ME210 C Probabilidade I
Primeiro semestre de 2024
Lista de exercícios Global

Observação[1]

1 Probabilidade

1. Uma moeda e um dado são lançados. Forneça o espaço amostral do experimento e depois represente-o como produto cartesiano dos dois espaços amostrais, correspondente aos experimentos considerados individualmente.

2. Defina o espaço amostral para cada um dos seguintes experimentos aleatórios.

   i) No lançamento de dois dados e uma moeda, anota-se a configuração obtida.

   ii) Numa linha de produção conta-se o número de peças defeituosas num intervalo de uma hora.

   iii) Investigam-se famílias com 4 crianças, anotando-se a configuração segundo o sexo.

   iv) Numa entrevista telefônica com 250 assinantes, pergunta-se se o proprietário tem ou não máquina de secar roupa.

   v) Um fichário de 10 nomes contem 3 nomes de mulheres. Seleciona-se ficha após ficha, até o último nome de mulher ser selecionado, e anota-se o número de fichas selecionadas.

   vi) Um relógio mecânico pode parar a qualquer momento, por falha técnica. Mede-se o ângulo em graus que o ponteiro dos segundos forma com o eixo imaginário orientado do centro ao número 12.

   vii) De cada família entrevistada numa pesquisa, anotam-se a classe social a que pertence $\{A, B, C, D\}$ e o estado civil do chefe da família.

[1] Lista de exercícios feita pela profa. Verónica González-López, com a contribuição do prof. Mario Gneri, Márcio Lanfredi Viola e Diego Bernardini - IMECC Unicamp, adaptados pelo Prof. Caio Azevedo.

3. Sejam A, B e C eventos associados a um experimento aleatório. Expresse, em notação de conjuntos, e faça os diagramas de Venn, dos seguintes eventos:

    i) somente A ocorre;
    ii) A e B ocorrem, mas C não;
    iii) todos os três ocorrem;
    iv) pelo menos um deles ocorre;
    v) pelo menos dois deles ocorrem;
    vi) exatamente um deles ocorre;
    vii) exatamente dois deles ocorrem;
    viii) nenhum deles ocorre;
    ix) não mais que dois deles ocorrem;
    x) no máximo 3 deles ocorrem.

4. Calcule as probabilidades dos eventos do Exercício 3 supondo que

$$P(A) = \frac{35}{100}; P(B) = \frac{40}{100}; P(C) = \frac{15}{100}; P(A \cap B) = \frac{10}{100}; B \cap C = A \cap C = \emptyset.$$

5. Sejam A, B e C eventos associados a um experimento aleatório. Demonstre o resultado abaixo, interpretando-o:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

6. Sejam A e B eventos associados a um experimento aleatório. Demonstre que:

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B).$$

7. Sejam A_1 e A_2 eventos associados a um experimento aleatório. Demonstre que:

    a) Se $P(A_1) = P(A_2) = 0 \Rightarrow P(A_1 \cup A_2) = 0$;
    b) Se $P(A_1) = P(A_2) = 1 \Rightarrow P(A_1 \cap A_2) = 1$.

8. Uma moeda equilibrada é lançada 3 vezes. Descreva o respectivo espaço amostral e calcule as probabilidades dos seguintes eventos:

   i) duas caras ocorrem;

   ii) o resultado do segundo lançamento é cara;

   iii) o resultado do primeiro lançamento é igual ao do terceiro;

   iv) o número de caras é igual ao de coroas.

9. Um dado equilibrado é lançado duas vezes. Descreva o espaço amostral e calcule as probabilidades dos seguintes eventos:

   i) a soma dos pontos é par;

   ii) a soma é ímpar;

   iii) primeiro lançamento menor que o segundo;

   iv) soma igual a 7;

   v) soma diferente de dois;

   vi) soma $\leq$ 4 ou soma$>$2;

   vii) primeiro lançamento menor que o segundo lançamento e soma par;

   viii) soma ímpar e igual resultado em ambos lançamentos.

10. Consideremos o conjunto $\{a, b, c, d\}$

    a) Calcule o número de amostras ordenadas com reposição.

    b) Calcule o número de amostras ordenadas sem reposição.

11. O prefixo telefônico de uma universidade é 452.

    a) Quantos números telefônicos de sete dígitos podemos formar?

    b) Quantos números telefônicos de sete dígitos diferentes podemos formar?

    c) Qual a probabilidade de, obtido um número ao acaso, este apresentar os sete dígitos diferentes.?

12. Temos num plano 10 pontos não alinhados (não tem três pontos na mesma linha). Quantos triângulos, com vértices em ditos pontos ficam determinados?

2 Probabilidade Condicional, Independência e Teorema de Bayes

1. Uma pessoa é submetida a uma cirurgia e morre por cause de uma reação alérgica à anestesia. Os familiares e o cirurgião entram numa disputa quanto à escolha da anestesia. O cirurgião afirma que tinha duas opções: anestesia tipo 1 (AT1) e anestesia tipo 2 (AT2). Ele afirma ter escolhido a AT1 pois as estatísticas mostram que apenas 1 pessoa em 10000 apresenta reação alérgica à AT1, salientando que não existem testes prévios válidos. O cirurgião acrescenta que a AT2 é de eliminação lenta, o que dificultaria a recuperação pós-operatória.

   Os familiares alegam que o médico fez a escolha errada, pois o paciente era hemofílico e que as estatísticas mostram que 20% dos hemofílicos reagem mal à AT1 e que portanto o cirurgião deveria ter utilizado a AT2.

   Se ambas as informações atribuídas às estatísticas forem verdadeiras, quem tem razão? Quem utiliza argumento falacioso? Em que consiste a falácia? Utilize a notação probabilística usual na sua argumentação.

2. Um total de 400 pessoas são classificadas segundo sexo e estado civil, obtendo-se a seguinte tabela:

	Solteiro(S)	Casado(C)	Desquitado(D)	Outros(O)
Feminino(F)	150	40	10	20
Maculino(M)	50	60	40	30

   Responda os itens abaixo:

   a) Calcule P(S/F) , P(C/F) , P(D/F) e P(O/F) . Verifique que:

   $$P(S/F) + P(C/F) + P(D/F) + P(O/F) = 1;$$

   b) Repita o item a), substituindo F por M;

   c) Calcule P(F/S) e P(M/S). Verifique que: $P(F/S) + P(M/S) = 1$;

   d) Repita o item a), substituindo S por C, D e O ;

   e) Apresente, formalmente, as distribuições de estado civil, estado civil/F e estado civil/M;

   f) Apresente, formalmente, as distribuições de sexo, sexo/S , sexo/C, sexo/D e sexo/O;

   g) Repita todo o exercício substituindo a tabela acima por uma tabela equivalente onde constem apenas probabilidades em vez de freqüências absolutas.

3. Prove que:

   a) se P(A)P(B) $\neq 0$, então: P(A/B)P(B) = P(B/A)P(A) ;

   b) se P(A)P(B) $\neq 0$, então: P(B/A) = P(A/B)P(B)/P(A) .

4. Uma urna contém duas bolas brancas (B) e três vermelhas (V). Duas bolas são extraídas ao acaso, uma após a outra, sendo registrada a seqüência das cores. Calcule $P(2^a B/1^a V)$, $P(2^a V/1^a V)$ e as probabilidades de cada uma das 4 seqüências possíveis de cores nas seguintes situações:

   a) as bolas são extraídas com reposição;

   b) as bolas são extraídas sem reposição.

5. Uma fábrica tem 3 máquinas M_1, M_2 e M_3 que produzem o mesmo tipo de peça, sendo que as elas respondem por 20%, 50% e 30% da produção total, respectivamente. Também é conhecida a proporção de peças defeituosas produzidas por cada uma delas: 15% na M_1, 2% na M_2 e 20% na M_3.

   a) Calcule a percentagem global de peças defeituosas;

   b) Se uma peça for defeituosa, qual é a probabilidade de que tenha sido produzida pela M_1, M_2 ou M_3?

   c) Calcule
   $$\sum_{j=1}^{3} P(defeituosa/M_j) \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{3} P(M_j/defeituosa).$$
   Uma dessas somas é igual a 1, enquanto a outra não. Explique o motivo;

   d) Quanto é
   $$\sum_{j=1}^{3} P(M_j/boa)?$$
   Argumente sem fazer contas.

6. Verifique cuidadosamente as demonstrações dos 3 resultados seguintes e observe onde é utilizada cada uma das hipóteses.

   Proposição A
   H) Seja Ω um espaço amostral; $B, A_1, A_2, ..., A_n$ eventos tais que $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ é uma partição de Ω.

   T)
$$P(B) = \sum_{j=1}^{n} P(B \cap A_j).$$

   Demonstração: a tese decorre dos seguintes fatos:
$$B = \bigcup_{j=1}^{n} (B \cap A_j)$$
   e se $i \neq j$, vale que
$$(B \cap A_i) \cap (B \cap A_j) = \emptyset.$$

   Proposição B
   H) Seja Ω um espaço amostral; $B, A_1, A_2, ..., A_n$ eventos tais que $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ é uma partição de Ω e além disso, $P(A_j) > 0$ se $1 \leq j \leq n$.

   T) Fórmula da Probabilidade Total:
$$P(B) = \sum_{j=1}^{n} P(B/A_j)P(A_j).$$

   Demonstração: substitua na tese do resultado anterior $P(B \cap A_j)$ por $P(B/A_j)P(A_j)$.

   Proposição C
   H) Seja Ω um espaço amostral; $B, A_1, A_2, ..., A_n$ eventos tais que $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ é uma partição de Ω e além disso, $P(A_j) > 0$ se $1 \leq j \leq n$, e $P(B) > 0$.

   T) Para todo k tal que $1 \leq k \leq n$, vale que: (Fórmula de Bayes)
$$P(A_k/B) = \frac{P(B/A_k)P(A_k)}{\sum_{j=1}^{n} P(B/A_j)P(A_j)}.$$

Demonstração: observe que $P(A_k/B)P(B) = P(B/A_k)P(A_k)$, e depois isole $P(A_k/B)$ e use a fórmula da probabilidade total.

7. Temos que 30% dos usuários de uma biblioteca universitária são alunos da graduação, 38% são alunos da pós e 32% professores. A consulta a livros estrangeiros é de 25%, 50% e 80% nas três categorias de usuários, respectivamente.

   a) Qual é a probabilidade de que um usuário qualquer utilize um livro em Português?

   b) Se um usuário retirou um livro em Português, calcule a probabilidade de que seja aluno da graduação, da pós ou que seja professor.

8. Sejam A e B eventos de Ω tais que $P(B) > 0$. Nestas condições, mostre que são equivalentes:

   a) A e B são independentes;

   b) P(A/B) = P(A).

9. Sejam A e B eventos de Ω. Mostre que as seguintes afirmações são todas equivalentes:

   a) A e B são independentes;

   b) A e B^c são independentes;

   c) A^c e B^c são independentes;

   d) A^c e B são independentes.

10. Mostre que:

    a) Se $P(A) = 0$ e B é um evento qualquer, então A e B são independentes ;

    b) Se $P(A) = 1$ e B é um evento qualquer, então A e B são independentes ;

    c) Os eventos D e D^c são independentes se e somente se $P(D) = 0$ ou $P(D) = 1$;

    d) Ache uma condição para que um evento E seja independente dele mesmo.

11. Uma moeda é jogada 3 vezes.

    a) Ache uma fórmula para a probabilidade da seqüência (cara, coroa, cara);

    b) Repita o item a) no caso em que $P(\{cara\}) = p$, a mesma em todas as jogadas assumindo que os resultados de jogadas diferentes são independentes.

12. Uma urna contém duas bolas brancas (B) e três vermelhas (V). Duas bolas são extraídas ao acaso, uma após a outra, sendo registrada a sequência das cores. Considere cada uma das perguntas nas duas situações seguintes:

    a) As bolas são extraídas com reposição;

    b) As bolas são extraídas sem reposição.

    Perguntas:

    1) Calcule $P(1^a B/2^a V)$ e $P(1^a V/2^a V)$;

    2) Os eventos $\{2^a V\}$ e $\{1^a B\}$ são independentes?

13. Temos que 30% dos empregados de uma empresa são mulheres e o restante homens; 9% das pessoas são mulheres e fumantes, 59% das pessoas são homens e não fumantes. Calcule:

    a) $P(\{mulher \;\; e \;\; fumante\})$;

    b) $P(\{homem \;\; e \;\; fumante\})$;

    c) Probabilidade de um homem ser fumante;

    d) Probabilidade de um homem ser não fumante;

    e) Probabilidade de um fumante ser homem.

14. Temos que 30% dos empregados de uma empresa são mulheres e o restante homens; 3/10 das mulheres são fumantes, 11/70 dos homens são fumantes. Calcule:

    a) $P(\{mulher \;\; e \;\; fumante\})$;

    b) $P(\{homem \;\; e \;\; fumante\})$;

    c) Probabilidade de um homem ser fumante;

    d) Probabilidade de um homem ser não fumante;

    e) Probabilidade de um fumante ser homem.

15. Temos que 30% dos empregados de uma empresa são mulheres e o restante homens; 9% das pessoas são mulheres e fumantes, 11/70 dos homens são fumantes. Calcule:

    a) $P(\{mulher \;\; e \;\; fumante\})$;
    b) $P(\{homem \;\; e \;\; fumante\})$;
    c) Probabilidade de um homem ser fumante;
    d) Probabilidade de um homem ser não fumante;
    e) Probabilidade de um fumante ser homem.

16. Suponha que a probabilidade de viver 70 ou mais anos é 6/10 e que a probabilidade de viver 80 ou mais anos é 2/10. Se uma pessoa faz 70 anos, qual é a probabilidade de que comemore o aniversario de número 80?.

17. Considere uma urna com 3 bolas brancas e 7 bolas vermelhas. Duas bolas são retiradas da urna uma depois da outra sem repor a primeira delas na urna antes da retirada da segunda.
    Assuma a seguinte notação: B_1V_2 representando que foi retirada uma bola branca na primeira retirada e uma bola vermelha na segunda. Calcule as seguintes probabilidades

    $$P(B_1B_2),\ P(V_1B_2),\ P(B_1V_2),\ P(V_1V_2).$$

    Considere que se faz mais uma extração de bolas da urna, recolocando na urna a segunda bola extraída anteriormente e calcule $P(B_1V_2B_3)$, onde $B_1V_2B_3$ representa que foi extraída branca na primeira, vermelha na segunda e branca na terceira. Compute ainda,

    $$P(B_1B_2B_3),\ P(B_1B_2V_3),\ P(V_1B_2B_3).$$

18. Suponha que se testam os chips para um circuito integrado e que a probabilidade de que sejam declarados com falhas quando efetivamente as tem é 95/100, sendo que a probabilidade de que sejam declarados em bom estado se efetivamente estão em bom estado é 97/100. Se 0,5% dos chips apresentam falhas, qual é a probabilidade de que um chip que foi declarado com falhas seja bom?

19. Um restaurante popular apresenta apenas dois tipos de refeições: salada completa ou um prato à base de carne. 20% dos fregueses do sexo masculino preferem salada, 30% das mulheres escolhem carne, 75% dos fregueses são homens. Considere os seguintes eventos:
H: freguês é homen, M: freguês é mulher,
A: freguês prefere salada, B: freguês prefere carne.
Calcular:
$$P(A|H),\ P(B|M),\ P(M|A).$$

20. Na tabela abaixo, os números que aparecem são probabilidades relacionadas com a ocorrência de $A, B, A \cap B$, etc. Assim
$P(A) = 10/100$, enquanto que $P(A \cap B) = 4/100$. Verifique se A e B são independentes.

	B	B^c	
A	0.04	0.06	0.10
A^c	0.08	0.82	0.90
	0.12	0.88	1.00

3 Variáveis aleatórias discretas

1. Considere um estudo sobre o número de filhos dos 20 funcionários de uma empresa. Há 1 funcionário sem filhos, 5 com 1 filho, 9 com 2, 4 com 3 e 1 com 5. Calcule a média e variância destes dados e compare com a definição formal de média e variância de uma variável aleatória discreta.

2. Um alvo é feito com uma tábua quadrada pintada de branco, com exceção de um círculo no seu centro, que é pintado de preto. As regras de uma prova são definidas da seguinte forma: o atirador que acertar no centro preto ganha 18 pontos, se acertar na parte branca da tábua ganha 8 pontos e se não acertar na tábua perde 2 pontos.

   a) Um atirador atira no alvo: defina formalmente o espaço amostral deste experimento e a variável aleatória número de pontos.

   b) Suponha que o desempenho desse atirador pode ser assim resumido:

   $$P\{acertar\ \ no\ \ centro\} = 0,2, P\{acertar\ \ na\ \ parte\ \ branca\} = 0,7.$$

   Calcule média e variância do número de pontos para o atirador.

3. Seja X uma v.a. tal que:

   $$f_X(x) = P(X = x) = 0,2\mathbb{1}_{\{-1\}}(x) + 0,1\mathbb{1}_{\{0\}}(x) + 0,7\mathbb{1}_{\{1\}}(x).$$

   a) Ache as funções de probabilidade das v.a's: $Y = 3X + 2$, $Z = (-2)X + 1$, $U = X^2$ e $V = X^3$.

   b) Verifique que $E(3X + 2) = 3E(X) + 2$ e que $E((-2)X + 1) = (-2)E(X) + 1$.

   c) Verifique que $Var(3X + 2) = 9Var(X)$ e que $Var((-2)X + 1) = 4Var(X)$.

   d) Seja S uma v.a. tal que: $P(\{S = -1\}) = P(\{S = 7\}) = 0,3$ e $P(\{S = 0\}) = P(\{S = 1\}) = 0,2$; ache a função de probabilidade de S^2.

4. Seja X uma variável discreta assumindo um número finito de valores e $h : R \to R$ uma função qualquer. Utilize a experiência dos itens a) e d) do exercício anterior para dizer como construiria a função de probabilidade de $Y = h(X)$.

5. X é uma variável aleatória cuja função de distribuição acumulada F é dada por:

$$F_X(x) = 0,2\mathbb{1}_{[-3,4)}(x) + 0,9\mathbb{1}_{[4,8)}(x) + \mathbb{1}_{[8,\infty)}(x).$$

   a) Use F para calcular as probabilidades dos seguintes conjuntos: $\{3 < X \leq 7\}$; $\{3 \leq X \leq 7\}$; $\{3 \leq X < 7\}$; $\{3 < X < 7\}$; $\{-3 < X \leq 5\}$; $\{-3 \leq X \leq 5\}$; $\{-3 \leq X < 5\}$; $\{3 < X < 5\}$; $\{X \leq 6\}$; $\{X < 6\}$; $\{X \leq 4\}$; $\{X < 4\}$; $\{X > 3\}$; $\{X \geq 3\}$; $\{X > 4\}$; $\{X \geq 4\}$; $\{X > 10\}$; $\{X \geq 10\}$; $\{X > 5\}$; $\{X \geq -5\}$; $\{X < -11\}$, $\{X \geq 20\}$.
   b) Ache a função de probabilidade de X e com ela responda às perguntas do item a).
   c) Calcule $\mathcal{E}(X)$ e $\mathcal{V}(X)$.

6. Seja X uma variável aleatória discreta em que $P(X = 0) = 0,25$, $P(X = 1) = 0,125$, $P(X = 2) = 0,125$, $P(X = 3) = 0,5$. Responda os itens abaixo:

   a) Apresente o gráfico a função de probabilidade e da função de distribuição acumulada.
   b) Calcule o valor esperado, a moda e a mediana de X.
   c) Calcule a variância de X.
   d) Determine as seguintes probabilidades:

$$P(0 < X < 1),\ P(X \leq 2),\ P(X > 3),\ P(X > 2.5).$$

7. Dada a função de distribuição acumulada

$$F_X(x) = 0,1\mathbb{1}_{[1,2)}(x) + 0,3\mathbb{1}_{[2,3)}(x) + 0,7\mathbb{1}_{[3,4)}(x) + 0,8\mathbb{1}_{[4,5)}(x) + \mathbb{1}_{[5,\infty)}(x).$$

   Responda os itens abaixo:

   a) Escreva a fda acima usando funções indicadoras.
   b) Calcule a função de probabilidade da variável cuja $f.d.a.$ é $F(\cdot) acima.$
   c) Calcule o valor esperado, a moda, a mediana e a variância de X.
   d) Determine as seguintes probabilidades:

$$P(1 \leq X < 2),\ P(X = 4),\ P(X > 3),\ P(X \leq 4).$$

8. Com dados do último censo, a assistente social de um centro de saúde constatou que, para as famílias da região, 20% não têm filhos, 30% têm um filho, 35% têm dois e as restantes se dividem igualmente entre três, quatro ou cinco filhos. Determine a função de distribuição acumulada da variável N: número de filhos, e responda: se uma família é escolhida aleatóriamente nessa região qual a probabilidade de que o número de filhos nessa família seja maior o igual a 2?. Calcule o valor esperado e a variância da variável N. Utilize funções indicadoras.

9. Um sinal consite em uma série de vibrações de magnitude X, assumindo os valores 1,0,-1, cada um com probabilidade 1/3. Um ruido consiste em uma série de vibrações de magnitude Y, assumindo os valores 2,0,-2 com probabilidades 1/6, 2/3, 1/6, respectivamente. Se ruídos e sinais são combinados, a soma consiste em vibrações de magnitude $Z = X + Y$. Responda os itens abaixo:

   a) Construa e apresente o gráfico a função de probabilidade para Z, calculando sua média e variância. Assuma independência entre ruído e sinal.
   b) Construa e apresente o gráfico a função de distribuição acumulada para Z, F_Z, calculando $F_Z(1), F_Z(-1.5)$. Encontre um valor de z tal que $F_Z(z) = 11/18$. Adicionalmente, calcule o menor valor z tal que $F_Z(z) = 11/18$.
   c) Um amplificador de vibrações permite a captação da magnitude $2Z$. Determine a função de probabilidade, a fda, o valor esperado e a variância desta nova variável.

4 Distribuições Binomial e Hipergoemétrica

1. Joga-se uma moeda 3 vezes e observa-se a sequência de caras e coroas obtida.

   a) Construa Ω={espaço amostral};

   b) Calcule a probabilidade de cada $\omega \in \Omega$ sob as seguintes hipóteses:

      I) p = probabilidade de $\{cara\}$ é a mesma em todas as jogadas;

      II) Os resultados entre as jogadas são independentes.

   c) Defina explicitamente a variável aleatória X = 'número de caras obtido nas 3 jogadas', e observe que a probabilidade definida em Ω no item anterior induz uma probabilidade em R através de X.

2. Uma moeda cuja probabilidade de cara é $0,4$ é jogada 5 vezes, sendo satisfeitas as condições I) e II) enunciadas no Exercício 1. Compare os seguintes eventos e calcule suas probabilidades:

   a) Observa-se a seqüência $\{(CKCCK)\}$, onde C denota cara e K coroa;

   b) {São obtidas exatamente 3 caras nas 5 jogadas}.

3. Sejam Ω o espaço amostral de um experimento E e A um evento fixo de Ω. O experimento E é repetido n vezes e supomos verdadeiras as seguintes hipóteses:

   I) p = probabilidade de A é a mesma em todas as repetições;

   II) os resultados entre as repetições dos experimentos são independentes.

   Seja X a variável aleatória 'número de ocorrências de A nas n repetições'. Calcule $Probabilidade(\{X = j\})$ para todo inteiro j tal que $0 \leq j \leq n$. Calcule E(X) e Var(X).

4. Uma prova consiste em 25 perguntas de múltipla escolha. Cada questão tem 5 alternativas, sendo que apenas uma delas é verdadeira. A nota X é igual ao número de respostas corretas. Uma pessoa lança um dado equilibrado e indica a resposta cujo número aparece na face de cima do dado (se sair {6} o resultado é desconsiderado).

   a) Qual é a distribuição da variável "nota" nessas condições? Veja se no contexto do problema são válidos as suposições nas quais o modelo utilizado se baseia.

   b) Calcule as probabilidades dos seguintes eventos utilizando o modelo desenvolvido no item a): $\{2 \leq X < 4\}$, $\{3 \leq X < 6\}$, $\{4 \leq X < 8\}$, $\{1 < X < 4\}$, $\{14 \leq X < 22\}$, $\{X \geq 6\}$, $\{X \geq 10\}$, $\{X \leq 1\}$, $\{X < 1\}$, $\{X \leq 20\}$, $\{X < 20\}$, $\{X \geq 1\}$, $\{X > 4\}$, $\{X \geq 23\}$;

c) Quais das hipóteses do modelo deixariam de ser satisfeitas se a pessoa respondesse conscientemente em vez de usar o esquema acima descrito?

5. Uma companhia de seguros vendeu apólices a 20 pessoas com as mesmas idades e condições de saúde. De acordo com as tábuas atuariais, a probabilidade de que uma pessoa nas condições dos assegurados sobreviva 10 anos à data dos contratos é de 0,9. Calcule as probabilidades dos seguintes eventos:

   a) Todas as pessoas sobrevivem.
   b) Nenhuma sobrevive.
   c) Sobrevivem ao menos 5 pessoas.
   d) Sobrevivem ao menos 15 pessoas.
   e) Morrem exatamente 3 pessoas.
   f) Morrem no máximo 2 pessoas.
   g) Morrem no mínimo 5 pessoas.

   Adicionalmente, calcule o número médio de sobreviventes e o número médio de mortos, bem como as variâncias do número de mortos e do número de sobreviventes aos 10 anos do contrato.

6. Uma urna contém 50 bolas, sendo 20 brancas e 30 vermelhas. São extraídas 10 bolas, uma após outra, com reposição. Calcule as probabilidades dos seguintes eventos:

a) O número de bolas vermelhas extraídas é igual a 4.

b) O número de bolas brancas extraídas é igual a 1.

c) Pelo menos duas bolas vermelhas são extraídas.

d) No máximo 3 bolas vermelhas são extraídas.

   Adicionalmente, calcule o número médio de bolas brancas (vermelhas) extraídas, bem como as variâncias do número de bolas brancas e vermelhas extraídas. Analise a aderência às hipóteses do modelo utilizado para responder as perguntas acima caso as extrações sejam sem reposição.

7. Um comerciante deseja comprar um lote de 200 mesas de uma fábrica. O lote oferecido tem 10 mesas defeituosas (mas o comerciante desconhece este fato). O comerciante adota a seguinte regra de decisão: ele observará uma amostra de 20 mesas escolhida por sorteio e aceitará o lote se ele tiver até 2 mesas defeituosas. Qual é a probabilidade do comerciante aceitar o lote nas condições acima detalhadas? Repita o exercício supondo que a amostragem é feita sem reposição.

8. Sabe-se que quando uma distribuição discreta é simétrica a média e a mediana coincidem. É o que acontece com a binomial(n,1/2) para qualquer $n \in mathcalN$. Mais ainda, neste caso podemos observar que também a moda coincide com ambas. Dê um exemplo de uma distribuição discreta simétrica onde a moda seja diferente da média e da mediana (Dica: considere uma distribuição discreta simétrica que assuma 3 valores). Adicionalmente, dê um exemplo de uma distribuição discreta em que média, mediana e moda sejam todas diferentes.

9. Considere os gráficos da distribuição binomial(n,1/10) para n igual a 5, 10, 20, 30, 60 e 100. Observe que para n=5 a distribuição é totalmente assimétrica e que a medida que n cresce a assimetria diminui, sendo que para n=100 ela é quase inexistente. Justifique a afirmação da simetria da binomial(100,1/10), mesmo levando em conta a "longuíssima" cauda a direita (isto é, explique porque é possível desconsiderar tal cauda).

10. Sejam X e Y variáveis aleatórias com distribuições binomial(n, p) e binomial$(n, 1-p)$, respectivamente. Prove, para todo inteiro j, $0 \leq j \leq n$, que:

$$P(\{Y = j\}) = P(\{X = n - j\}).$$

Verifique este fato nos gráficos, comparando a binomial(20,p) com a binomial(20,1-p), para $p \in \{0,2; 0,3e0,4\}$. Prove também que:

$$E(X) + E(Y) = n \ \ e \ \ que \ \ Var(X) = Var(Y).$$

5 Modelos discretos

1. Discuta a validade do modelo Uniforme Discreto nos seguintes casos:

   a) A escolha de um aluno que vai representar a classe junto a direção da escola.

   b) O dia da semana em que ocorrem mais acidentes de trabalho numa indústria.

   c) O mês do ano com maior número de enchentes na cidade de São Paulo.

2. Seja $X \sim U\{1, 2, \cdots, 10\}$, calcule:

   a) $P(7 \leq X)$.

   b) $P(3 < X \leq 7)$.

   c) $P(X < 2 \,\text{ou}\, X \geq 8)$.

   d) $P(5 \leq X \,\text{ou}\, X > 8)$.

   e) $P(X > 3 \,\text{e}\, X < 6)$.

   f) $P(X \leq 9 | X \geq 6)$

3. Discuta a validade do modelo Binomial nos seguintes casos:

   a) Dos alunos de uma grande universidade, sorteamos 5 e contamos quantos se declaram usuários de drogas.

   b) Escolhemos 20 lâmpadas ao acaso na prateleira de um supermercado, sendo 10 de uma fábrica e 10 de outra. Contamos o número total de defeituosas.

   c) Quinze automóveis 0 km de uma mesma marca e tipo são submetidos a um teste anti-poluição e contamos o número deles que passaram no teste.

   d) Um motorista é submetido a um teste em que deve estacionar seu veículo num pequeno espaço (isto é popularmente chamado de fazer baliza). Em 10 tentativas, contamos o número de vezes em que o motorista estacionou corretamente.

4. Uma certa doença pode ser curada através de procedimento cirúrgico em 80% dos casos. Dentre os que tem essa doença, sorteamos 15 pacientes que serão submetidos a cirurgia. Fazendo alguma suposição adicional que julgar necessária, responda qual é a probabilidade de:

   a) Todos serem curados.

   b) Pelo menos dois não serem curados.

   c) Ao menos 10 ficarem livres da doença.

5. Bactérias de certa classe aparecem na água a razão de 0,8 por cm^3. Qual é a probabilidade de que em 5 cm^3 de água tenhamos:

   a) No mínimo duas bactérias.

   b) Pelo menos 13 bactérias.

   c) Nenhuma.

   d) no máximo sete.

6. Um digitador comete 0,5 erros por folha, em média, ao transcrever um texto. Qual é a probabilidade de que num texto de 15 páginas ele cometa 8 ou mais erros?

7. A taxa de de um certo tipo de crimes num certo país é de 1 para cada 250.000 habitantes por semana. Considere uma cidade de 500.000 habitantes e responda os itens abaixo:

   a Calcule a probabilidade de ter 6 ou mais suicídios numa semana?

   b) Utilizaria o mesmo modelo se em vez de suicídios se tratasse de casos de dengue? Justifique.

8. Os trabalhadores de certa fábrica sofrem, em média, dois acidentes por mês. Calcule as probabilidades dos seguintes eventos:

   a) Ocorrerem 5 acidentes ou menos num período de um mês (2 meses, 3 meses).

   b) Ocorrerem 8 ou mais acidentes num período de um mês (2 meses, 3meses).

   c) $2 \leq$ número de acidentes < 5 no mês de abril e também em junho.

9. Suponha uma variável aleatória Y com densidade de Poisson de parâmetro $\lambda = 2$. Obtenha:

   a) $P(Y < 2)$.

   b) $P(2 \leq Y < 4)$.

   c) $P(Y > 0)$.

   d) $P(Y = 1 | Y < 3)$.

10. A aplicação de fundo anti-corrosivo em chapas de aço de 1 m^2 é feita mecanicamente e pode produzir defeitos (pequenas bolhas na pintura), de acordo com uma variável aleatória Poisson de parâmetro $\lambda = 1$ por m^2. Uma chapa é sorteada ao acaso para ser inspecionada, pergunta-se a probabilidade de:

    a) Encontrarmos pelo menos 1 defeito.

    b) No máximo 2 defeitos serem encontrados.

    c) Encontrar de 2 a 4 defeitos.

    d) Não mais de um defeito ser encontrado.

11. Um banco de sangue necessita sangue do tipo O-Rh negativo. Suponha que a probabilidade de uma pessoa ter esse tipo de sangue seja 0,10. Doadores permanentes chegam ao hemocentro para fazer sua doação rotineira. Calcule as probabilidades de que o primeiro doador com sangue do tipo O-Rh negativo seja:

    a) O primeiro a chegar.

    b) O segundo.

    c) O quarto.

    d) O sétimo.

12. No contexto do exercício anterior, calcule:

    a) A probabilidade de que o primeiro doador com sangue no grupo O-Rh negativo apareça a partir do quarto doador.

    b) A probabilidade de que o primeiro doador com sangue no grupo O-Rh negativo apareça no máximo em 5 tentativas.

13. Um supermercado vende uma caixa com 20 lâmpadas, das quais 4 são inúteis e as restantes boas. Um comprador decide testar 5 das lâmpadas (sem reposição) escolhidas ao acaso e comprar a caixa caso haja no máximo duas defeituosas entre as lâmpadas testadas. Qual é a probabilidade dele comprar a caixa? Encontre a distribuição do número de itens defeituosos.

14. Uma urna contém bolas vermelhas (V) e brancas (B). São extraídas 5 bolas da urna. Calcule as probabilidades de extrair 2 vermelhas e 3 brancas nas seguintes condições:

    a) A urna tem 4V e 6B, extração sem reposição (resposta: $10/21 \approx 0{,}47619$).
    b) A urna tem 8V e 12B, extração sem reposição (resposta: $385/969 \approx 0{,}39732$).
    c) A urna tem 16V e 24B, extração sem reposição (resposta: $10120/27417 \approx 0{,}3691$).
    d) A urna tem 48V e 72B, extração sem reposição (resposta: $934360/2646917 \approx 0{,}3530$).
    e) A urna tem 40% das bolas V e 60% B, extração com reposição (resposta: 0,3456).

15. Suponha uma variável variável H que segue o modelo Hipergeométrico com parâmetros $N = 10$, $n = 5$ e $r = 4$¿ Determine:

    a) $P(H = 2)$.
    b) $P(H \leq 1)$.
    c) $P(H > 0)$.

16. Por engano 3 peças defeituosas foram misturadas com peças boas, formando um lote com 12 peças no total. Escolhendo ao acaso 4 dessas peças (com e sem reposição), determine a probabilidade de encontrar:

    a) Pelo menos 2 defeituosas.
    b) No máximo uma defeituosa.
    c) No mínimo 1 boa.

17. Suponha que a probabilidade de que um item produzido por uma máquina ser defeituoso é de 0,2. Se 10 itens produzidos por esta máquina são selecionados ao acaso, qual é a probabilidade de que não mais do que um defeituoso seja encontrado?. Use a binomial e a Poisson, e compare os resultados.

18. Numa central telefônica, o número de chamadas chega segundo uma distribuiçao de Poisson, com media de 8 chamadas por minuto. Determinar qual é a probabilidade de que num minuto se tenha:

    a) 10 ou mais chamadas.
    b) menos do que 9 chamadas.
    c) entre 7 (inclusive) e 9 (exclusive).

19. Numa fábrica de pregos sabe-se que a proporção de itens defeituosos é igual a 0,1. A produção mensal é de 100.000 artigos/mês. Qual é a probabilidade de que uma amostra de tamanho 4 dos artigos produzidos num mês contenha:

    a) Nenhum defeituoso.
    b) Exatamente um defeituoso.
    c) Exatamente dois defeituosos.
    d) Não mais do que 2 defeituosos.

    Adicionalmente, calcule a esperança e variância do número de defeituosos na amostra.

20. Entre as 14h00 e 17h00 de um dia útil passam por um pedágio em média 150 carros por hora. Calcule:

    a) A probabilidade de que passem até 4 carros entre 15,30 e 15,32.
    b) A probabilidade de que passem até 4 carros entre 16,48 e 16,50.
    c) A probabilidade de que passem exatamente 3 carros entre 14,16 e 14,17.
    d) A probabilidade de que passem até 4 carros entre 16,00 e 16,01.
    e) A probabilidade de que passem 7 ou mais carros entre 13,15 e 13,18.

6 Modelos contínuos

1. Seja X a v.a. contínua cuja densidade de probabilidade é

$$f_X(x) = 2x\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$$

. Responda os itens abaixo:

   a) Calcule a distribuição acumulada $F(x)$ o valor esperado $\mathcal{E}(X)$, a variância $\mathcal{V}(X)$ e o desvío padrão $\sigma(X)$.

   b) Calcule $P(0 < X < 1/2), P(1/3 < X \leq 1)$.

   c) Apresente o gráfico da $F(x)$ e determine o valor de x_0 tal que $F_X(x_0) = 0,95$. Calcule $P(x_0 < X \leq 1)$. Interprete.

2. Seja X a v.a. contínua cuja densidade de probabilidade é

$$f_X(x) = kx^2\mathbb{1}_{[0,1]}(x).$$

Responda os itens abaixo:

   a) Determinar o valor k.

   b) Calcular $\mathcal{E}(X), \mathcal{V}(X)$.

   c) Determine a f.d.a. de X.

3. O comprimento do lado de um quadrado aleatório é uma v.a. uniforme em [0,5]. Calcule a área esperada do quadrado.

4. Seja $X \sim U[-1,1])$. Isto significa que X tem função de densidade (f_x) e função de distribuição acumulada (F_X) dadas pelas fórmulas abaixo, respectivamente.

$$f_X(x) = 1/2 \mathbb{1}_{[-1,1]}(x).$$
$$F(x) = F(x) = \frac{x+1}{2} \mathbb{1}_{[-1,1]}(x) + \mathbb{1}_{(1,\infty)}(x).$$

Calcule as probabilidades dos seguintes eventos, usando f_X e F_X:

$$\{X < -2\}, \{X \leq 0\}, \{X < 0\}, \{-1 < X < 0,8\}, \{-3 \leq X \leq 0,8\},$$
$$\{0,2 < X < 1,5\}, \{-4 < X < -3\} \cup \{0,2 \leq X \leq 2\},$$
$$\{0,2 \leq X < 1\}, \{X > -2\}, \{X > 0\}, \{X \geq 1,2\}, \{X \geq 4\},$$
$$\{-1/2 \leq X < 1/2\} \cup \{8 \leq X < 24\}, \{X = 0\}, \{X = 4\}.$$

5. Seja X uma v.a. cuja função de distribuição acumulada é dada por:

$$F_X(x) = \frac{x+1}{4} \mathbb{1}_{[-1,1)}(x) + \left(2x - \frac{x^2}{2} - 1\right) \mathbb{1}_{[1,2)}(x) + \mathbb{1}_{[2,\infty)}(x)$$

Responda os itens abaixo:

a) Calcule a função de densidade de X. É possível e/ou importante calcular o valor da densidade em -1, 1 e 2? Veja os gráficos da densidade e da acumulada: por que motivo X é considerada uma v.a. contínua?

b) Calcule $\mathcal{E}(X)$, $\mathcal{E}(X^2)$, $\mathcal{V}(X)$, $Md(X)$ e $Mo(X)$.

c) Calcule as probabilidades dos seguintes eventos:

$$\{X = -2\}, \{X = -1\}, \{X = 0\}, \{X = 1/2\}, \{X = 1\}, \{X = 2\},$$
$$\{X = 8\}, \{X < -2\}, \{X \leq 0\}, \{X < 1,5\}, \{X < 4\}, \{X \geq 0\},$$
$$\{X > 1,5\}, \{X > 4\}, \{0 < X < 1,5\}, \{-2 < X < 0\}, \{0 \leq X < 1,2\},$$
$$\{1,1 \leq X \leq 3\}, \{-2 \leq X < 9\}, \{-2 \leq X < 1,5\}, \{3 \leq X < 6\}.$$

6. 0 tempo de vida em horas X de um transistor é uma v.a. com função de densidade:

$$f_X(x) = 500^{-1}e^{-x/500}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x).$$

Calcule a função de distribuição acumulada, a média, variância, mediana, moda de X, bem como a $P(\{X > x\})$ para todo x real.

7. Assuma que o tempo de duração X de uma consulta médica tenha distribuição exponencial com média de 10 minutos. Calcule a probabilidade dos seguintes eventos:

   a) Uma consulta demorar 20 minutos no máximo.

   b) Uma consulta demorar mais de 20 minutos.

   c) Uma consulta demorar mais que o tempo médio.

   Adicionalmente, calcule a probabilidade do evento $\{X > E(X)\}$ para $X \sim \exp(\alpha)$, $\alpha > 0$.

8. Seja $X \sim Normal(\mu, \sigma^2)$. Responda os itens abaixo:

   a) Prove que $Z = (X - \mu)/\sigma$ tem distribuição Normal(0,1). (Dica: chame de F à função de dist. acumulada de X e de ϕ à de Z, e verifique que

   $$\phi(t) = F(\mu + \sigma t)$$

   e portanto que a relação entre as densidades φ de X e φ_0 de Z é

   $$\varphi_0(t) = \sigma\varphi(\mu + \sigma t).$$

   b) Verifique também as relações inversas entre as acumuladas e densidades de X e Z:

   $$F(x) = \phi((x - \mu)/\sigma) \quad e \quad \varphi(x) = \sigma^{-1}\varphi_0((x - \mu)/\sigma).$$

9. Suponha que a duração de uma componente eletrônica possui distribuição exponencial de parâmetro $\lambda = 1$, calcule:

   a) A probabilidade de que a duração seja menor a 10.

   b) A probabilidade de que a duração esteja entre 5 e 15.

   c) O valor t tal que a probabilidade de que a duração seja maior a t assuma o valor 0,01.

10. Suponha que a largura do lado de um cubo aleatório é uma v.a. contínua exp(3). Calcule o volume esperado do cubo.

11. Seja T uma v.a. contínua de distribuição exponencial de parâmetro 2 e seja X uma v.a. discreta definida como

$$X = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0 \leq T < 1 \\ 1 & \text{se} \quad 1 \leq T < 2 \\ 2 & \text{se} \quad 2 \leq T \end{cases} .$$

    Determine a função de probabilidades de X.

12. Assumindo que X possui distribuição $N(\mu, \sigma^2)$, calcule:

    a) $P(X \leq \mu + 2\sigma)$.
    b) $P(|X - \mu| \leq \sigma)$.
    c) O número a tal que $P(\mu - a\sigma \leq X \leq \mu + a\sigma) = 0,99$.
    d) O número a tal que $P(X > a) = 0.90$.

    Por simplicidade assuma primeiramente que $\mu = 1$ e $\sigma = \sqrt{2}$. Logo, determine as quantidades requeridas para μ e σ geral.

13. Seja $X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$. Calcule as probabilidades dos seguintes eventos:

$$\{\mu - \sigma < X < \mu + \sigma\}, \{\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma\}, \{\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma\},$$

$$\{-\infty < X < \mu\}, \{\mu < X < \infty\}; \{\mu - \sigma < X < \mu\}, \{\mu < X < \mu + \sigma\},$$
$$\{\mu - \sigma < X < \mu + 2\sigma\}, \{\mu - 2\sigma < X < \mu + \sigma\}.$$

14. Considere que o peso de um puma macho adulto como uma variável aleatória com distribuição Normal(μ, σ^2). Sabe-se que 33,0% destes animais tem peso inferior a 82,8 kg e também que 0,4% tem peso superior a 98,25 kg. Calcule μ e σ.