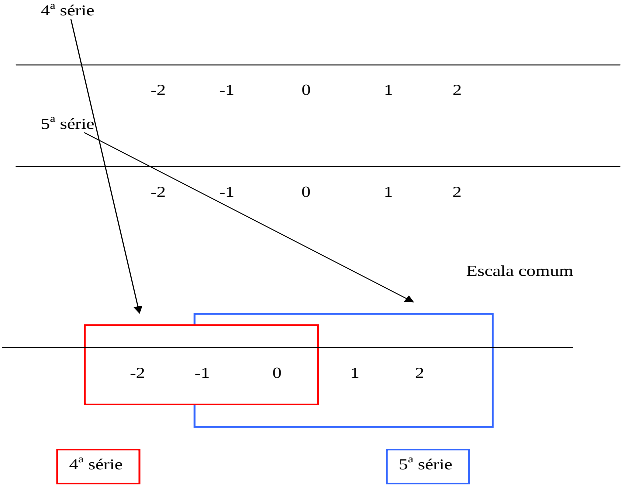
Teoria de Resposta ao Item

Equalização / Modelos de grupos múltiplos

Caio L. N. Azevedo, IMECC/Unicamp

- Como comparar indivíduos submetidos a diferentes provas?
- Equalizar: tornar resultados comparáveis (oriundos de diferentes métricas)
- A posteriori.
- Em concomitância com o ajuste do modelo.

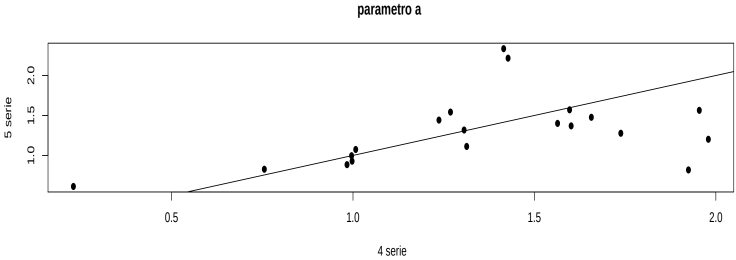

4ª série
-2 -1 0 1 2
5ª série
-2 -1 0 1 2
Escala comum
-2 -1 0 1 2
4ª série
5ª série

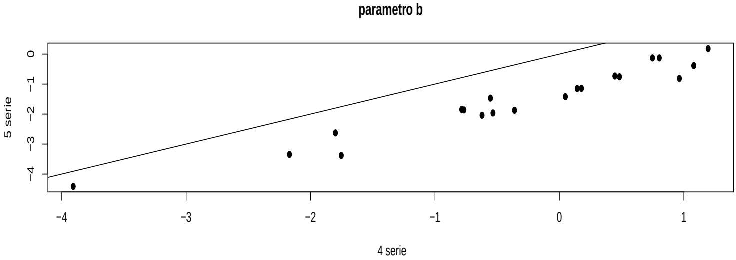
- Duas escalas (A e B).
- Temos que:
  - $a_i^B = \dfrac{a_i^A}{\alpha}$
  - $b_i^B = \alpha b_i^A + \beta$
  - $\theta_j^B = \alpha\theta_j^A + \beta$
- Como determinar (α, β)?.

Exemplo

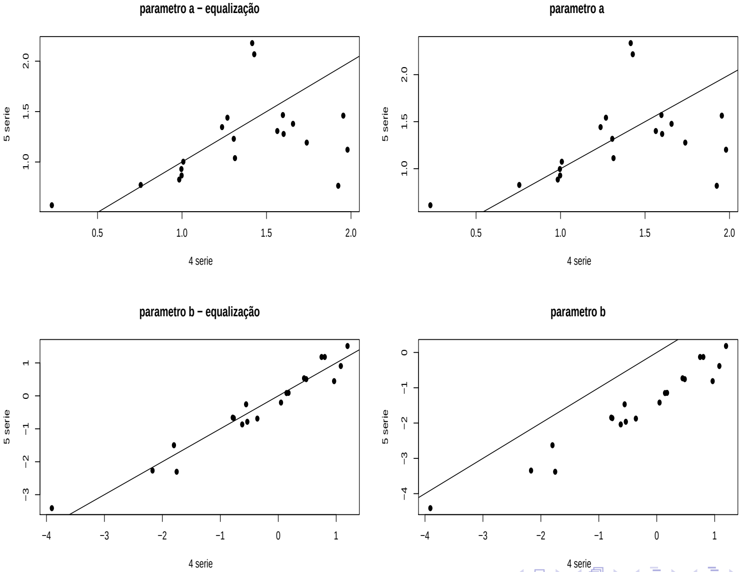
- Estudo longitudinal com 556 crianças, a partir da 1^a série.
- Considere as duas primeiras séries.
- Grupos independentes.
- Grupo 1: 1^a série - Grupo 2: 2^a série.

Exemplo

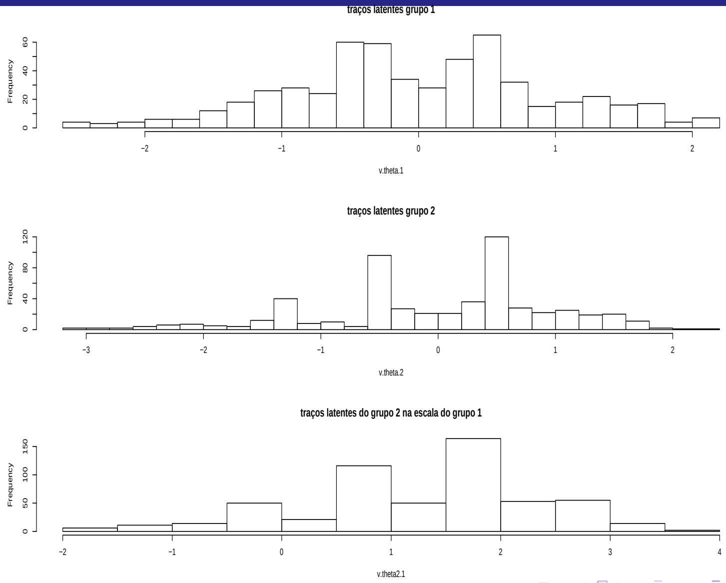

parametro a
5 serie
2.0
1.5
1.0
0.5
1.0
1.5
2.0
4 serie


parametro b
5 serie
0
−1
−2
−3
−4
−4
−3
−2
−1
0
1
4 serie

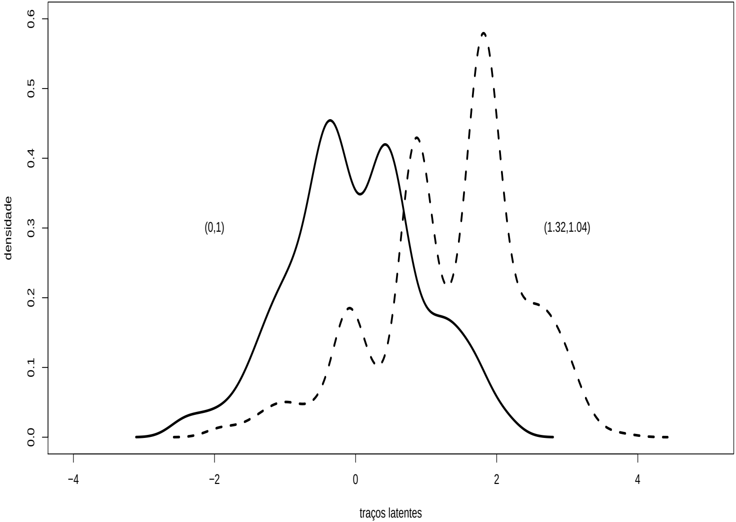
Exemplo


parametro a − equalização
parametro a
parametro b − equalização
parametro b
5 serie
4 serie
0.5
1.0
1.5
2.0
−4
−3
−2
−1
0
1

Exemplo


traços latentes grupo 1
Frequency
v.theta.1
traços latentes grupo 2
Frequency
v.theta.2
traços latentes do grupo 2 na escala do grupo 1
Frequency
v.theta2.1

Exemplo


densidade
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
(0,1)
(1.32,1.04)
−4
−2
0
2
4
traços latentes

- Considera a situação em que temos indivíduos pertencentes a diferentes grupos: séries, turnos, regiões.
- Indivíduos pertencentes a um mesmo grupo possuem características comuns e são mais semelhantes entre si do que indivíduos pertencentes a outros grupos.
- Os grupos são previamente definidos $\neq$ modelos de variáveis latentes.
- Modelo de grupos múltiplos Bock and Zimowski (1997).

$$P(Y_{ijk} = 1|(\theta_{jk}, \zeta_i)) = c_i + (1 - c_i)\frac{1}{1 + e^{-Da_i(\theta_{jk} - b_i)}}$$

$i = 1, \ldots, I\,(item)$, $j = 1, \ldots, n_k$ (indivíduo), $k = 1, \ldots, K, (grupo)$

- Y_{ijk} : é a resposta do indivíduo j, do grupo k ao item i. É igual a 1 se o indivíduo responde corretamente e 0 caso scontrário.
- θ_{jk} : é o traço latente (conhecimento, nível de depressão, etc) do indivíduo j.
- ζ_i : (a_i, b_i, c_i).
- a_i : é o parâmetro de discriminação associado ao item i.
- b_i : é o parâmetro de dificuldade associado ao item i.
- c_i : é o parâmetro de "acerto casual" associado ao item i.

$$P(Y_{ijk} = 1 | (\theta_{jk}, \zeta_i)) = c_i + (1 - c_i) \frac{1}{1 + e^{-Da_i(\theta_{jk} - b_i)}}$$

$i = 1, \ldots, I$ (*item*), $j = 1, \ldots, n_k$ (indivíduo), $k = 1, \ldots, K$, (*grupo*)

- Y_{ijk} : é a resposta do indivíduo j, do grupo k ao item i. É igual a 1 se o indivíduo responde corretamente e 0 caso scontrário.
- θ_{jk} : é o traço latente (conhecimento, nível de depressão, etc) do indivíduo j.
- ζ_i : (a_i, b_i, c_i).
- a_i : é o parâmetro de discriminação associado ao item i.
- b_i : é o parâmetro de dificuldade associado ao item i.
- c_i : é o parâmetro de "acerto casual" associado ao item i.

$$P(Y_{ijk} = 1 | (\theta_{jk}, \zeta_i)) \quad = \quad c_i + (1 - c_i) \frac{1}{1 + e^{-Da_i(\theta_{jk} - b_i)}}$$

$i = 1, \ldots, I$ (*item*), $j = 1, \ldots, n_k$ (indivíduo), $k = 1, \ldots, K$, (*grupo*)

- Y_{ijk} : é a resposta do indivíduo j, do grupo k ao item i. É igual a 1 se o indivíduo responde corretamente e 0 caso scontrário.
- θ_{jk} : é o traço latente (conhecimento, nível de depressão, etc) do indivíduo j.
- ζ_i : (a_i, b_i, c_i).
- a_i : é o parâmetro de discriminação associado ao item i.
- b_i : é o parâmetro de dificuldade associado ao item i.
- c_i : é o parâmetro de "acerto casual" associado ao item i.

$$P(Y_{ijk} = 1|(\theta_{jk}, \zeta_i)) = c_i + (1 - c_i)\frac{1}{1 + e^{-Da_i(\theta_{jk} - b_i)}}$$

$i = 1, \ldots, I\,(item)$, $j = 1, \ldots, n_k$ (indivíduo), $k = 1, \ldots, K, (grupo)$

- Y_{ijk} : é a resposta do indivíduo j, do grupo k ao item i. É igual a 1 se o indivíduo responde corretamente e 0 caso scontrário.
- θ_{jk} : é o traço latente (conhecimento, nível de depressão, etc) do indivíduo j.
- ζ_i : (a_i, b_i, c_i).
- a_i : é o parâmetro de discriminação associado ao item i.
- b_i : é o parâmetro de dificuldade associado ao item i.
- c_i : é o parâmetro de "acerto casual" associado ao item i.

$$P(Y_{ijk} = 1|(\theta_{jk}, \zeta_i)) = c_i + (1 - c_i)\frac{1}{1 + e^{-Da_i(\theta_{jk} - b_i)}}$$

$i = 1, \ldots, I\ (item)$, $j = 1, \ldots, n_k$ (indivíduo), $k = 1, \ldots, K, (grupo)$

- Y_{ijk} : é a resposta do indivíduo j, do grupo k ao item i. É igual a 1 se o indivíduo responde corretamente e 0 caso scontrário.
- θ_{jk} : é o traço latente (conhecimento, nível de depressão, etc) do indivíduo j.
- ζ_i : (a_i, b_i, c_i).
- a_i : é o parâmetro de discriminação associado ao item i.
- b_i : é o parâmetro de dificuldade associado ao item i.
- c_i : é o parâmetro de "acerto casual" associado ao item i.

$$\theta_{jk}|\boldsymbol{\eta}_k \sim N(\mu_k, \psi_k)$$

- Identificabilidade $\mu_1 = 0, \psi_1 = 1$.
- Estimar (μ_k, ψ_k), $k = 2, \ldots, K$.

Probabilidade marginal

$$P\left(\mathbf{Y}_{.jk} = \mathbf{y}_{.jk} | \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}_k\right) = \int_{\Re} P\left(\mathbf{Y}_{.jk} = \mathbf{y}_{.jk} | \boldsymbol{\zeta}, \theta\right) g\left(\theta | \boldsymbol{\eta}_k\right) d\theta$$

De modo que a verossimilhança é dada por

$$L\left(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}\right) = \prod_{k=1}^{K} \prod_{j=1}^{n_k} P\left(\mathbf{Y}_{.jk} = \mathbf{y}_{.jk} | \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}_k\right)$$

E a log-verossimilhança, por sua vez, é dada por

$$l\left(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}\right) = \sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{n_k} lnP\left(\mathbf{Y}_{.jk} = \mathbf{y}_{.jk} | \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}_k\right) = \sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{n_k} lnP\left(\mathbf{Y}_{.jk} | \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}_k\right)$$

- Estimadores de máxima verossimilhança marginal

$$\begin{aligned} \frac{\partial l\left(\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\eta}\right)}{\partial \boldsymbol{\zeta}} &= \mathbf{0} \\ \frac{\partial l\left(\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\eta}\right)}{\partial \boldsymbol{\eta}} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

- Sem solução explícita.
- Problema: dessa forma teríamos que estimar todos os parâmetros simultâneamente, pois $\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\eta})}{\partial \boldsymbol{\zeta} \partial \boldsymbol{\eta}} \neq \mathbf{0}$
- Se $\boldsymbol{\eta}$, abordagem de Bock & Aitkin.
- Se $\boldsymbol{\zeta}$, estimativa do vetor $\boldsymbol{\eta}$ é relativamente simples.
- Abordagem, abordagem de Bock & Aitkin, parâmetros dos itens e populacionais: "Máxima verossimilhança marginal-perfilada".

$$\frac{\partial l\left(\boldsymbol{\zeta},\widehat{\boldsymbol{\eta}}\right)}{\partial \boldsymbol{\zeta}} = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial l\left(\widehat{\boldsymbol{\zeta}},\boldsymbol{\eta}\right)}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \mathbf{0}$$

Parte funcional

$$
\begin{aligned}
\mathbf{S}(\zeta_i) &= \sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{n_k}\left\{\frac{1}{P\left(\mathbf{Y}_{.jk}|\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\eta}_k\right)}\frac{\partial P\left(\mathbf{Y}_{.jk}|\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\eta}_k\right)}{\partial\zeta_i}\right\} \\
&= \sum_{k=1}^{K}\sum_{l\in Q_k}\left(\overline{r}_{ilk}-\overline{f}_{ilk}P_{ilk}\right)W_{ilk}\mathbf{h}_{ilk} \qquad (1)
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{I}(\zeta_i) = \sum_{k=1}^{K}\sum_{l\in Q_k}\overline{f}_{ilk}P^*_{ilk}Q^*_{ilk}\mathbf{h}_{ilk}\mathbf{h}^{'}_{ilk} \qquad (2)
$$

Parte funcional

$$S\left(\mu_k\right) = \sigma_k^{-2}\sum_{j=1}^{n_k}\sum_{l\in Q_k} g_{jk}^{*}\left(\overline{\theta}_{lk}\right)\left(\overline{\theta}_{lk}-\mu_k\right) \tag{3}$$

$$S\left(\sigma_k^2\right) = \left(2\sigma_k^4\right)^{-1}\sum_{j=1}^{n_k}\sum_{l\in Q_k} g_{jk}^{*}\left(\overline{\theta}_{lk}\right)\left\{\left(\overline{\theta}_{lk}-\mu_k\right)^2-\sigma_k^2\right\} \tag{4}$$

Parte funcional

$$\widehat{\mu}_k = \widehat{\overline{\mu}}_{.k} \tag{5}$$

$$\widehat{\sigma}_k^2 = \widehat{\overline{\sigma}}^2_{.k} + \widehat{\overline{\delta}}^2_{.k} \tag{6}$$

Com

$$\widehat{\overline{\mu}}_{.k} = \frac{1}{n_k}\sum_{j=1}^{n_k}\widehat{\mu}_{jk}\,;\ \widehat{\overline{\sigma}}^2_{.k} = \frac{1}{n_k}\sum_{j=1}^{n_k}\widehat{\sigma}^2_{jk}\,;\ \widehat{\overline{\delta}}^2_{.k} = \frac{1}{n_k}\sum_{j=1}^{n_k}\left(\widehat{\mu}_{jk} - \widehat{\mu}_k\right)^2 \tag{7}$$

e

$$\begin{aligned}
\widehat{\mu}_{jk} &= \sum_{l \in Q_k} \overline{\theta}_{lk} g^*_{jk}\left(\overline{\theta}_{lk}\right) \\
\widehat{\sigma}^2_{jk} &= \sum_{l \in Q_k} \left(\overline{\theta}_{lk} - \widehat{\mu}_k\right)^2 g^*_{jk}\left(\overline{\theta}_{lk}\right)
\end{aligned}$$

Adaptação do Algoritmo EM

De maneira análoga ao caso de uma população, podemos usar uma adaptação do **algoritmo EM**, de modo que os parâmetros populacionais de cada população sejam estimados, em separado, no **Passo E**, e que os parâmetros de cada item sejam estimados, em separado, no **Passo M**, como mostrado a seguir

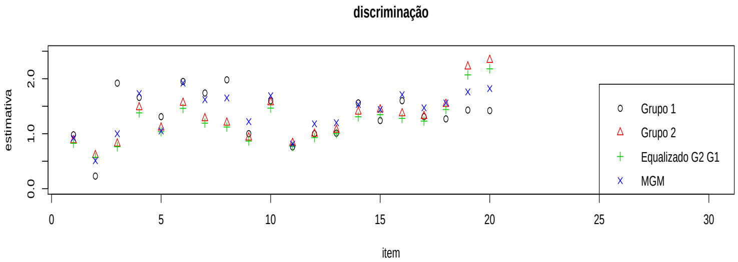
Passo E

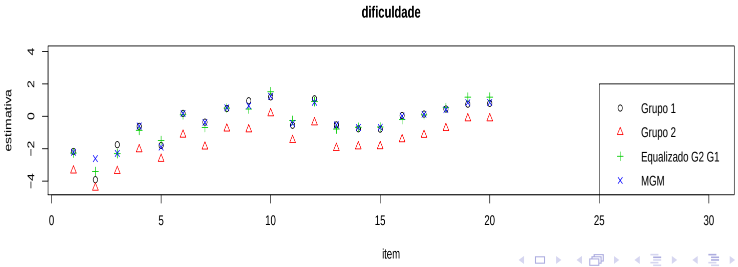
1. Usar os pontos de quadratura, $\overline{\theta}_{lk}$, os pesos associados $A_{lk}^{(t)}$, $l = 1, \ldots, q_k$, as estimativas no passo anterior dos parâmetros dos itens $\widehat{\zeta}_i^{(t)}$, $i = 1, \ldots, I$, e dos parâmetros populacionais, $\widehat{\mu}_k^{(t)}$ e $\widehat{\sigma}_k^{2\,(t)}$, $k = 1, \ldots, K$ para gerar $g_{jk}^{*}\left(\overline{\theta}_{lk}\right)^{(t)}$ e, posteriormente, $\overline{r}_{ilk}^{(t)}$ e $\overline{f}_{ilk}^{(t)}$, $i = 1, \ldots, I$ e $l = 1, \ldots, q_k$.
2. Usar os pontos de quadratura e $g_{jk}^{*}\left(\overline{\theta}_{lk}\right)^{(t)}$ para obter $\overline{\mu}_{.k}^{(t+1)}$, $\overline{\sigma}_{.k}^{2\,(t+1)}$ e $\overline{\delta}_{.k}^{(t+1)}$ através de (7), e posteriormente, $\widehat{\mu}_k^{(t+1)}$ e $\widehat{\sigma}_k^{2\,(t+1)}$ por (5) e (6).

Passo M

Com $\widehat{\mathbf{r}}^{(t)}$, $\widehat{\mathbf{f}}^{(t)}$ e $\widehat{\boldsymbol{\eta}}^{(t+1)}$ obtidos no Passo E, resolver as equações de estimação para $\boldsymbol{\zeta}_i$, $i = 1, \ldots, I$, usando Newton-Raphson ou Escore de Fisher através das expressões de (1) a (2).

A estimação dos traços latentes é, essencialmente, a mesma do caso de um único grupo.


discriminação
estimativa
0.0
1.0
2.0
0
5
10
15
20
25
30
item
Grupo 1
Grupo 2
Equalizado G2 G1
MGM


dificuldade
estimativa
−4
−2
0
2
4
0
5
10
15
20
25
30
item
Grupo 1
Grupo 2
Equalizado G2 G1
MGM

- Bilog-MG: Desenvolvido para a plataforma Windows
- Estimação dos itens: MVM e MMAP.
- Acelerador de Ramsey.
- Regressão rígida.
- Estimação dos hiperparâmetros.
- Estimação das densidades latentes.
- Traços latentes: MV, EAP e MAP.
  - Prioris: especificada, N(0,1), estimada na Fase 2.
  - As estimativas podem ser prejudicadas pela má especificação das prioris.

- Foram gerados n = 5000 valores independentes de uma distribuição N(0,1) a fim de servirem como as habilidades dos indivíduos.
- I = 50 itens de maneira a cobrir os valores apropriados para os parâmetros: a variando de 0,8 a 1,4, b variando de -2,0 a 3,5 e c = 0,20 a 0,25.
- $\mu_1 = 0, \mu_2 = 1, \mu_3 = 2, \psi_1 = 1, \psi_2 = 1,1, \psi_3 = 1,2$
- Para a geração das respostas foi construído um programa em linguagem Ox.
- Para a obtenção das estimativas dos parâmetros (itens e habilidades) foi usado o programa Bilog

Tabela: Estatísticas relativas as estimativas dos parâmetros dos itens

Estatística	**Parâmetro**					
	discriminação(a)		**dificuldade(b)**		**acerto casual (c)**	
	MVM	**BM**	**MVM**	**BM**	**MVM**	**BM**
MDA	0,24	0,17	1,56	0,94	0,39	0,13
MDAR	0,27	0,19	0,30	0,15	0,09	0,03

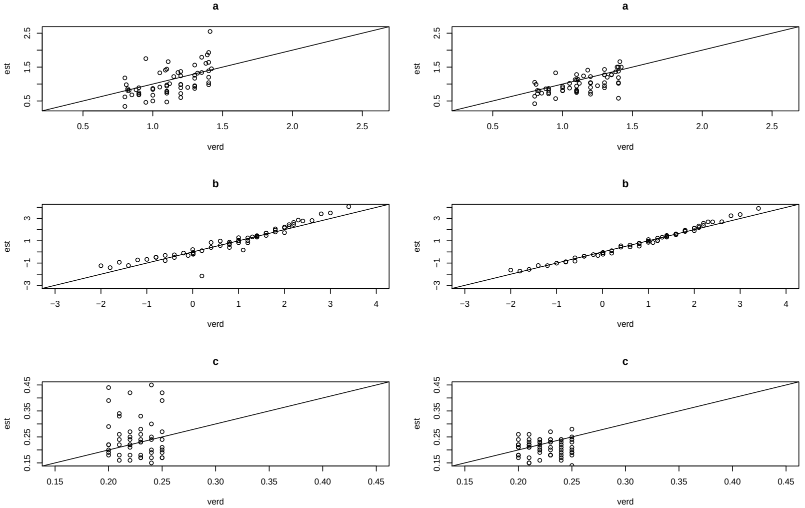
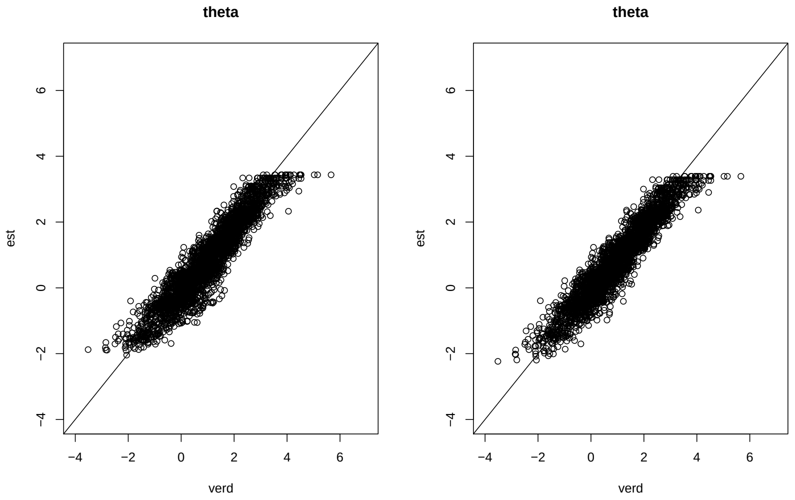

a
est
verd
b
c

Tabela: Estatísticas relativas as estimativas dos parâmetros dos itens

Estatística	**Parâmetro**					
	pop 1		**pop 2**		**pop 3**	
	est	**ep**	**est**	**ep**	**est**	**ep**
media MVM	0,00	-	0,98	0,04	2,17	0,06
media MMAP	0,00	-	1,01	0,04	2,17	0,04
var MVM	1,00	-	1,21	0,04	2,04	0,07
var MMAP	1,00	-	1,02	0,04	1,35	0,04


theta
theta
est
est
verd
verd
−4
−2
0
2
4
6