

$$p_{ij} = P(Y_{ij} = 1 | \theta_j, \zeta_i) = c_i + (1 - c_i) \frac{1}{1 + e^{-(\mathbf{a}_i' \theta_j + d_i)}}$$

- $\theta_j = (\theta_{j1}, \dots, \theta_{jM})'$ .
- $\theta_{jm}$ : traço latente do indivíduo  $j$  relacionado à dimensão  $m$ .
- $\zeta_i = (\mathbf{a}_i, d_i, c_i)'$ .
- $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{iM})'$ , vetor de parâmetros relacionados à discriminação do item  $i$ .
- $d_i$ : parâmetro relacionado à dificuldade do item  $i$ .
- $c_i$ : probabilidade aproximada de resposta correta ao item  $i$  de indivíduos com níveis baixos de traços latentes.



► **Modelo multidimensional compensatório de 3 parâmetros :**

Seja  $Y_{ij}$  a resposta do indivíduo  $j$  ao item  $i$ .

$$Y_{ij} | (\theta_j, \zeta_i) \sim \text{Bernoulli}(p_{ij}),$$

$$p_{ij} = P(Y_{ij} = 1 | \theta_j, \zeta_i) = c_i + (1 - c_i) \frac{1}{1 + e^{-(\mathbf{a}_i' \theta_j + d_i)}}$$

- $\theta_j = (\theta_{j1}, \dots, \theta_{jM})'$ .
- $\theta_{jm}$ : traço latente do indivíduo  $j$  relacionado à dimensão  $m$ .
- $\zeta_i = (\mathbf{a}_i, d_i, c_i)'$ .
- $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{iM})'$ , vetor de parâmetros relacionados à discriminação do item  $i$ .
- $d_i$ : parâmetro relacionado à dificuldade do item  $i$ .
- $c_i$ : probabilidade aproximada de resposta correta ao item  $i$  de indivíduos com níveis baixos de traços latentes.



► **Modelo multidimensional compensatório de 3 parâmetros :**

Seja  $Y_{ij}$  a resposta do indivíduo  $j$  ao item  $i$ .

$$Y_{ij} | (\theta_j, \zeta_i) \sim \text{Bernoulli}(p_{ij}),$$

$$p_{ij} = P(Y_{ij} = 1 | \theta_j, \zeta_i) = c_i + (1 - c_i) \frac{1}{1 + e^{-(\mathbf{a}_i' \theta_j + d_i)}}$$

- $\theta_j = (\theta_{j1}, \dots, \theta_{jM})'$ .
- $\theta_{jm}$ : traço latente do indivíduo  $j$  relacionado à dimensão  $m$ .
- $\zeta_i = (\mathbf{a}_i, d_i, c_i)'$ .
- $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{iM})'$ , vetor de parâmetros relacionados à discriminação do item  $i$ .
- $d_i$ : parâmetro relacionado à dificuldade do item  $i$ .
- $c_i$ : probabilidade aproximada de resposta correta ao item  $i$  de indivíduos com níveis baixos de traços latentes.



► **Modelo multidimensional compensatório de 3 parâmetros :**

Seja  $Y_{ij}$  a resposta do indivíduo  $j$  ao item  $i$ .

$$Y_{ij} | (\theta_j, \zeta_i) \sim \text{Bernoulli}(p_{ij}),$$

$$p_{ij} = P(Y_{ij} = 1 | \theta_j, \zeta_i) = c_i + (1 - c_i) \frac{1}{1 + e^{-(\mathbf{a}_i' \theta_j + d_i)}}$$

- $\theta_j = (\theta_{j1}, \dots, \theta_{jM})'$ .
- $\theta_{jm}$ : traço latente do indivíduo  $j$  relacionado à dimensão  $m$ .
- $\zeta_i = (\mathbf{a}_i, d_i, c_i)'$ .
- $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{iM})'$ , vetor de parâmetros relacionados à discriminação do item  $i$ .
- $d_i$ : parâmetro relacionado à dificuldade do item  $i$ .
- $c_i$ : probabilidade aproximada de resposta correta ao item  $i$  de indivíduos com níveis baixos de traços latentes.



- ▶ Nojosa, R. T. (2001). Modelos multidimensionais para a teoria da resposta ao item. Dissertação de Mestrado. DE, UFPE.
- ▶ Reckase, M. D. (1997). A linear logistic multidimensional model for dichotomous item response data. In W. J. van der Linden and R. K. Hambleton eds. Handbook of modern item response theory. New York-Springer - Verlag.